ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE
IN BERLIN

W. FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE
IN BERLIN

---

11. BAND. 1. UND 2. (DOPPEL-) HEFT.

MIT 14 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 8. NOVEMBER 1906.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1906.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Ludwigskirchstraße 6[1]

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 64, und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Herzog Albrecht Allee 27, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen nicht mehr als 6 Einzel-Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden. Die Redaktion teilt ferner mit, daß sie sich durch den Umfang des vorliegenden Manuskriptenmaterials für die nächste Zeit verhindert sieht, Inauguraldissertationen in extenso ins Archiv aufzunehmen.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

[Fortsetzung auf der 3. und 4. Seite des Umschlags.]

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE IN BERLIN.

11. BAND.

MIT 45 TEXTFIGUREN UND EINER FIGURENTAFEL.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Inhalt.

Rezensionen.

Vermischte Mitteilungen.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Zur projektivischen Behandlung der Dreiecksgeometrie.

Von GUSTAV BERKHAN in Hamburg.

Vorwort. — Der Vorlesung über „höhere Geometrie", die mein hochverehrter Lehrer, Herr Prof. W. Fr. Meyer zu Königsberg im Sommersemester 1903 gehalten hat, verdanke ich die Anregung zu dem Versuche, den Gedanken, daß „die metrischen Eigenschaften der geometrischen Gebilde als projektive in bezug auf den unendlich fernen Kugelkreis erscheinen"[1]), zum Beweise metrischer Sätze zu verwenden — *systematischer als das bisher geschehen ist.*

Indem ich mich zunächst auf die Geometrie der Ebene[2]), insbesondere die des Dreiecks beschränkte, verfaßte ich eine, am 20. Juli 1904 von der Königsberger philosophischen Fakultät gekrönte, Preisarbeit, die naturgemäß, ohne angenähert vollständig zu sein, schon sehr umfangreich wurde. Daraus ist die vorliegende Dissertation ein sehr kurzer Auszug.

In diesem sind nicht nur Einzelheiten — Rechnungen und weniger interessante Sätze — unterdrückt: ganz fortgelassen ist ein Teil, der die für die neuere Dreiecksgeometrie wichtige Theorie dreier gleichwendig ähnlichen Figuren projektivisch behandelt, und ein Anhang, der das Dreieck in der Ebene der komplexen Zahlen studiert.

Einleitung. — 1. „Es ist in der Tat bewundernswürdig, daß eine so einfache Figur, wie das Dreieck, so unerschöpflich an Eigenschaften ist." Wer würde diesem Wort[3]) nicht beistimmen, zumal, nachdem sich in jüngster Zeit die sogenannte neuere Dreiecksgeometrie so mächtig entwickelt hat!

Von den Eigenschaften des Dreiecks kennt man heute bereits so viele, daß das dringende Bedürfnis nach einem durchgreifenden Ordnungsprinzip[4]) vorliegt.

1) Karl Doehlemann, Geometrische Transformationen I. Sammlung Schubert. Leipzig 1902. S. 18.

2) An Stelle des Kugelkreises treten da die Kreispunkte.

3) A. L. Crelle, Sammlung mathematischer Aufsätze. I., 1821, S. 176.

4) Vgl. hierzu F. Caspary, Zur neueren Dreiecksgeometrie. Archiv d. Math. u. Physik (3) 1, 143–158, 269—288, 1901 und E. Jahnke, Über dreifach perspektivische Dreiecke in der Dreiecksgeometrie. Progr. d. Achten Realsch. Berlin, Ostern 1900.

2. Wie der „Lemoinesche Punkt“ eines Dreiecks von Grebe in die Wissenschaft als der Punkt eingeführt worden ist, für den die Summe aus den Quadraten seiner Abstände von den Seiten des Dreiecks ein Minimum wird, so könnte man überhaupt merkwürdige Punkte, Geraden, Kegelschnitte usw. in der Ebene des Dreiecks dadurch definieren, daß für diese Elemente oder Gebilde irgend eine Funktion ihrer Koordinaten, Parameter, ... einen ausgezeichneten Wert, ein Minimum oder ein Maximum erreicht. Es dürfte nicht schwer sein, in jedem einzelnen Falle die geeignete Funktion herauszufinden.[1])

So könnte man viele Merkwürdigkeiten, die das Dreieck in sich birgt, auf die eine zurückführen, daß ein Wert unter vielen anderen der kleinste oder der größte ist. Es bliebe dann noch die Aufgabe, jene Funktionen, um deren Extrema es sich handelt, wissenschaftlich zu verarbeiten.

3. Ein anderes Ordnungsprinzip, das in dieser Arbeit ausschließlich zur Anwendung kommen soll, bietet die projektive Geometrie in jenem Begriff, der entsteht, wenn man ihr die Metrik unterordnet, in dem Begriff der imaginären unendlich fernen Kreispunkte.

Sucht man in der projektiven Ebene diejenigen Elemente, die von allen endlichen Elementen einen unendlich großen Abstand haben, so findet man als Ort für die Punkte eine Gerade — die unendlich ferne Gerade der Ebene — und als Ort für die Geraden einen Klassenkegelschnitt, der in ein imaginäres Punktepaar — in das Kreispunktepaar auf der unendlich fernen Geraden — zerfallen ist.[2])

4. Die Kreispunkte und ihre Verbindungslinie, die unendlich ferne Gerade, (das absolute[3]) Gebilde) dienen bekanntlich dazu, alle metrischen Begriffe (Parallelismus, Mitte, senkrecht, Kreis usw.) rein projektiv zu definieren. Sie spielen daher in allen metrischen Sätzen eine wichtige Rolle, doch nicht überall die gleiche.[4]) Wenn sie auch zur projektivischen Ableitung eines jeden metrischen Satzes hinreichen müssen, so sind sie doch nicht für alle in gleichem Maße notwendig. In einigen Sätzen spielen nicht die Kreispunkte selber eine Rolle,

1) Für die Steinerschen Ellipsen des Dreiecks hat der Flächeninhalt einen größten (kleinsten) Wert. Mit Hilfe dreier Zahlen λ, μ, ν kann man jeden Punkt zu einem Minimumspunkt machen. J. Schick, Beziehungen zwischen Isogonalzentrik und Invariantentheorie. Münchener Berichte. **30**, 249—272, 1900.

2) Karl Doehlemann, Geometrische Transformationen. I. Sammlung Schubert. Leipzig 1902. S. 33.

3) Ebenda S. 34. S. 139.

4) Vergl. W. Fr. Meyer. Über die Höhen des Tetraeders. Archiv d. Math. u. Physik. (3) 8, 135. 1904.

sondern nur ihre Verbindungslinie, die unendlich ferne Gerade[1]); in andere geht das Kreispunktepaar nur als Kegelschnitt ein, von dem es ganz gleichgültig ist, ob er in ein Punktepaar zerfällt oder nicht.[2]) Schließlich ist es für einige Sätze unentbehrlich, daß der absolute Kegelschnitt wirklich auch ein Punktepaar ist.[3])

In welcher Art nun das Kreispunktepaar den einzelnen metrischen Beziehungen zugrunde liegt, erkennt man am besten dann, wenn man es durch ein beliebig, aber fest gewähltes absolutes Gebilde, sei es also durch eine absolute Gerade, einen absoluten allgemeinen Kegelschnitt (der nicht zerfallen ist) oder ein absolutes Punktepaar ersetzt.[4])

Den drei Klassen, in die demnach die Sätze der Metrik zerfallen, sollen die drei Abschnitte dieser Arbeit entsprechen, deren jeder natürlich nur wenige Beispiele enthalten kann.

Ehe wir uns jedoch dem ersten Abschnitte zuwenden, müssen wir am Schluß dieser Einleitung noch einige Bemerkungen über projektive Beziehungen am Dreieck vorausschicken, damit wir uns im folgenden darauf beziehen können.

5. Wenn man in der projektiven Geometrie von den Grundgebilden erster Stufe zu denen zweiter Stufe übergeht, so trifft man als einfachste Figuren solche an, die aus drei Elementen gebildet werden. In der Geometrie der Ebene ist das die Figur, die zugleich Dreieck und Dreiseit, sich selbst dual ist.

Für die Bezeichnung sei das folgende Schema maßgebend: Das Dreieck A, bezw. das Dreiseit a hat die Ecken A_1, A_2, A_3, die Seiten a_1, a_2, a_3 (die Winkel $\alpha_i = A_i[A_k A_l] = -A_i[A_l A_k]$).

Das Dreieck-Dreiseit bietet zu projektiven Betrachtungen kaum Gelegenheit; erst das Viereck und das Vierseit haben für die projektive Geometrie eine grundlegende Bedeutung. Was jetzt folgen soll, deckt sich dem Inhalte nach meist mit der Theorie dieser Figuren; nur die Form ist der Dreiecksgeometrie angepaßt.

6. Es sei A das Grunddreieck eines projektiven Koordinatensystems.[5]) Sind dann drei Zahlen p_1, p_2, p_3 ihrem absoluten Werte nach und bis auf einen gemeinsamen Faktor gegeben, so gehören zu diesen als Koordinatenwerten vier Punkte in der Ebene des Dreiecks A:

$$P: p_1\, p_2\, p_3. \qquad P_1: -p_1\, p_2\, p_3. \qquad P_2: p_1 - p_2\, p_3. \qquad P_3: p_1\, p_2 - p_3.$$

1) Affine Geometrie.

2) Hyperbolische und elliptische Geometrie.

3) Parabolische Geometrie.

4) Den Fall eines absoluten Geradenpaares lassen wir unberücksichtigt, weil er kein metrisches Interesse bietet

5) K. Doehlemann a. a. O.

Das von diesen vier Punkten P gebildete Viereck hat das Grunddreieck A zum Diagonaldreieck.

Dieser Satz begreift eine Menge harmonischer Eigenschaften; vier solche Punkte P heißen deswegen *harmonisch assoziiert*[1]) in bezug auf das Grunddreieck. Das Dreieck, das je drei dieser Punkte bilden, möge kurz das dem vierten harmonisch assoziierte Dreieck heißen.

Dual erhalten wir harmonisch assoziierte Geraden und Dreiseite.

7. Die Dreiecke P und A liegen perspektivisch; Kollineationszentrum ist der Punkt P, Kollineationsachse die *„Harmonikale"* oder *„gerade Polare"* π von P, deren Koordinaten $1/p_i$ sind.[2])

Fassen wir das Dreieck A als Kurve dritter Ordnung auf, so erhalten wir zu einem Punkte P außer der eben genannten geraden Polare noch die *konische Polare*: $\mathsf{P} \equiv p_1 x_2 x_3 + p_2 x_3 x_1 + p_3 x_1 x_2 = 0$, also einen dem Dreieck A um- und dem Dreieck P einbeschriebenen Kegelschnitt.

Dual erhalten wir als Polaren zu einer Geraden in bezug auf das als Kurve dritter Klasse aufgefaßte Grunddreieck einen Punkt, ihren *Dreieckspol*, und einen dem Dreieck A einbeschriebenen Kegelschnitt, und zwar zur obigen Geraden π wieder den Punkt P und den Kegelschnitt: $\Pi \equiv u_2 u_3/p_1 + u_3 u_1/p_2 + u_1 u_2/p_3 = 0$.

8. *Nach den bisherigen Entwicklungen gehören immer vier Gebilde eng zusammen: Ein Punkt, eine Gerade, ein Umkegelschnitt und ein Inkegelschnitt des Grunddreiecks.*

Besonders interessant ist noch der folgende Satz[3]):

Zwei zusammengehörige Kegelschnitte P und Π berühren sich doppelt[4]), und zwar so, daß die zugehörigen Elemente P und π Berührungspol und Berührungssehne sind.

9. Diese natürlich höchst unvollständigen Betrachtungen spielen in der neueren Dreiecksgeometrie eine wichtige Rolle:

Unter den Umkegelschnitten des Grunddreiecks A ist einer ausgezeichnet: sein Umkreis. Auch zu ihm gehören in dem obigen Sinne ein Inkegelschnitt, ein Punkt und eine Gerade: die Brocardsche Ellipse,

---

1) E. Rouché et Ch. de Comberousse, Traité de Géométrie. I. p. 449. Paris 1900. Gauthier-Villars.

2) Die Gerade π erhält man auch, wenn man auf P zunächst eine quadratische Transformation ($p_i q_i = 1$) und dann auf den Bildpunkt Q eine Korrelation ($u_i = q_i$) anwendet.

3) Max Greiner, Pol und Polare des Dreiecks. Archiv der Math. und Physik. **59**, 1876.

4) Diese Doppelberührung ist stets imaginär.

der Lemoinesche Punkt und die Lemoinesche Gerade des Grunddreiecks.[1])

Erster Abschnitt: Das Dreieck und die absolute Gerade.

1. *Die absolute Gerade.* — 10. Wie in der Einleitung bereits betont wurde, enthalten einige metrische Sätze nur Beziehungen zur unendlich fernen Geraden, nicht zum Kreispunktepaar. Sie sind vom projektiven Standpunkt aus die einfacheren. Einige dieser Sätze bilden den Inhalt dieses ersten Abschnittes.

Die unendlich ferne Gerade ersetzen wir durch eine beliebige Gerade, die wir aber, nachdem wir gewählt, festhalten und darum als die absolute Gerade bezeichnen können.

11. Jede Kurve $n$ter Ordnung schneidet die absolute Gerade in n Punkten, die kurz als die Richtpunkte der Kurve bezeichnet werden mögen.

Mit Hilfe der absoluten Geraden definieren wir in bekannter Weise den Parallelismus zweier Geraden, die Homothetik zweier Kegelschnitte, die Ähnlichkeitslage[2]) zweier Dreiecke, den Mittelpunkt und die Asymptoten eines Kegelschnitts, die Mitte einer Strecke, die durch drei Punkte einer Geraden bestimmten Verhältnisse (als Doppelverhältnisse dieser drei Punkte und des Richtpunktes ihrer Geraden), die Mittellinien und den ihnen gemeinsamen Flächenschwerpunkt des Dreiecks, dessen gerade Polare in bezug auf das Dreieck wieder die absolute Gerade ist, usw.

Die konischen Polaren des Schwerpunktes und der absoluten Geraden sind die beiden Steinerschen Ellipsen, die Umellipse und die Inellipse. Aus Nr. 8 folgt, daß diese homothetisch und konzentrisch sind.

12. Die absolute Gerade könnte man — um die Rechnung zu vereinfachen — zur Einheitsgeraden des Koordinatensystems wählen.[3])

1) Wegen dieser wichtigen Gebilde vergleiche man die Hauptwerke über neuere Dreiecksgeometrie:

A. Emmerich, Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Berlin 1891. Mit reichhaltigem Literaturnachweis!

W. Fuhrmann, Synthetische Beweise planimetrischer Sätze. Berlin 1890.

E. Rouché et Ch. de Comberousse, Traité de Géométrie I. et II. VII. éd. Paris 1900.

Auch sei hingewiesen auf die Berichte von E. Vigarié, Association Française pour l'Avancement des Sciences, zuerst Congrès de Toulouse 1887.

2) Die Ähnlichkeit können wir hier nicht definieren.

3) Baryzentrische Koordinaten.

Dann würde aber meistens die Möglichkeit verloren gehen, zu entscheiden, ob und welche Rolle die absolute Gerade in den einzelnen Sätzen spielt.

Ihre Gleichung sei darum $g(x) \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = 0$. Dann sind die Gleichungen des Schwerpunktes und der Steinerschen Ellipsen:

$$\sum u_i/g_i = 0, \qquad \sum 1/g_i x_i = 0, \qquad \sum g_i/u_i = 0.$$

2. *Durch die absolute Gerade definierte Transformationen.* — 13. Die Seitenmitten des Grunddreiecks A seien G_i. Das Mittendreieck G liegt ähnlich zum Grunddreieck A. Ähnlichkeitspunkt ist der Schwerpunkt G. Einem Punkte X von A entspricht ein Punkt Y von G. Y heißt der *Komplementpunkt* von X, X der *Antikomplementpunkt* von Y. Dual liegen die Verhältnisse für die Geraden.[1])

Da es sich um eine Zentralkollineation mit dem Zentrum G und der Achse g handelt, so gilt: Homologe Punkte (X und Y) liegen auf einer Geraden durch G, homologe Geraden sind parallel, homologe Kegelschnitte homothetisch.

Der Punkt X habe die Koordinaten x_i im Grunddreieck A und x_i' im Mittendreieck G. Dann hat der Komplementpunkt Y zu X die Koordinaten $y_i' = x_i$, der Antikomplementpunkt Z zu X die Koordinaten $z_i = x_i'$.

Die *Transformationsgleichungen*[2]) sind:

$$g_i x_i' = -g_i x_i + g_k x_k + g_l x_l = X_i; \quad 2 g_i x_i = g_k x_k' + g_l x_l' = X_k + X_l;$$

für Linienkoordinaten:

$$u_i/g_i = -u_i'/g_i + u_k'/g_k + u_l'/g_l; \quad 2u_i'/g_i = u_k/g_k + u_l/g_l.$$

Ist X_0 der Richtpunkt der Geraden $XYZG$, so gelten folgende Beziehungen:

$$(G X_0 X Y) = -2, \quad (XYGZ) = -1, \quad (XZYX_0) = -1.$$

Die letzte lautet in Worten: Die von einem Punkte X und seinem Antikomplementpunkt Z begrenzte Strecke wird durch den Komplementpunkt Y halbiert.

14. Nicht minder wichtig als die soeben behandelte lineare Transformation ist *eine quadratische Verwandtschaft*, die in jedem Dreieck durch die absolute Gerade definiert werden kann, die Verwandtschaft,

---

1) Emil Hain, Archiv d. Mathem. u. Physik (2) **3**, 1886.
C. G. Reuschle, Zeitschrift für Mathem. u. Physik. **11**, 1866.

2) Diese sind so zu bestimmen, daß G und g in beiden Dreiecken A und G dieselben Koordinaten haben.

die das Grunddreieck A zum Hauptdreieck und die absolute Gerade g zu einer Doppelgeraden hat, also durch die Gleichungen $u_i v_i = g_i^2$ dargestellt wird. Die drei anderen Doppelgeraden bilden das zur absoluten Geraden harmonisch assoziierte Dreiseit: das Mittendreieck G. Je zwei Gegengeraden u und v schneiden jede Seite a_i des Grunddreiecks in zwei homologen Punkten einer Involution, deren Doppelpunkte die Mitte G_i und der Richtpunkt der Seite a_i sind, also in zwei Punkten, die zur Seitenmitte g_i symmetrisch liegen. Daher heißen u und v *Seitensymmetriegeraden.*[1])

Indem wir jede Gerade durch ihren Dreieckspol ersetzen, erhalten wir zu dieser Geradentransformation die folgende Punkttransformation: $x_i y_i = 1/g_i^2$. Doppelpunkte sind der Schwerpunkt G und die ihm harmonisch assoziierten Punkte.

Projizieren wir je zwei homologe Punkte X und Y aus der Ecke A_i in zwei Punkte der Seite a_i, so liegen auch diese symmetrisch zur Seitenmitte G_i. Daher die Bezeichnungen[2]): *Seitengegenpunkte. Isotome Verwandtschaft.* Zwei Punkte oder Geraden, deren Koordinaten die Gleichung $x_i' y_i' = 1/g_i^2$ oder $u_i' v_i' = g_i^2$ erfüllen, sind Seitengegenpunkte oder Seitensymmetriegeraden im Mittendreieck.

15. Indem wir die lineare Verwandtschaft der Nr. 13 und die quadratische der Nr. 14 vereinigen, erhalten wir eine neue quadratische (*die komplementisotome*) *Verwandtschaft* mit den Gleichungen $x_i y_i' = 1/g_i^2$, $u_i v_i' = g_i^2$.

Für den Punkt $Y(y_i')$ und die Gerade $v(v_i')$ gelten (bei gegebenem X und u) folgende einfachen Konstruktionen:

Wir projizieren X aus den Ecken A_i des Grunddreiecks auf die Seiten $G_k G_l$ des Mittendreiecks und die so erhaltenen Punkte[3]) aus den Ecken G_i in den Punkt Y. Wir projizieren die Schnittpunkte $(u \cdot a_i)$ aus A_i auf $G_k G_l$. Die so erhaltenen Punkte liegen auf der Geraden v.[4])

16. Eine Anwendung von diesen Verwandtschaften kann man machen, um die Steinerschen Ellipsen als Bilder der absoluten Geraden und des Schwerpunktes, ferner um den Mittelpunkt eines In- oder Umkegelschnittes zu bestimmen. In dieser Hinsicht seien folgende Sätze mitgeteilt: Zwischen dem Brianchonschen[5]) Punkte X und dem Mittel-

1) F. Bücking, Archiv der Mathem. u. Physik (2) **16**. 1898.

2) W. Fuhrmann, Synthetische Beweise planimetrischer Sätze. Berlin 1890. S. 57.

3) Das sind die Mitten der Scheitelgeraden $A_i X$, diese gemessen von der Ecke A_i bis zur Seite a_i.

4) Die Gerade v verbindet die Mitten der Diagonalen des Vierseits $a_1 a_2 a_3 u$: Die Gaußsche Gerade des Vierseits.

5) Brianchon-Punkt des Kegelschnittdreiseits. Die Beziehung zwischen einem Inkegelschnitt und seinem Brianchon-Punkt ist die der Nr. 8.

punkte Y eines Inkegelschnitts besteht die komplement-isotome Verwandtschaft. Ein Punkt und der Mittelpunkt seiner konischen Polare (in bezug auf das Grunddreieck) sind Seitengegenpunkte im Mittendreieck.

3. *Der Lehrsatz von Feuerbach.* — 17. Nach dem vorletzten Satze hat ein Inkegelschnitt, dessen Mittelpunkt die Koordinaten y_i im Grunddreieck und y_i' im Mittendreieck hat, die Gleichung:

$$\varphi(uu) \equiv \sum g_i^2 y_i' u_k u_l = 0. \tag{1}$$

Er schneidet die absolute Gerade im Punktepaar:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\varphi(ug)]^2 - \varphi(uu)\cdot\varphi(gg) \equiv \sum \beta_{ik} u_i u_k = 0, \quad \text{worin} \\ \beta_{ii} = y_i^2, \quad -2\beta_{kl} = (-g_i^2 y_i^2 + g_k^2 y_k^2 + g_l^2 y_l^2)/g_k g_l. \end{array} \right. \tag{2}$$

Die Koordinaten y_i kommen hier nur im Quadrat vor, d. h.: Die vier Inkegelschnitte, deren Mittelpunkte harmonisch assoziiert sind, sind homothetisch.

18. Nebenbei sei erwähnt: Soll das Punktepaar (2) einer Involution angehören, d. h. sich selbst konjugiert sein in bezug auf einen Kegelschnitt $b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = 0$, so muß die Invariante $\sum \beta_{ik} b_{ik}$ verschwinden, mithin die Gleichung gelten: $b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = 0$. Es folgt der Satz[1]): Die Mittelpunkte derjenigen Inkegelschnitte, deren Richtpunkte einer Involution angehören, liegen auf *dem* Polkegelschnitt des Grunddreiecks, der durch die Doppelpunkte der Involution geht.

19. Durch die Punkte (2) und die Ecken G_i des Mittendreiecks geht der folgende Kegelschnitt:

$$g_1 y_1^2 x_2' x_3' + g_2 y_2^2 x_3' x_1' + g_3 y_3^2 x_1' x_2' = 0. \tag{3}$$

Für das Mittendreieck als Koordinatendreieck hat der Inkegelschnitt (1) die folgende Ordnungsgleichung:

$$\left[\sum g_i (g_k y_k - g_l y_l)^2 \cdot x_i'\right] \cdot \left[\sum g_i x_i'\right] - g_1 g_2 g_3 \cdot \sum g_i y_i^2 x_k' x_l' = 0. \tag{4}$$

Zwei homothetische Kegelschnitte haben außer der absoluten Geraden noch eine (wesentliche) Schnittsehne, die man als ihre Radikalachse bezeichnen kann. Für die Kegelschnitte (3) und (4) hat diese die Koordinaten $u_i' = g_i(g_k y_k - g_l y_l)^2$. Diese Werte u_i' erfüllen die Klassengleichung des Kegelschnittes (3): $\sum \sqrt{g_i y_i^2 u_i'} = 0$, d. h. die Kegelschnitte (3) und (4) berühren sich.

Die gemeinsame Tangente (Radikalachse) hat im Grunddreieck die Koordinaten:

$$u_i = g_i/(g_k y_k - g_l y_l).$$

---

1) Die Mittelpunkte der gleichseitigen Inhyperbeln liegen auf dem Polkreis des Dreiecks.

Sie berührt die Steinersche Inellipse; denn ihre Seitensymmetriegerade mit den Koordinaten $v_i = g_i(g_k y_k - g_l y_l)$ geht durch den Schwerpunkt G — auch durch den Mittelpunkt $Y(y_i)$ des Inkegelschnittes (1 oder 4). Das *Ergebnis* lautet:

Jeder Umkegelschnitt des Mittendreiecks berührt die vier zu ihm homothetischen Inkegelschnitte des Grunddreiecks. Die vier gemeinsamen Tangenten berühren auch die Steinersche Inellipse. Ihre Seitensymmetriegeraden gehen — außer durch den Schwerpunkt — durch die Mittelpunkte der vier Inkegelschnitte.

Ganz abgesehen davon, daß wir die unendlich ferne Gerade durch die allgemeine absolute Gerade ersetzt haben, ist dieser Satz offenbar eine Erweiterung des bekannten Feuerbachschen Satzes, nach dem der Umkreis des Mittendreiecks, der sogenannte Feuerbachsche Kreis des Grunddreiecks, dessen Inkreise berührt.

4. *Der Lehrsatz von Tucker.*[1]) — 20. Es gibt ∞^1 viele Dreiecke F, die bei gegebenem Ähnlichkeitspunkt zum Grunddreieck A ähnlich liegen. Jedes dieser Dreiecke schneidet das Grunddreieck — außer in drei Punkten der absoluten Geraden — in sechs Punkten eines Kegelschnittes. Die so erhaltenen ∞^1 Kegelschnitte sollen etwas näher betrachtet werden.

Die Seiten eines Dreiecks F_λ seien: $f_i = g(x) + \lambda_i x_i = 0$. Das Kollineationszentrum von F_λ und A hat die Koordinaten $x_i = 1/\lambda_i$, ist also ein fester Punkt P, wenn wir setzen: $1/\lambda_i = p_i/\lambda$. Dann lauten die obigen Gleichungen:

$$f_i = g(x) + \lambda \cdot x_i/p_i = 0.$$

Durch die neun Schnittpunkte der Dreiecke F_λ und A geht jede Kurve 3. Ordnung

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 - \varrho \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$$

hindurch. Für $\varrho = \lambda^3/p_1 p_2 p_3$ zerfällt diese in die absolute Gerade $g(x) = 0$ und den gesuchten Kegelschnitt:

$$\mathsf{T}_\lambda \equiv g(x) \cdot [g(x) + \lambda\pi(x)] + \lambda^2 \cdot \mathsf{P}(xx) = 0,$$

worin

$$\pi(x) \equiv \sum x_i/p_i = 0 \quad \text{und} \quad \mathsf{P}(xx) \equiv \sum x_k x_l/p_k p_l = 0$$

die gerade und die konische Polare des Punktes P sind. Also:

Die Kegelschnitte T liegen homothetisch zur konischen Polare P des Ähnlichkeitspunktes P. Die Radikalachsen sind seiner geraden Polare π parallel.[2])

1) E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik II. S. 71. Leipzig, 1902.

2) Die Mittelpunkte der Kegelschnitte T liegen, wie die Rechnung ergibt, in einer Geraden.

21. Bildet man

$$\varphi_i = f_k + \lambda x_l/p_l = g(x) + \lambda(x_k/p_k + x_l/p_l) = f_l + \lambda \cdot x_k/p_k,$$

so gehen die Geraden $\varphi_i = 0$ durch die Schnittpunkte $[f_k \cdot a_l]$ und $[f_l \cdot a_k]$, bestimmen also auch jene sechs Punkte auf den Seiten des Grunddreiecks, durch die der Kegelschnitt T_λ hindurchgeht.

Das Dreieck Φ liegt perspektivisch zum Grunddreieck; Kollineationszentrum ist P, Kollineationsachse jedoch nicht die absolute Gerade g, sondern die Radikalachse $[g(x) + \lambda\pi(x) = 0]$ von T_λ und P. Hingegen liegt Φ ähnlich zum Dreieck, das dem Punkte P harmonisch assoziiert ist, zum Ecktangentendreieck der konischen Polare P. Ähnlichkeitspunkt ist P.

22. Indem wir die Diskriminante der in λ quadratischen Gleichung $\mathsf{T}_\lambda = 0$ gleich Null setzen, erhalten wir als *wesentliche Enveloppe der Kegelschnitte* T — neben der doppelt zu zählenden absoluten Geraden g — den Kegelschnitt:

$$\pi^2(x) - 4\mathsf{P}(xx) = \sum x_i^2/p_i^2 - 2\sum x_k x_l/p_k p_l = 0,$$

d. i. die konische Polare $\Pi(xx)$ der Geraden π.

23. Für $\lambda = \infty$[1]) ergibt sich als Dreieck F_λ das Grunddreieck A und als Kegelschnitt T_∞ die konische Polare P. Das Dreieck A spielt für unsere Betrachtungen keine besondere Rolle in dem System der Dreiecke F. Wie zu ihm, erhalten wir zu jedem Dreieck F ein System von ∞^1 Kegelschnitten, im ganzen also, als Erzeugnis je zweier Dreiecke F_λ und F_μ die ∞^2 Kegelschnitte:

$$\mathsf{T}_{\lambda\mu} \equiv g^2(x)\cdot(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) + g(x)\cdot\pi(x)\cdot\lambda\mu(\lambda+\mu) + \mathsf{P}(xx)\cdot\lambda^2\mu^2 = 0.$$

Alle diese sind zu einander homothetisch, alle ihre Radikalachsen sind parallel. Für $\mu = \lambda$ wird $\mathsf{T}_{\lambda\lambda}$ die konische Polare P_λ von P bez. F_λ:

$$\mathsf{P}_\lambda \equiv g^2(x)\cdot 3 + g(x)\,.\,\pi(x)\cdot 2\lambda + P(xx)\cdot\lambda^2 = 0.$$

Für $\lambda =$ const. erhält man als (wesentliche) Enveloppe der $\mathsf{T}_{\lambda\mu}$ einen Kegelschnitt Π_λ, der im Sinne der Nr. 8 zu P im Dreieck F_λ gehört:

$$\Pi_\lambda \equiv -[g^2(x)\cdot 3 + g(x)\cdot\pi(x)\cdot 2\lambda] + \Pi(xx)\cdot\lambda^2 = 0.$$

Die Kegelschnitte P_λ wie auch Π_λ haben zur Enveloppe das imaginäre Geradenpaar:

$$\Pi(xx) + \mathsf{P}(xx) = \sum x_i^2/p_i^2 - \sum x_k x_l/p_k p_l = 0.$$

Es sind dieses die von P aus an Π und P gelegten Tangenten.

---

1) $\lambda = 0$ liefert die absolute Gerade.

24. *Unter den Dreiecken F und Φ befindet sich je ein Nulldreieck.* Daraus folgt:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt P die Parallelen zu den Seiten des Grunddreiecks, so schneiden diese die jeweils beiden anderen Seiten in zusammen sechs Punkten eines Kegelschnittes L'.

Man erhält einen zweiten Kegelschnitt L'', wenn man die Geraden durch den Punkt P parallel zu den Ecktangenten seiner konischen Polare P *zieht. Diese und die beiden Kegelschnitte L' und L'' sind homothetisch.*

Man findet ferner:

Der Mittelpunkt von L'' ist der Punkt P selber; der von L' liegt in der Mitte zwischen P und dem Mittelpunkt U von P.

25. *Ist P der Lemoinesche Punkt, also* P *der Umkreis und Π die Brocardsche Ellipse des Grunddreiecks, so werden die Kegelschnitte* T_λ *zu den Tuckerschen, L' und L'' zu den Lemoineschen Kreisen des Grunddreiecks. Es ist also die Brocardsche Ellipse die Enveloppe der Tuckerschen Kreise.*

Zweiter Abschnitt: Das Dreieck und der absolute Kegelschnitt.

1. *Der absolute Kegelschnitt.* — 26. Wir wenden uns nunmehr dem Falle zu, daß das absolute Gebilde in einem allgemeinen Kegelschnitt besteht, der also weder in ein Punktepaar noch in ein Geradenpaar zerfallen ist. Seine Gleichungen seien:

$$\Phi = \sum \alpha_{ik} u_i u_k = 0, \qquad F = \sum a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Die Determinanten $|\alpha_{ik}|$ und $|a_{ik}|$ der (reellen) Koeffizienten sollen unserer Absicht gemäß nicht verschwinden. Weiter soll über die Koeffizienten α_{ik} nichts vorausgesetzt werden; denn das hieße ja ein besonderes und nicht ein beliebiges Grunddreieck (oder Koordinatendreieck) betrachten, da doch Φ als absolut gegebener Kegelschnitt nur die eine besondere Eigenschaft haben kann, daß er zerfällt.[1])

27. Da die hier folgenden Sätze der Metrik entnommen sind, so tritt in ihnen der absolute Kegelschnitt vorwiegend als Klassenkurve auf.[2])

Mit Hilfe von Φ definieren wir: Zwei Geraden heißen senkrecht zu einander, wenn sie bezüglich Φ konjugiert sind. Winkel α zweier Geraden SA_1 und SA_2 heißt das Produkt aus einer Konstanten[3]) und dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, das diese Geraden mit den von S an Φ gehenden Tangenten ST_1 und ST_2 bilden. Wir können

---

1) Ein Kegelschnitt hat keine absolute Invariante.

2) Vgl. die 4. Anmerkung auf S. 3.

3) $\frac{1}{2}\sqrt{-1}$ für das Kreispunktepaar.

und wollen im folgenden, da es sich um Gleichheit von Winkeln handelt, von der Konstanten und dem Logarithmus absehen und kürzer setzen $\alpha = S[A_1 A_2] = S(T_1 T_2 A_1 A_2)$.

Was dann unter Halbierenden eines Winkels, Höhen eines Dreiecks zu verstehen ist, ergibt sich von selbst.

Der Pol einer Geraden bezüglich Φ heiße ihr absoluter Pol.

2. *Die Höhen und Nebenhöhen.* — 28. Die absoluten Pole der Seiten a_i des Grunddreiecks sind die Punkte $P_i : x_k = \alpha_{ik}$. Die *Höhen* $A_i P_i$: $x_k : x_l = \alpha_{ik} : \alpha_{il} = 1/\alpha_{il} : 1/\alpha_{ik}$ schneiden sich im *Höhenpunkt*

$$H: \; 1/\alpha_{23} \quad 1/\alpha_{31} \quad 1/\alpha_{12}.$$

Dieser ist nur abhängig von den Koeffizienten $\alpha_{kl} (k \neq l)$ der Produkte $u_k u_l$, nicht von denen α_{ii} der Quadrate u_i^2, bleibt also Höhenpunkt, wenn man statt Φ irgend einen Kegelschnitt

$$\varphi \equiv \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2 + 2\alpha_{23} u_2 u_3 + 2\alpha_{31} u_3 u_1 + 2\alpha_{12} u_1 u_2 = 0$$

als absolutes Gebilde wählt.[1]) Der Punkt H wird also weniger zu jedem einzelnen φ als zu dem ganzen System der φ in engen Beziehungen stehen. In der Tat ist H der einzige Punkt, der doppelt gezählt als ein Kegelschnitt φ zu betrachten ist.

29. *Fällt man von den Höhenfußpunkten die Lote auf die jeweils beiden anderen Seiten des Grunddreiecks, so liegen die Fußpunkte dieser sechs „Nebenhöhen" auf einem Kegelschnitt.*

Der Beweis ergibt sich als einfache Anwendung des Carnotschen Satzes.[2]) Die Gleichung des Kegelschnittes lautet[3]):

$$\sum \alpha_{kl}^2 x_i^2 - x_k x_l (\alpha_{kl}^2 + \alpha_{ik}^2 \alpha_{il}^2)/\alpha_{kl} = 0.$$

30. Zu den Höhen $P_i A_i$ erhält man durch positive Permutation noch zwei andere Geradentripel $m_i = P_i A_{i+1}$ und $n_i = P_i A_{i+2}$, wobei man statt $i+3$ wieder i zu setzen hat.

Diese beiden Dreiseite m und n schneiden sich außer in

---

1) W. Fr. Meyer, Über die Höhen des Tetraeders. Archiv der Math. und Physik (3) 8, 138. 1904.

2) W. Fr. Meyer, Über geometrische Sätze von der Natur des Pascalschen Satzes. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 9, 91. 1900.

3) Zerfällt der absolute Kegelschnitt in ein Punktepaar, so geht diese Gleichung, wenn wir die Bezeichnungen der Nr. 49 benutzen, über in:

$$\sum P_i^2 g_i x_i \cdot \sum g_i x_i - \varrho \cdot \sum p_i x_k x_l = 0,$$

worin ϱ eine Konstante. Der durch sie dargestellte Kegelschnitt ist also ein Kreis: der Taylorsche Kreis des Grunddreiecks. E. Pascal, Repertorium II. S. 71.

$A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, P_3$ in drei Punkten Q_i.[1]) Das Dreieck Q liegt perspektiv zum Grunddreieck. Kollineationszentrum ist der Punkt

$$U: \alpha_{11}\alpha_{23} \quad \alpha_{22}\alpha_{31} \quad \alpha_{33}\alpha_{12}.$$

3. *Orthologische Dreiecke.* — 31. *Gehen die Lote, die man von den Ecken eines Dreiecks auf die entsprechenden Seiten eines zweiten Dreiecks fällt, durch einen Punkt, so schneiden sich auch die Lote aus den Ecken des zweiten Dreiecks auf die entsprechenden Seiten des ersten Dreiecks in einem Punkte.*

Sind A und B die beiden Dreiecke des Lehrsatzes, P und Q die Dreiecke, deren Ecken P_i und Q_i die absoluten Pole der Seiten $A_k A_l$ und $B_k B_l$ sind, so besagt der Lehrsatz: Die Dreiecke A und Q einerseits, B und P andererseits sind immer und nur gleichzeitig perspektiv gelegen.

Die Seiten und Ecken von A und B mögen die Gleichungen haben:

$$A_k A_l : x_i = 0, \qquad B_k B_l : y_i = 0,$$
$$A_i : u_i = 0, \qquad B_i : v_i = 0.$$

Die Transformationsgleichungen seien:

$$y_i = \sum_k l_{ik} x_k, \qquad x_i = \sum_k \lambda_{ki} y_k,$$
$$u_i = \sum_k l_{ki} v_k, \qquad v_i = \sum_k \lambda_{ik} u_k,$$

die Gleichungen des absoluten Kegelschnittes:

$$\Phi = \sum \alpha_{ik} u_i u_k = \sum \beta_{ik} v_i v_k = 0.$$

Dann liegen die Dreiecke A und Q, bezw. B und P perspektiv, wenn

$$\triangle_1 = [\sum \lambda_{k2}\beta_{1k} \cdot \sum \lambda_{k3}\beta_{2k} \cdot \sum \lambda_{k1}\beta_{3k}] : [\sum \lambda_{k3}\beta_{1k} \cdot \sum \lambda_{k1}\beta_{2k} \cdot \sum \lambda_{k2}\beta_{3k}] = 1,$$

bezw.

$$\triangle_2 = [\sum l_{2k}\alpha_{1k} \cdot \sum l_{3k}\alpha_{2k} \cdot \sum l_{1k}\alpha_{3k}] : [\sum l_{3k}\alpha_{1k} \cdot \sum l_{1k}\alpha_{2k} \cdot \sum l_{2k}\alpha_{3k}] = 1,$$

worin sich die Summation überall auf $k = 1, 2, 3$ bezieht.

Unter Beziehung auf alle sechs Koordinaten u_i, v_i ist die Gleichung von Φ:

$$\sum_{ikl} \alpha_{ik} l_{lk} u_i v_l = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{ikl} \beta_{lk} \lambda_{ki} u_i v_l = 0.$$

Aus der Identität beider Formen folgt die Koeffizientengleichheit und daraus die Identität:

$$\triangle_1 \cdot \triangle_2 = 1.$$

1) In der Elementargeometrie sind das die zweiten Endpunkte der Umkreisdurchmesser $A_i U$.

Da somit die beiden Größen $\triangle$ nur gleichzeitig den Wert $+1$ annehmen können, ist der obige Lehrsatz bewiesen. Da dasselbe auch für den Wert -1 gilt, so folgt noch der Satz:

Schneiden die von den Ecken eines Dreiecks A auf die entsprechenden Seiten eines Dreiecks B gefällten Lote die Seiten a_i in drei Punkten einer Geraden, so liegen auch die Schnittpunkte der Lote aus den Ecken B_i auf die Seiten a_i mit den Seiten b_i in einer Geraden.

4. *Die Winkelhalbierenden. Die isogonale Verwandtschaft.* — 32. Aus der Definition des Winkels (Nr. 27) folgen leicht die beiden Eigenschaften der Halbierenden eines Winkels, daß sie dessen Schenkel harmonisch trennen und aufeinander senkrecht stehen, Eigenschaften, durch die umgekehrt die Winkelhalbierenden geradezu definiert werden können.[1])

Daraus findet man, wenn

$$f^{(1)}(x) \equiv \sum f_i^{(1)} x_i = 0 \quad \text{und} \quad f^{(2)}(x) \equiv \sum f_i^{(2)} x_i = 0$$

die Schenkel eines Winkels sind, die Gleichung seiner Halbierungslinien:

$$[f^{(1)}(x)]^2/\Phi(f^{(1)}f^{(1)}) - [f^{(2)}(x)]^2/\Phi(f^{(2)}f^{(2)}) = 0.$$

Die drei Geradenpaare, die die Winkel eines Dreiseites f halbieren, schneiden sich in den vier Punkten:

$$[f^{(i)}(x)]^2 = \Phi(f^{(i)}f^{(i)}).$$

Für das Koordinatendreieck A folgt: Seine Winkelhalbierenden $w_i \equiv x_k^2/\alpha_{kk} - x_l^2/\alpha_{ll} = 0$ *schneiden sich in den vier harmonisch assoziierten Punkten J, deren Koordinaten die absoluten Werte* $\sqrt{\alpha_{ii}}$ *haben.*[2])

Diese vier Punkte, nur abhängig von den Koeffizienten α_{ii}, nicht $\alpha_{kl} (k \neq l)$, sind im Sinne der Nr. 28 die Doppelpunkte des folgenden Kegelschnittsystems: $\sum \alpha_{ii} u_i^2 + \sum \lambda_i u_k u_l = 0$, worin λ_i völlig beliebig.

33. Bestimmt man zu einem beliebigen Punkte Y die Polaren in bezug auf die obigen drei Geradenpaare w_i, so schneiden sich diese in einem Punkte Z. Die Geraden w_i trennen das Geradenpaar $A_i(YZ)$ harmonisch, halbieren also den Winkel $A_i[YZ]$.

Die Punkte Y und Z sind konjugiert in bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes $\sum \lambda_i w_i = 0$ oder des Büschels, das die vier Punkte $J(x_i^2 = \alpha_{ii})$ zu Grundpunkten hat; sie sind Gegenpunkte der *quadratischen Transformation*

$$y_i z_i = \alpha_{ii}.$$

---

1) Aus dieser Definition folgt leicht der Satz, daß die Seiten und Höhen eines Dreiecks die Winkel seines Höhenfußpunktdreiecks halbieren.

2) Damit diese Punkte reell sind, müssen die Koeffizienten α_{ii} gleiche Vorzeichen haben.

Die Geraden $A_i Y$ und $A_i Z$ heißen *isogonal* bez. $\sphericalangle A_i[A_k A_l]$, die Punkte Y und Z *Winkelgegenpunkte*; die Transformation wird als *isogonale Verwandtschaft* bezeichnet.[1])

34. Wie in der Elementargeometrie, so gelten auch hier die Sätze:

I. *Die Scheitelgeraden $A_i Y$ eines Punktes Y stehen senkrecht auf den Seiten des Fußpunktdreiecks*[2]), *das zu seinem Winkelgegenpunkt Z gehört.*

II. *Die Fußpunktdreiecke zweier Winkelgegenpunkte sind demselben Kegelschnitt einbeschrieben.*

35. Das Punktepaar (YZ) hat die Gleichung:

$$\sum_i y_i u_i \cdot \sum_k z_k u_k = \sum_{ik} y_i z_k u_i u_k = \sum \alpha_{ii} u_i^2 + \sum \beta_{kl} u_k u_l = 0,$$

d. h.:

Ein Punktepaar, dessen Gleichung in den Koeffizienten der quadratischen Glieder mit der Klassengleichung $\Phi \equiv 0$ des absoluten Kegelschnittes — bis auf einen Faktor natürlich — übereinstimmt, besteht aus zwei Winkelgegenpunkten.

Aus diesem Satze folgt, da die Brennpunkte eines Inkegelschnittes $\Psi = 0$ die Gleichung

$$\Phi(uu) - \lambda \Psi(uu) = \sum \alpha_{ii} u_i^2 + \sum \beta_{kl} u_k u_l = 0$$

haben, der andere Satz:

Die Brennpunkte eines dem Grunddreieck eingeschriebenen Kegelschnittes sind Winkelgegenpunkte.

Zerfällt der absolute Kegelschnitt in zwei Punkte, so sind diese nach obigem Satze Winkelgegenpunkte. Das Bild ihrer Verbindungslinie, der absoluten Geraden, ist daher ein Umkegelschnitt durch die absoluten Punkte, d. h. *der Umkreis* des Grunddreiecks.

36. Der isogonalen entspricht dual *die isotome Verwandtschaft*[3]):

$$u_i v_i = a_{ii}, \qquad y_i z_i = 1/a_{ii}.$$

Die Involution, die wir zu dieser nach Nr. 14 auf jeder Seite a_i erhalten, hat hier nicht die Seitenmitte G_i und den Richtpunkt von a_i, der hier nicht existiert, zu Doppelpunkten, sondern die „beiden Mittelpunkte“[4]) der Seite a_i. Homologe Punkte der Involution liegen zu jeder dieser Seitenmitten „symmetrisch“.

---

1) W. Fuhrmann a. a. O.

2) Die Fußpunkte der von P auf die Seiten a_i gefällten *Lote* bilden das Fußpunktdreieck von oder zu P.

3) In Nr. 14 war $F \equiv \sum a_{ik} x_i x_k = \left(\sum g_i x_i\right)^2; \quad a_{ii} = g_i^2$.

4) Diese beiden Seitenmitten entsprechen dual den beiden Halbierenden eines Winkels.

5. *Die Inkreise.* — 37. Nach Nr. 35 gehört zu jedem Paar von Winkelgegenpunkten ein Inkegelschnitt, der diese Punkte zu Brennpunkten hat. Zu den Doppelpunkten J erhält man so die vier Inkegelschnitte, die den absoluten Kegelschnitt doppelt berühren: *die vier Inkreise.* Sie haben die Gleichung:

$$(\alpha_{23} - \sqrt{\alpha_{22}\alpha_{33}})u_2 u_3 + (\alpha_{31} - \sqrt{\alpha_{33}\alpha_{11}})u_3 u_1 + (\alpha_{12} - \sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}})u_1 u_2 = 0.$$

Für die Wurzeln $\sqrt{\alpha_{kk}\alpha_{ll}} = \sqrt{\alpha_{kk}} \cdot \sqrt{\alpha_{ll}}$ sind nur die folgenden Kombinationen möglich: $+++$; $+--$; $-+-$; $--+$. Setzen wir daher $m_i = \alpha_{kl} - \sqrt{\alpha_{kk}\alpha_{ll}}$ und $n_i = \alpha_{kl} + \sqrt{\alpha_{kk}\alpha_{ll}}$, so lautet die *Gleichung des Inkreises*[1]):

$$J \equiv m_i u_k u_l + m_k u_l u_i + m_l u_i u_k = 0$$

und die *des i ten Ankreises:*

$$J^i \equiv m_i u_k u_l + n_k u_l u_i + n_l u_i u_k = 0.$$

38. *Die Brianchonschen (Gergonneschen) Punkte* der vier Inkreise sind:

$$B:\ 1/m_1\ \ 1/m_2\ \ 1/m_3. \quad B^i:\ x_i = 1/m_i\ \ x_k = 1/u_k\ \ x_l = 1/u_l.$$

Heißt J_k^i der Berührungspunkt von J^i mit der Seite a_k, so schneiden sich die Geraden $A_1J_1^1$, $A_2J_2^2$, $A_3J_3^3$ und A_iJ_i, $A_kJ_k^l$, $A_lJ_l^k$ in je einem Punkte. *Diese vier Nagelschen Punkte*:

$$N: 1/n_1\ \ 1/n_2\ \ 1/n_3. \quad N^i: x_i : x_k : x_l = 1/n_i : 1/m_k : 1/m_l$$

sind, da $m_i n_i = (\alpha_{kl} - \sqrt{\alpha_{kk}\alpha_{ll}})(\alpha_{kl} + \sqrt{\alpha_{kk}\alpha_{ll}}) = \alpha_{kl}^2 - \alpha_{kk}\alpha_{ll} = -a_{ii}$, die Seitengegenpunkte der Gergonneschen Punkte.

39. Wie in der Elementargeometrie, so liefern auch hier je zwei der Inkreise zwei *Ähnlichkeitspunkte.* Sind

$$Y \equiv [\textstyle\sum y_i u_i]^2 - y^2 \cdot \Phi = 0 \quad \text{und} \quad Z \equiv [\textstyle\sum z_i u_i]^2 - z^2 \cdot \Phi = 0$$

die Gleichungen zweier beliebigen Kreise, so ist die ihrer Ähnlichkeitspunkte:

$$z^2 Y - y^2 Z = [z \cdot \textstyle\sum y_i u_i + y \cdot \sum z_i u_i][z \cdot \sum y_i u_i - y \cdot \sum z_i u_i] = 0.$$

Diese Ähnlichkeitspunkte liegen nach ihrer Entstehung auf je zwei Tangenten, nach ihrer Gleichung auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte $Y(y_i)$ und $Z(z_i)$, der Zentralen der beiden Kreise. Und zwar trennen sie die Mittelpunkte harmonisch.

6. *Die Wallace-Linie.* — 40. *Fällt man von einem Punkte X die Lote $P_i X X_i$ auf die Seiten a_i des Grunddreiecks, so liegen die Fuß-*

1) *Die* Inkreise bestehen aus *dem* Inkreise und den drei Ankreisen.

punkte X_i nur dann in einer Geraden, wenn X der folgenden Kurve 3. Ordnung angehört[1]:

$$C \equiv (x_1\alpha_{12} - x_2\alpha_{11})(x_2\alpha_{23} - x_3\alpha_{22})(x_3\alpha_{31} - x_1\alpha_{33}) \\ - (x_3\alpha_{11} - x_1\alpha_{31})(x_1\alpha_{22} - x_2\alpha_{12})(x_2\alpha_{33} - x_3\alpha_{23}) = 0.$$

Diese Kurve ist für die isogonale Verwandtschaft anallagmatisch, denn die Fußpunktdreiecke zweier Winkelgegenpunkte können nach Satz II von Nr. 34 nur gleichzeitig in je eine Gerade ausarten.

Die Kurve C geht durch die neun Schnittpunkte der beiden Dreiseite m und n (Nr. 30), also durch die Punkte A_i, P_i und Q_i. Die zu einem Punkte X von C gehörige Fußpunktgerade $x = X_1X_2X_3$ wird als seine *Wallace-Linie*[2]) bezeichnet.

41. Aus Satz I von Nr. 34 folgt: *Die Wallace-Linie eines Punktes von C hat dessen Winkelgegenpunkt zum absoluten Pol.*

Solange der absolute Kegelschnitt nicht ausartet, hat auch die Umkehrung einen Sinn: Die absolute Polare eines Punktes von C ist die Wallace-Linie seines Winkelgegenpunktes.

Als *Enveloppe aller Wallace-Linien* erhält man also die Kurve Γ, die der Kurve C in einem Polarfeld entspricht, das den absoluten Kegelschnitt zum Ordnungskegelschnitt hat. Ihre Gleichung ist:

$$\Gamma \equiv (u_1a_{12} - u_2a_{11})(u_2a_{23} - u_3a_{22})(u_3a_{31} - u_1a_{33}) \\ - (u_3a_{11} - u_1a_{31})(u_1a_{22} - u_2a_{12})(u_2a_{33} - u_3a_{23}) = 0.$$

Zerfällt aber der absolute Kegelschnitt in ein Punktepaar, so versagen die vorstehende Gleichung[3]) und ihre Ableitung. Doch kann man auch dann folgendermaßen verfahren. Die Gerade $\sum u_i x_i = 0$ schneide die Seiten a_i des Grunddreiecks in den Punkten X_i. Die in X_i auf a_i errichteten Lote X_iP_i schneiden sich in einem Punkte X, wenn:

$$\Gamma' \equiv \begin{vmatrix} u_2\alpha_{12} + u_3\alpha_{13} & -u_2\alpha_{11} & -u_3\alpha_{11} \\ -u_1\alpha_{22} & u_3\alpha_{23} + u_1\alpha_{21} & -u_3\alpha_{22} \\ -u_1\alpha_{33} & -u_2\alpha_{33} & u_1\alpha_{31} + u_2\alpha_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Ist $\triangle = |\alpha_{ik}|$ die Determinante des absoluten Kegelschnittes $\Phi = 0$, so ist $\Gamma = \triangle \cdot \Gamma'$. Diese Gleichung lehrt, daß Γ für $\triangle = 0$ identisch verschwindet. Die Gleichung $\Gamma' = 0$ jedoch versagt in diesem Falle

1) Nach Graßmanns Methode zur Erzeugung von Kurven dritter Ordnung. E. Pascal, Repertorium II. S. 183.

2) Die frühere Bezeichnung: „Simsonsche Gerade" ist falsch. Moritz Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathem. III. S. 552 ff

3) Weil dann $a_{ik} = g_i \cdot g_k$ ist.

nicht; sie stellt auch dann noch eine Kurve dritter Klasse, die *Steinersche Hypozykloide* dar.

42. *Was wird aus der Kurve C, wenn der absolute Kegelschnitt in ein Punktepaar zerfällt?*

Weil dann die absoluten Pole P_i von a_i in einer Geraden, der absoluten g, liegen, so erfüllt jeder Punkt X von g die Bedingung, daß seine Fußpunkte X_i in einer Geraden (nämlich wiederum g) liegen. Die absolute Gerade spaltet sich daher von der Kurve C ab; da diese anallagmatisch für die isogonale Verwandtschaft war (Nr. 40), so ist ihr anderer Bestandteil der Umkreis (Nr. 35) des Grunddreiecks; d h. *der Ort der (eigentlichen) Punkte, deren Fußpunkte in einer Geraden liegen, ist der Umkreis des Grunddreiecks.*

Aus Nr. 41 folgt noch: Die Wallace-Linien zweier Durchmesser-Endpunkte stehen aufeinander senkrecht.

43. Von den neun Schnittpunkten der drei Lote XP_i mit den Seiten a_i haben wir nur die Punkte $[XP_i \cdot a_i]$ betrachtet. Durch Permutation erhält man noch weitere Sätze, von denen nur der folgende erwähnt sei:

Es gibt drei Punkte auf der Kurve C — bei absolutem Punktepaar einen, den sogen. *Tarryschen*[1]) *Punkt* auf dem Umkreise — von der Eigenschaft, daß jene neun Schnittpunkte zu je dreien außer auf den genannten Seiten und Loten auf drei weiteren Geraden liegen.

7. *Die Spiegelung eines Punktes und einer Geraden an den Seiten des Dreiecks.*[2]). — 44. Auf den drei Loten XP_iX_i, die von einem Punkte X auf die Seiten a_i gefällt werden, kann man durch die bereits bekannten Punkte drei projektive Punktreihen definieren:

$$(P_1 X X_1 X_{\rm I}) = (P_2 X X_2 X_{\rm II}) = (P_3 X X_3 X_{\rm III}) = \lambda.$$

Zwei besondere dieser Punkttripel $X_{\rm I} X_{\rm II} X_{\rm III}$ werden gebildet von den Fußpunkten $X_i (\lambda = 1)$ und den *Spiegelpunkten von X in bezug auf die Seiten* $a_i (\lambda = 2)$.

Lassen wir λ fest und verlangen wir, daß dann die Punkte $X_{\rm I} X_{\rm II} X_{\rm III}$ in einer Geraden liegen, so erfüllt der Punkt X die Kurve:

$$E_\lambda \equiv \Delta \cdot \lambda x_1 x_2 x_3 - \sum_i x_i P_i(xx) = 0.$$

Darin sind $P_i(xx) = 0$ die Gleichungen der drei Umkegelschnitte, die den Geraden $P_k P_l \left(\sum_m a_{im} x_m = 0\right)$ isogonal entsprechen. Nach obigem ist $E_{(\lambda=1)} = C$.

1) E. Vigarié, Association Française **16**. 1887. Toulouse.

2) E. Hain, Archiv der Math. u. Physik. **69**. 1883.

Artet der absolute Kegelschnitt aus, wird $\Delta = 0$, so sind alle Kurven E_λ und C miteinander identisch. Dann wird $\sum x_i P_i(xx) \equiv g(x) \cdot P(xx)$, wo $P(xx) = 0$ die Gleichung des Umkreises ist.

45. *Die Spiegelbilder einer Geraden* $k(x) = 0$ *in bezug auf die Seiten* a_i sind die Geraden:

$$s_i(x) \equiv \alpha_{ii} k(x) - 2 x_i \sum_k \alpha_{ik} k_k = 0.$$

Das Dreiseit s liegt stets perspektiv zum Grunddreieck, weil sich homologe Seiten auf k schneiden. Kollineationszentrum ist der Punkt $X: x_i = \alpha_{ii} / \sum_k \alpha_{ik} k_k$, also der Winkelgegenpunkt zum absoluten Pol $K[x_i = \sum_k \alpha_{ik} k_k]$ von k.

Für den Fall eines absoluten Punktepaares liegen alle absoluten Pole K auf der absoluten Geraden, also alle Kollineationszentren X auf dem Umkreise des Dreiecks A.

8. *Die Brocardschen Punkte.* — 46. Es soll in der Ebene des Grunddreiecks ein Punkt $\Omega(x_i)$ gesucht werden, für den

$$\sphericalangle A_2[A_3\Omega] = \sphericalangle A_3[A_1\Omega] = \sphericalangle A_1[A_2\Omega] = \omega.$$

Indem man diese drei Winkel als Doppelverhältnisse berechnet, findet man $(\omega + 1)/(\omega - 1) = m_i/x_i$, wenn $m_i = 0$ die Seiten des einen Dreiecks M sind, das dem Grunddreieck A unter rechtem Winkel umbeschrieben ist (Nr. 30). Es folgt daraus: *Der gesuchte Punkt* Ω *ist ein Doppelpunkt der durch die Gleichungen* $m_i = x_i(\omega + 1)(\omega - 1)$ *dargestellten Kollineation, in der die Dreiecke* M *und* A *einander entsprechen. Die Aufgabe hat also drei Lösungen.*

Diese drei Punkte Ω liegen auf den Kegelschnitten $m_k y_l - m_l y_k = 0$, die durch die Punkte M_i, A_i, A_i gehen und in A_i die Seite a_l berühren.

47. *Die Winkelgegenpunkte* Ω' *der Punkte* Ω erfüllen die Bedingungen

$$\sphericalangle A_2[\Omega' A_1] = \sphericalangle A_3[\Omega' A_2] = \sphericalangle A_1[\Omega' A_3] = \omega.$$

Sie sind die Doppelpunkte des Grunddreiecks und des anderen Dreiecks N, das dem Dreieck A unter rechtem Winkel umbeschrieben ist (Nr. 30). Sie liegen auf drei Kegelschnitten, die, wie die obigen, durch je zwei Ecken A gehen, aber in dem jeweils anderen Punkte eine Dreiecksseite berühren.

48. *Wenn der absolute Kegelschnitt in ein Punktepaar ausartet*, so erfüllen dessen Punkte die obigen Winkelbeziehungen, d. h. die Dreiecke M und N sind dem Dreiecke A ähnlich.

Von den sechs Punkten Ω *und* Ω' *bleiben als wesentlich dann nur*

zwei: die beiden Brocardschen Punkte des Grunddreiecks. Sie sind also die Ähnlichkeitspunkte der Dreiecke M und A, N und A. Die obigen Kegelschnitte werden zu den sogenannten *Beikreisen*, ω heißt der *Brocardsche Winkel* des Grunddreiecks.

Dritter Abschnitt: Das Dreieck und das absolute Punktepaar.

1. *Das absolute Punktepaar.* — 49. In dem letzten Abschnitt haben wir einige Sätze behandelt, für die es im wesentlichen gleichgültig ist, ob der absolute Kegelschnitt nicht ausgeartet ist oder doch. In einzelnen Fällen war es besonders interessant, zunächst einen allgemeinen Kegelschnitt zugrunde zu legen und an der Hand des Resultates erst zu prüfen, was eintritt, wenn der absolute Kegelschnitt in ein Punktepaar zerfällt.

Diese Methode empfiehlt sich aber nicht immer, weil manche Sätze der parabolischen Geometrie sich nicht so ohne weiteres auf die hyperbolisch-elliptische Geometrie übertragen lassen. Es handelt sich da vornehmlich um Sätze, in denen das Parallelenaxiom eine Rolle spielt, oder in denen Kreise als Punktörter auftreten.

Es mag in den folgenden Sätzen die Annahme, daß der absolute Kegelschnitt zerfällt, hier und da noch überflüssig sein; für die meisten aber ist sie notwendig.

Durch das absolute Punktepaar $(K_1 K_2)$ *ist die absolute Gerade* g *und der Umkreis* P *des Grunddreiecks* A *bestimmt. Deren Gleichungen seien:*

$$g(x) \equiv \sum g_i x_i \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 = 0,$$
$$\mathsf{P}(xx) \equiv \sum p_i x_k x_l \equiv p_1 x_2 x_3 + p_2 x_3 x_1 + p_3 x_1 x_2 = 0.$$

Dann ist umgekehrt die des absoluten Punktepaares[1]):

$$\Phi(uu) \equiv p_1 g_2 g_3 u_1^2 + p_2 g_3 g_1 u_2^2 + p_3 g_1 g_2 u_3^2 - P_1 g_1 u_2 u_3 - P_2 g_2 u_3 u_1 - P_3 g_3 u_1 u_2 = 0,$$

wenn $P_i \equiv -p_i g_i + p_k g_k + p_l g_l$ gemäß Nr. 13.

50. *Die Gleichungen der isogonalen Verwandtschaft* sind nunmehr:

$$y_i z_i = \alpha_{ii} = p_i g_k g_l \quad \text{oder} \quad y_i z_i = p_i / g_i.$$

Da $P(p_i)$ nach Definition (Nr. 9) der Lemoinesche Punkt und $G(1/g_i)$ nach Nr. 12 der Schwerpunkt des Dreiecks A ist, so folgt:

Der Schwerpunkt und der Lemoinesche Punkt eines Dreiecks sind Winkelgegenpunkte.

---

1) Sie entsteht am einfachsten durch Elimination von x_i aus $\mathsf{P}(xx) = 0$, $g(x) = 0$, $u(x) = \Sigma u_i x_i = 0$. C. Schmidt, Zeitschrift für Math. u. Physik. **34.** 1889.

Der Mittelpunkt U des Umkreises hat die Gleichung $U \equiv \sum p_i P_i u_i = 0$, der Höhenpunkt (Nr. 28) $H \equiv \sum u_i/\alpha_{kl} \equiv \sum u_i/g_i P_i = 0$, d. h. *der Umkreismittelpunkt U und der Höhenpunkt H eines Dreiecks sind Winkelgegenpunkte.*

Zu beachten ist, daß jetzt der Satz gilt: Zwei Winkel, deren Schenkel aufeinander senkrecht stehen, sind gleich.[1]) Es folgt daher aus Satz I von Nr. 34: *Die Winkel, die die Scheitelgeraden eines Punktes bilden, sind gleich den Winkeln des Fußpunktdreiecks, das zu seinem Winkelgegenpunkt gehört.*

51. Wenn wir das Strahlenbüschel, dessen Zentrum U ist, mit der Involution, die es auf dem Umkreise ausschneidet, isogonal transformieren, so erhalten wir ein Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $A_1 A_2 A_3 H$, das auf der absoluten Geraden die zirkulare Involution[2]) ausschneidet, also aus *gleichseitigen Hyperbeln* besteht.

Die Mittelpunkte dieser gleichseitigen Umhyperbeln liegen auf dem Neunpunktekegelschnitt des Vierecks $A_1 A_2 A_3 H$, dem Feuerbachschen Kreise[3]) des Grunddreiecks A.

52. Unter den Umkreisdurchmessern hat der ein besonderes Interesse, der durch den Lemoineschen Punkt P geht: *der Brocardsche Durchmesser.* Ihm entspricht isogonal die gleichseitige Umhyperbel durch G: *die Kiepertsche Hyperbel.* Sie schneidet den Umkreis zum vierten Male im sogenannten *Tarryschen Punkte.* Die Gleichungen dieser Gebilde sind:

Der Brocardsche Durchmesser:	$\sum x_i (P_k - P_l)/p_i = 0.$
Die Kiepertsche Hyperbel:	$\sum (P_k - P_l)/g_i x_i = 0.$
Der Tarrysche Punkt[4]):	$\sum u_i/g_i (P_i^2 - P_k P_l) = 0.$

53. Im Anschluß an diese Sätze über gleichseitige Umhyperbeln seien noch folgende Sätze erwähnt: Die Umparabeln sind die isogonalen Bilder der Umkreistangenten. Die Mittelpunkte der gleichseitigen Inhyperbeln liegen auf dem Polkreis des Dreiecks (Nr. 18). Die eigent-

1) Die beiden Winkel seien $S_1[A_1 B_1]$ und $S_2[A_2 B_2]$, wo $A_1 B_1 A_2 B_2$ Punkte der absoluten Geraden $K_1 K_2$ sind. Nach Voraussetzung ist $(K_1 K_2 A_1 A_2) = -1 = (K_1 K_2 B_1 B_2)$. Durch Multiplikation mit $(K_1 K_2 A_2 B_1)$ folgt die Behauptung: $(K_1 K_2 A_1 B_1) = (K_1 K_2 A_2 B_2)$.

2) Deren Doppelpunkte die absoluten Punkte K_1 und K_2 sind.

3) Der Neunpunktekegelschnitt eines Vierecks in bezug auf eine Gerade g geht auch durch die Doppelpunkte der Involution, die das Viereck auf g bestimmt. Elfpunktekegelschnitt.

4) Die Identität dieses und des in Nr. 43 so genannten Punktes würde sich aus der Gleichheit ihrer Koordinaten ergeben.

lichen Brennpunkte der Inparabeln eines Dreiecks liegen auf seinem Umkreise (Nr. 35). Die Leitlinien der Inparabeln eines Dreiecks gehen durch seinen Höhenpunkt.[1])

2. *Metrische Koordinaten eines Punktes in der Ebene eines Dreiecks.* — 54. Wir haben bisher unseren Rechnungen projektive Koordinaten zugrunde gelegt. Diese können für einen Punkt X metrisch im wesentlichen — bis auf hinzutretende konstante Faktoren — proportional den Abständen des Punktes X von den Seiten a_i des Grunddreiecks gesetzt werden. Vom metrischen Standpunkte aus kann man einen Punkt X in der Ebene eines Dreiecks A noch durch andere Koordinaten festlegen. Sie werden nicht einfacher als die obigen sein für gewisse Fragen aber vor jenen einen Vorzug haben.

Als solche metrischen Koordinaten eines Punktes sollen insbesondere die Winkel betrachtet werden, die von den Scheitelgeraden des Punktes oder den Seiten seines Fußpunktdreiecks gebildet werden. Die isogonale Verwandtschaft wird hierbei eine Rolle spielen, da ja die Winkel an den Scheitelgeraden eines Punktes gleich den Winkeln vom Fußpunktdreieck seines Gegenpunktes sind.

Ferner sind die Abstände eines Punktes X von den Ecken A_i des Grunddreiecks von Interesse. Zahlen, die diesen Abständen proportional sind, heißen tripolare Koordinaten des Punktes X.

55. Demnach werden wir uns zunächst die Aufgabe stellen, einen Punkt zu suchen, dessen Scheitelgeraden gegebene Winkel bilden, von dem aus also die Seiten des Grunddreiecks unter vorgegebenen Winkeln erscheinen. Es wird sich herausstellen, daß diese Aufgabe zwei Lösungen hat (*Zwillingspunkte*). Dann gilt es, einen Punkt zu suchen, dessen Abstände von den Ecken A_i sich wie drei gegebene Zahlen verhalten. Auch diese Aufgabe wird zwei Lösungen haben (*tripolar assoziierte Punkte*). Es wird sich zeigen, daß die hier gefundenen Punkte Winkelgegenpunkte zweier Zwillingspunkte sind, so daß zugleich die Aufgabe gelöst ist, den Punkt zu suchen, dessen Fußpunktdreieck vorgeschriebene Winkel hat. In dem dann folgenden Paragraphen werden wir sehen, daß Zwillingspunkte und tripolar assoziierte Punkte in einem Satze über quadratische Transformationen ihren gemeinsamen Ursprung haben. Schließlich wollen wir uns mit einigen Anwendungen dieser theoretischen Erörterungen befassen.

3. *Die Koordinaten von Uhlich*[2]); *Zwillingspunkte.* — 56. Der

---

1) D. i. der Parabelsatz: Der Höhenpunkt eines Tangentendreiseits, also auch der Schnittpunkt zweier zu einander senkrechten Tangenten liegt auf der Leitlinie.

2) Uhlich, Altes und Neues zur Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks. Progr. Grimma. 1886.

Punkt X, von dem aus die Seiten des Dreiecks A unter den gegebenen Winkeln c_i erscheinen, liegt auf den Örtern, von deren Punkten aus die einzelnen Seiten bezüglich unter den Winkeln c_i erscheinen.

Zerfällt der absolute Kegelschnitt in ein Punktepaar $K_1 K_2$, so ist der Ort von X, für den $\sphericalangle X[A_k A_l] = c_i$ ist, ein Kegelschnitt durch K_1, K_2, A_k und A_l, jener bekannte Kreis C_i durch A_k und A_l. Die Gleichung dieses Kreises wollen wir ableiten, indem wir den absoluten Kegelschnitt zunächst als nicht zerfallend voraussetzen. Wir erhalten dann als Ort des Punktes X die Kurve vierter Ordnung: $X_i^2 = -\gamma_i^2 x_i^2 \cdot F(xx)$, worin $X_i \equiv \alpha_{ii} x_k x_l + x_i(-\alpha_{kl} x_i + \alpha_{li} x_k + \alpha_{ik} x_l)$, $\gamma_i = (c_i + 1)/(c_i - 1)$, $F(xx) \equiv \sum a_{ik} x_i x_k$. Artet nun der absolute Kegelschnitt in ein Punktepaar aus, so wird die linke Seite seiner Ordnungsgleichung einem vollständigen Quadrat proportional:

$$F(xx) = (P_2 P_3 + P_3 P_1 + P_1 P_2)\, g^2(x) = -\varphi \cdot g^2(x).^{1)}$$

Die obige Kurve vierter Ordnung zerfällt in die beiden Kegelschnitte $X_i \mp \gamma_i x_i g(x) \sqrt{\varphi} = 0$.

Die gesuchte Gleichung des Kreises C_i wird also:

$$C_i \equiv (\gamma_i \sqrt{\varphi} - P_i) x_i \cdot g(x) + 2 g_k g_l \cdot \mathsf{P}(xx) = 0;\quad \mathsf{P}(xx) \equiv \sum p_i x_k x_l = 0.$$

57. Setzen wir noch $\gamma_i \sqrt{\varphi} - P_i = \delta_i$, so hat das Radikalzentrum der drei Kreise C_i die Koordinaten[2]) $x_i = 1/g_i \delta_i$. Dieses liegt auf einem, also jedem der C_i, wenn $\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 = -1$ oder $c_1 c_2 c_3 = 1$ ist. Also: *Die drei Kreise C_i schneiden sich in einem Punkte, wenn die drei Winkel c_i demselben Dreieck angehören können.*[3]) Die Koordinaten dieses Punktes sind:

$$Z:\ x_i = 1/g_i(-P_i + \gamma_i \sqrt{\varphi}),\ \text{bezw.}\ Z':\ x_i = 1/g_i(-P_i - \gamma_i \sqrt{\varphi}).$$

Die beiden Punkte Z und Z' heißen *Zwillingspunkte.*[4]) Sie haben die Eigenschaft, daß die beiden Strahlenbüschel $Z(A_1 A_2 A_3)$ und $Z'(A_1 A_2 A_3)$ einander symmetrisch gleich sind.

---

1) Ist $\varphi(uu) \equiv -\sum p_i^2 u_i^2 + 2\sum p_k p_l u_k u_l = 0$ die Klassengleichung des Umkreises, so ist der obige Faktor $\varphi = \varphi(gg)$. Je nachdem daher φ positiv oder negativ ist, ist das absolute Punktepaar reell oder imaginär. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. II. S. 562.

2) Die drei Radikalachsen: $(g_k C_k - g_l C_l)/g(x) = g_k \delta_k x_k - g_l \delta_l x_l = 0$.

3) Sind B_i' die Richtpunkte der Seiten b_i eines Dreiecks B, so sind die Winkel $\beta_i = B_i[B_k B_l] = (K_1 K_2 B_l' B_k')$, also ist $\beta_1 \beta_2 \beta_3 = 1$. Diese Relation entspricht der metrischen $\sum \beta_i = \pi$.

4) A. Artzt, Programm. Recklinghausen 1886.

4. *Die tripolaren Koordinaten. Tripolar assoziierte Punkte* —

58. In der absoluten Geometrie wird die Entfernung zweier Punkte, wie der Winkel zweier Geraden, als Logarithmus eines Doppelverhältnisses definiert. Da aber in kartesischen Koordinaten $r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ der Ausdruck für das Quadrat des Abstandes r zweier Punkte $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ und $r^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = 0$ die Gleichung des Nullkreises oder der Kreisgeraden von $(x_i y_i)$ ist, *so wollen wir unter dem Quadrat des Abstandes eines Punktes von einem zweiten den Wert verstehen, den für diesen die linke Seite der Gleichung seiner Kreisgeraden annimmt, wenn man statt der laufenden Koordinaten die des ersten Punktes einsetzt.*

Sind daher $k_i(xx) = 0$ die Gleichungen der drei Nullkreise A_i, so definieren wir die *tripolaren Koordinaten* y_i des Punktes $X(x_i)$ durch die Gleichungen: $\varrho y_i = \sqrt{k_i(xx)}$.

59. *Für einen allgemeinen absoluten Kegelschnitt ist:* $k_i(xx) \equiv a_{ll} x_k^2 - 2 a_{kl} x_k x_l + a_{kk} x_l^2$. Sollen nun die tripolaren Koordinaten y_i eines Punktes X drei gegebene Werte ϱ_i haben, so liegt dieser auf den drei Kegelschnitten:

$$\varphi_i \equiv k_k / \varrho_k^2 - k_l / \varrho_l^2 = 0,$$

die offenbar durch dieselben vier Punkte gehen. Es gibt also in dem vorliegenden Falle *vier Punkte mit gleichen tripolaren Koordinaten.*

Die sechs Schnittpunkte $[\varphi_i \cdot a_i]$ können aus A_i in vier harmonisch assoziierte Punkte $(x_i^2 \varrho_i^2 = 1)$ projiziert werden, deren gewöhnliche Koordinaten den tripolaren Koordinaten der obigen Punkte reziprok sind.

60. *Zerfällt der absolute Kegelschnitt in ein Punktepaar,* so wird $k_i \equiv g_i(p_l g_k x_k^2 + P_i x_k x_l + p_k g_l x_l^2) \equiv g_i M_i$. Die drei Kegelschnitte $\varphi_i \equiv g_k M_k / \varrho_k^2 - g_l M_l / \varrho_l^2 = 0$ sind Kreise, schneiden sich also in nur zwei wesentlichen Punkten, die *tripolar assoziiert* heißen (Nr. 55).

Die Kreise φ_i schneiden den Umkreis orthogonal. Ihre Mittelpunkte sind die Schnittpunkte der Dreiecksseiten a_i mit der Geraden $\sum x_i \varrho_i^2 / g_i = 0$.[1]

Aus der Orthogonalität folgt: *Je zwei tripolar assoziierte Punkte liegen auf einem Umkreisdurchmesser und teilen diesen harmonisch, sind also Spiegelpunkte in bezug auf den Umkreis.*

61. *Die gewöhnlichen Koordinaten zweier tripolar assoziierten Punkte* erhalten wir mit Hilfe des Punktes R ihrer Verbindungslinie, der in bezug auf den Umkreis der Pol der obigen Zentralen $\sum x_i \varrho_i^2 / g_i = 0$ ist.

---

1) Der Kreis $\sum l_i M_i(xx) = 0$ schneidet den Umkreis des Grunddreiecks orthogonal und hat den Mittelpunkt $L(l_i)$.

R.: $x_i = \varrho \cdot p_i \gamma_i$, wenn $\varrho \gamma_i = - p_i \varrho_i^2 / g_i + p_k \varrho_k^2 / g_k + p_l \varrho_l^2 / g_l$. Die gesuchten Koordinaten haben dann die Form:

$$x_i = p_i P_i + \lambda p_i \gamma_i = p_i (P_i + \lambda \gamma_i),$$ [1]

man findet durch Einsetzen in eine der Gleichungen $\varphi_i = 0$:

$$\lambda^2 = (P_2 P_3 + P_3 P_1 + P_1 P_2)/(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2) = -\varphi/(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2),$$

d. h. zwei tripolar assoziierte Punkte haben die gewöhnlichen Koordinaten:

$$x_i = p_i\left[P_i \pm \gamma_i \sqrt{\varphi} \,/\, \sqrt{-(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2)}\right].$$

Aus diesen Werten folgt, daß die beiden das Punktepaar *UR* harmonisch trennen, und auch wieder natürlich, daß sie in bezug auf den Umkreis konjugiert sind.

62. Die Transformation, durch die ein Punkt in den ihm tripolar assoziierten übergeht, ist nichts anderes als *eine Transformation durch reziproke Radien, eine Inversion am Umkreise.* Ihre Gleichungen lauten:

$$y_i = x_i g(x) - p_i P_i \mathsf{P}(xx) / p_1 p_2 p_3.$$

$y_i = 0$ sind die Gleichungen der Kreise $A_k A_l U$.

5. *Der Zusammenhang zwischen Zwillingspunkten und tripolar assoziierten Punkten.* — 63. Aus unserer obigen Festsetzung

$$\varrho\gamma_i = - p_i \varrho_i^2/g_i + p_k \varrho_k^2/g_k + p_l \varrho_l^2/g_l \qquad \text{(Nr. 61) folgt:}$$

$$\varrho^2 \cdot \sum \gamma_k \gamma_l = \sum [p_i \varrho_i^2 / g_i] \left[- p_i \varrho_i^2/g_i + p_k \varrho_k^2/g_k + p_l \varrho_l^2/g_l\right] \equiv U(\varrho).$$

Sehen wir von den Fällen ab, in denen der Proportionalitätsfaktor $\varrho = 0$ oder $\varrho = \infty$ sein kann, so verschwinden die beiden Summen der vorstehenden Gleichung gleichzeitig. Die tripolar assoziierten Punkte haben in diesem Falle die Koordinaten $x_i = p_i \gamma_i$ (Nr. 61), fallen also zusammen, d. h. in einen Punkt des Umkreises. In der Tat folgt dessen Gleichung durch Elimination von γ_i aus $x_i = p_i \gamma_i$ und $\sum \gamma_k \gamma_l = 0$. Mithin ist $U(\varrho) = 0$ oder $\sum \varrho_i \sqrt{p_i / g_i} = 0$ *die Gleichung des Umkreises in tripolaren Koordinaten.*[2]

64. Für alle Punkte, die nicht auf dem Umkreise liegen, können und wollen wir über ϱ so verfügen, daß $\sum \gamma_k \gamma_l = -1$ wird. Dann sind die Koordinaten zweier tripolar assoziierten Punkte einfacher

$$x_i = p_i (P_i \pm \gamma_i \sqrt{\varphi}).$$

1) D. i. die Parameterdarstellung der Geraden *UR*, wo *U* der Umkreismittelpunkt ist.

2) D. i. im wesentlichen die Relation des Ptolemäus. Vergl. W. Fr. Meyer, Über den Ptolemäischen Satz. Archiv d. Math. u. Physik (3) 7, 1. 1904.

Unter derselben Bedingung $\sum \gamma_k \gamma_l = -1$ waren (Nr. 57) die Koordinaten zweier Zwillingspunkte: $x_i = 1/g_i(P_i \pm \gamma_i \sqrt{\varphi})$, d. h.:

Je zwei Zwillingspunkte und zwei tripolar assoziierte Punkte sind Winkelgegenpunkte. (Nr. 55.)

Mit Hilfe der Nrn. 50 und 57 folgt daraus: *Die Fußpunktdreiecke zweier tripolar assoziierten Punkte sind einander gegensinnig ähnlich.*

65. Die Lehre von den quadratischen Verwandtschaften greift noch tiefer in die Theorie der tripolar assoziierten Punkte und Zwillingspunkte ein. Man beweist leicht den folgenden Satz:

Zieht man durch die Ecken A_i des Hauptdreiecks einer quadratischen Punkttransformation $y_i z_i = k_i^2$ je zwei einander entsprechende Geraden f_i und f_i', so schneiden sich die Dreiseite f und f' — außer in den Ecken A_i — in den Ecken Y_i und Z_i zweier Dreiecke, die zum Grunddreieck A perspektiv liegen. Die Kollineationszentren Y und Z sind Gegenpunkte der Transformation.

66. Die Figur zu diesem Satze läßt noch eine andere Auffassung zu: Über den Seiten $A_k A_l$ des Grunddreiecks sind die Dreiecke $Z_i A_k A_l$ in der Weise errichtet, daß sich die Geraden $A_i Z_k$ und $A_i Z_l$ in der quadratischen Verwandtschaft entsprechen. Besteht diese in der isogonalen Verwandtschaft[1]), so sind in den Aufsatzdreiecken $Z_i A_k A_l$ je zwei Winkel c_i, die an derselben Ecke A_i liegen, einander gleich. Wird wieder $\gamma_i = (c_i + 1)/(c_i - 1)$ gesetzt, so sind die Koordinaten der Kollineationszentren Y: $x_i = p_i(-P_i + \gamma_i \sqrt{\varphi})$, Z: $x_i = 1/g_i(-P_i + \gamma_i \sqrt{\varphi})$. Wegen des doppelten Vorzeichens[2]) der Wurzel erhalten wir gleichzeitig die Punkte:

$$Y': x_i = p_i(-P_i - \gamma_i \sqrt{\varphi}), \quad Z': x_i = 1/g_i(-P_i - \gamma_i \sqrt{\varphi}).$$

Die Punkte Z sind identisch den Radikalzentren der Kreise C_i von Nr. 57. Es ist $Y + Y' = -2 \sum P_i p_i u_i = 0$ die Gleichung des Umkreismittelpunktes U. Somit folgt schließlich:

Errichtet man über den Seiten eines Grunddreiecks A die Dreiecke $Z_i A_k A_l$ bezw. $Z_i' A_k A_l$, nach außen oder innen, in der Weise, daß die Winkel an der Ecke A_i den gleichen Wert c_i haben, so liegen die Dreiecke Z und Z' zum Grunddreieck perspektiv. Kollineationszentren seien die Punkte Z und Z'.

Schneiden sich $A_k Z_l$ und $A_l Z_k$ im — obigen — Punkte Y_i, und ebenso $A_k Z_l'$ und $A_l Z_k'$ in Y_i', so sind die Punkte Y_i und Y_i' die

1) Für diese findet sich der Satz schon bei C. F. A. Jacobi 1825. A. Emmerich, Die Brocardschen Gebilde, Berlin 1891. S. 88.

2) Die Winkel c_i können nach außen oder innen angetragen werden.

Winkelgegenpunkte zu Z_i und Z_i'. Es schneiden sich daher die Geraden $A_i Y_i$ und $A_i Y_i'$ in den Winkelgegenpunkten Y und Y' zu Z und Z'.

Ohne daß über die Größe der Winkel c_i etwas vorausgesetzt wird, liegen die Punkte Y und Y' auf einem Umkreisdurchmesser, Z und Z' also (Nr. 51) auf einer gleichseitigen Umhyperbel. Auch sind die Punkte Z und Z' die Radikalzentren dreier Kreise C_i, die über den Seiten $A_k A_l$ als Sehnen den Peripheriewinkel c_i (nach außen oder innen) fassen.

67. Zu den Zwillingspunkten und tripolar assoziierten Punkten kehren wir zurück, wenn wir die Winkel c_i nicht beliebig sein lassen, sondern der Bedingung unterwerfen, Winkel eines und desselben Dreiecks zu sein:

$$c_1 c_2 c_3 = 1, \quad \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 = -1.$$

Dann haben die Aufsatzdreiecke $Z_i A_k A_l$ die gleichen drei Winkel, sie sind also ähnlich. Die in Nr. 66 ermittelten Koordinaten stellen dann Zwillingspunkte und tripolar assoziierte Punkte dar.

Die obigen Gleichungen ergeben sich umgekehrt als Folgerungen, wenn wir verlangen, daß die Punkte Y und Y' der vorigen Nummer in bezug auf den Umkreis konjugiert sind.

Aus Nr. 62 folgt noch: Zwei Zwillingspunkte sind Durchmesserendpunkte einer gleichseitigen Umhyperbel des Grunddreiecks.[1])

6. *Der Brocardsche Kreis.* — 68. Mit Hilfe der Umkreisinversion (Nr. 62) erhalten wir zu den vier Gebilden: Umkreis, Brocardsche Ellipse, Punkt und Gerade von Lemoine ein wichtiges fünftes hinzu: *Brocardscher Kreis heißt der Kreis, der in der Umkreisinversion der Lemoineschen Geraden entspricht.* Seine Gleichung ist nach Nr. 62:

$$\sum y_i / p_i = g(x) \cdot \sum x_i / p_i - \mathsf{P}(xx) \cdot \sum P_i / p_1 p_2 p_3 = 0.$$

Sechs ausgezeichnete Punkte der Lemoineschen Geraden sind ihre Schnittpunkte mit den Seiten a_i und den Mittelsenkrechten des Grunddreiecks. Definiert man deren Spiegelpunkte als *die Ecken C_i und B_i des zweiten und ersten Brocardschen Dreiecks,* so folgen aus den hier gegebenen Definitionen eine Reihe von Sätzen:

Die Radikalachse des Umkreises und des Brocardschen Kreises ist die Lemoinesche Gerade.

Auf dem Brocardschen Kreise liegen der Umkreismittelpunkt U, der Lemoinesche Punkt P und die Ecken B_i und C_i der beiden Brocardschen Dreiecke. Sein Mittelpunkt liegt auf dem Brocardschen Durchmesser UP, der auf der Lemoineschen Geraden senkrecht steht.

---

1) Rouché-Comberousse, Traité II, p. 641, Aufg. 28.

Die Punkte B_i liegen auf den Mittelsenkrechten. Die Geraden B_iP sind den Seiten a_i parallel.

Die Punkte C_i liegen auf den Kreisen UA_kA_l; sie sind die Fußpunkte der vom Umkreismittelpunkt U auf die „Symmedianen“ A_iP gefällten Lote.

69. Der Brocardsche Kreis hat noch eine andere Eigenschaft, durch die er zu den oben genannten vier Gebilden in naher Beziehung steht.

Durch den Umkreis und die Brocardsche Ellipse, die sich doppelt berühren (Nr. 8 und 9), ist eine Büschelschar von Kegelschnitten bestimmt. Die Brennpunktskurve dieses Systems zerfällt in die Gerade UP und einen Kreis, der durch U und P, auch durch die beiden Grundpunkte der Büschelschar geht, d. h.: *Die Brennpunkte der Kegelschnitte, die mit dem Umkreis und der Brocardschen Ellipse einer Büschelschar angehören, liegen auf dem Brocardschen Durchmesser und dem Brocardschen Kreise.*

70. Nennen[1]) wir insbesondere die beiden Brennpunkte Ω_1 und Ω_2 der Brocardschen Ellipse, die nicht auf dem Brocardschen Durchmesser liegen, Brocardsche Punkte, ihre Verbindungslinie Brocardsche Gerade, so gelten die Sätze: *Die Brocardschen Punkte liegen auf dem Brocardschen Kreise. Die Brocardsche Gerade und der Brocardsche Durchmesser stehen* — als Achsen der Ellipse — *aufeinander senkrecht.* Auf dem Brocardschen Kreise liegen also folgende Punkte: $U, P, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, \Omega_1, \Omega_2$. Deswegen heißt er auch *der Zehnpunktekreis des Grunddreiecks.*[2])

7. *Die isogonischen und isodynamischen Punkte.* — 71. Die Größen γ_i der §§ 3—5, die der Bedingung $\Gamma \equiv \sum \gamma_k \gamma_l + 1 = 0$ genügen, beherrschen, wie sich gezeigt hat, nicht nur die Theorie der Zwillingspunkte, sondern auch die der tripolar assoziierten Punkte. Auch wenn die obige Bedingung nicht erfüllt war, führten die Größen γ_i zu gewissen Punkten, die zum Teil dieselben Eigenschaften wie jene aufwiesen.

Gemäß § 2 betrachten wir die Größen γ_i — mit oder ohne Bedingung $\Gamma = 0$ — als die Koordinaten der Punkte Y und Z. Zu jedem Wertetripel γ_i erhalten wir bei Berücksichtigung aller Permutationen je sechs Paare von Punkten Y und Z.

---

1) Der Kürze halber sind die Koordinaten und Gleichungen der genannten Gebilde fortgelassen. Aus ihnen folgt, daß die hier gegebenen Definitionen nicht mit anderen (II. Abschnitt, § 8) in Widerspruch stehen.

2) A. Emmerich, a. a. O. S. 80.

72. *„Merkwürdige" Punkte* werden wir erhalten, wenn die Größen γ_i besondere Werte annehmen; diese lassen sich darnach unterscheiden, ob sie absolut oder nur relativ[1]), d. h. durch ihre Beziehungen zum Grunddreieck ausgezeichnet sind.

Es werden sich merkwürdige Punkte z. B. ergeben, wenn die Größen γ_i und also auch die Winkel c_i einander gleich sind. Davon soll in diesem Paragraphen die Rede sein; im nächsten und letzten wenden wir uns relativ ausgezeichneten Werten γ_i zu.

73. Ist zunächst $\Gamma \neq 0$, so liegen alle zu den Werten $c_1 = c_2 = c_3 = c$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$ gehörigen Punkte Y auf dem Brocardschen Durchmesser, die Punkte Z mithin (Nr. 52) auf der Kiepertschen Hyperbel.

$$Y:\ x_i = p_i(-P_i + \gamma\sqrt{\varphi}), \qquad Z:\ x_i = 1/g_i(-P_i + \gamma\sqrt{\varphi}).$$

Aus Nr. 66 folgt: *Errichtet man über den Seiten eines Grunddreiecks A als Grundlinien — gleichzeitig nach außen oder innen — gleichschenklige ähnliche Dreiecke, so liegt das von deren Spitzen gebildete Dreieck Z oder Z′ perspektiv zum Grunddreieck. Kollineationszentrum ist ein Punkt Z oder Z′ der Kiepertschen Hyperbel.*

Die Punkte Y, Y' auf dem Brocardschen Durchmesser bilden eine Involution mit den Doppelpunkten U, P. Die ihr isogonale Involution (ZZ') auf der Kiepertschen Hyperbel hat das Zentrum P.

74. Tritt nun die Bedingung $\Gamma = 0$ hinzu, so erhalten wir zwei besondere Zwillingspunkte und zwei besondere tripolar assoziierte Punkte. Jene heißen *isogonische,* diese *isodynamische Punkte.*

Aus $\sum \gamma_k \gamma_l = 3\gamma^2 = -1$ folgt $\gamma = \pm \frac{1}{3} \cdot \sqrt{-3}$.[2])

Es gelten die Sätze: *Die isogonischen Punkte liegen auf der Kiepertschen Hyperbel, und zwar auf dem Durchmesser (Nr. 67), der durch den Lemoineschen Punkt (Nr. 73) geht.*

Man erhält sie, indem man gleichwinklige Dreiecke über den Seiten des Grunddreiecks gleichzeitig nach außen oder innen errichtet und die freien Ecken derselben mit den Gegenecken des Grunddreiecks verbindet.

Von den isogonischen Punkten aus erscheinen die Seiten des Grunddreiecks unter gleichen Winkeln.

Die isodynamischen Punkte sind diejenigen des Brocardschen Durchmessers, die gleichseitig konjugiert in bezug auf den Umkreis und das Punktepaar (UP) sind.

---

1) J. Schick, a. a. O. Münchener Berichte **30**, 1900.

2) Die Punkte sind reell, wenn $\gamma \cdot \sqrt{\varphi}$ reell, also φ negativ, d. h. das absolute Punktepaar imaginär ist (Nr. 56).

Die Kreise φ_i, auf denen sie liegen (Nr. 60), sind *die Apollonischen Kreise* des Grunddreiecks durch je eine Ecke und die Fußpunkte der zugehörigen Winkelhalbierenden.

Die Fußpunktdreiecke der beiden isodynamischen Punkte sind der Definition gemäß gleichseitig.

8. *Die Brocardschen Gebilde im Sinne von Artzt.*[1]) — 75. Nunmehr mögen einige Punkte betrachtet werden, bei denen es sich um *relativ ausgezeichnete Werte* γ_i handelt. Die Größen c_i waren ja Winkel; es liegt nichts näher, als sie den Winkeln des Grunddreiecks gleichzusetzen $\left(\gamma_i = - P_i / \sqrt{\varphi}\right)$. Dadurch erhalten wir in der Ebene des Grunddreiecks bereits *24 ausgezeichnete Punkte.* Neben den Winkeln des Grunddreiecks haben dann im Sinne dieser Betrachtungen noch die Winkel eine Bedeutung erlangt, die an den Scheitelgeraden des Schwerpunktes G, also auch in dem Fußpunktdreieck des Lemoineschen Punktes P auftreten. Diese finden sich noch in einem anderen Dreieck D[2]), dessen Ecken D_i auf dem Umkreise und den Symmedianen $A_i P$ liegen. Diese Winkel $\left[\gamma_i = (- P_i + 4 p_i g_i)/3\sqrt{\varphi}\right]$[3]) liefern 24 weitere merkwürdige Punkte.

76. Es war unser Bestreben, zu betonen, *daß die merkwürdigen Eigenschaften des Lemoineschen Punktes P aus seinen polaren Beziehungen zum Umkreise fließen* (Nr. 9). Wie dieser Punkt, so ist auch das obige Dreieck D durch — das Grunddreieck A und — seinen Umkreis projektiv zu definieren. Man erkennt leicht, daß die Dreiecke A und D nicht nur den Umkreis, sondern auch Punkt und Gerade von Lemoine (und folglich auch den Brocardschen Kreis) gemeinsam haben, gewissermaßen also gleichwertig sind. Deswegen auch verwenden wir ihre Winkel für den vorliegenden Zweck in gleicher Weise.

77. Aus den Koordinaten der 48 Punkte, die man einfach durch Einsetzen der obigen Werte γ_i in die allgemeinen Ausdrücke (Nr. 64) erhält, folgt: Unter diesen 48 Punkten befinden sich der Umkreismittelpunkt U, der Höhenpunkt H, irgend ein Punkt der absoluten Geraden, insbesondere also der Richtpunkt der Lemoineschen Geraden, die Brocardschen Punkte Ω_1 und Ω_2, die Ecken des zweiten Brocardschen Dreiecks C, der Lemoinesche Punkt P, die Ecken des Grunddreiecks A und andere weniger bekannte Punkte.

---

1) A. Artzt, Programm. Recklinghausen 1886.

2) Rouché-Comberousse, Traité I, 463. Der dortige elementare Beweis gilt auch hier.

3) Es hat die Summe $\sum \gamma_i$ für die beiden Dreiecke A und D den gleichen Wert $\sum P_i / \sqrt{\varphi}$. Gleichbrocardsche Dreiecke.

Von den 48 Punkten liegen zwölf auf der Lemoineschen Geraden. Ihre Fußpunktdreiecke enthalten die Winkel des Dreiecks A oder D in irgend einer Anordnung. Diesen zwölf Punkten sind zwölf Punkte des Brocardschen Kreises tripolar assoziiert; wir erhalten sie durch Projektion aus dem Umkreismittelpunkte U. Die noch folgenden 24 Punkte ergeben sich aus diesen durch die isogonale Verwandtschaft. Zwölf davon liegen auf der Steinerschen Umellipse, dem Bild der Lemoineschen Geraden, die letzten zwölf auf der bizirkularen Kurve vierter Ordnung, die dem Brocardschen Kreise entspricht.

Über einige Ungleichheitsbeziehungen in der Theorie der analytischen Funktionen.

Von EDMUND LANDAU in Berlin.

1. Am Ende seiner Arbeit[1]) „über die Wertschwankungen der harmonischen Funktionen zweier reellen Veränderlichen und der Funktionen eines komplexen Arguments" gelangt Herr Schottky durch Spezialisierung seiner allgemeinen Resultate zu dem Satz[2]):

Es sei $\varphi(x)$ eine analytische Funktion von x, welche für $|x| \leq R$ regulär ist. Es sei $D(\varphi)$ ihre größte Wertschwankung auf der Grenze, d. h. der größte Wert von $|\varphi(a) - \varphi(b)|$, wo a und b zwei beliebige Zahlen mit dem absoluten Betrage R sind.[3]) Dann ist

$$|\varphi'(0)| \leq \frac{2}{\pi} \frac{D(\varphi)}{R}. \tag{1}$$

Schon an einer früheren Stelle seiner Arbeit[4]) hatte Herr Schottky darauf hingewiesen, daß die weniger scharfe Relation

$$|\varphi'(0)| \leq \frac{D(\varphi)}{R}$$

als bekannt anzusehen war. Denn, wenn c irgend ein Punkt der Kreisperipherie $Re^{\vartheta i}$ ist, und wenn x diesen Kreis im positiven Sinne durchläuft, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x^2}\,dx,$$

1) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 117, 1897, S. 225—253.

2) l. c. S. 253.

3) Aus bekannten Sätzen folgt, daß $D(\varphi)$ zugleich der größte Wert von $|\varphi(a) - \varphi(b)|$ für alle Wertepaare a, b ist, welche die Bedingungen $|a| \leq R$, $|b| \leq R$ erfüllen.

4) l. c., S. 231.

folglich, da auf dem Integrationswege beständig

$$|\varphi(x)-\varphi(c)|\leqq D(\varphi)$$

ist,

$$|\varphi'(0)|\leqq\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi R\cdot\frac{D(\varphi)}{R^2}=\frac{D(\varphi)}{R}.$$

2. Ich will nun zunächst eine Ungleichheitsbeziehung beweisen, welche schärfer ist als die von Herrn Schottky angegebene Relation (1). Es bedeute $E(\varphi)$ die größte Schwankung des reellen Teiles von $\varphi(x)$ für $|x|=R$, also den größten Wert von $|\Re\varphi(a)-\Re\varphi(b)|$ für $|a|=R$, $|b|=R$.[1]) Dann behaupte ich, daß

$$|\varphi'(0)|\leqq\frac{2}{\pi}\frac{E(\varphi)}{R} \tag{2}$$

ist.

Da offenbar für $|a|=R$, $|b|=R$

$$|\Re\varphi(a)-\Re\varphi(b)|=|\Re(\varphi(a)-\varphi(b))|\leqq|\varphi(a)-\varphi(b)|\leqq D(\varphi),$$

also

$$E(\varphi)\leqq D(\varphi)$$

ist, ist (1) in (2) enthalten. Der folgende Beweis von (2) stellt also zugleich einen direkten Beweis von (1) dar.

Nach Voraussetzung ist der Radius des Konvergenzkreises der Potenzreihe

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

größer als R. Es werde $a_1\neq 0$ angenommen — sonst ist die Behauptung (2) trivial — und

$$x=\frac{y}{a_1}=\frac{y}{\varphi'(0)}$$

gesetzt; der Radius des Konvergenzkreises der so entstehenden Potenzreihe

$$\varphi\left(\frac{y}{a_1}\right)=\psi(y)=a_0+y+\frac{a_2}{a_1^2}y^2+\ldots$$

ist $>R|\varphi'(0)|$. Durch Anwendung der bekannten Integraldarstellung für den reellen Teil des Koeffizienten b_1 von y in einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}b_ny^n$ ergibt sich hier

$$1=\frac{1}{\pi R|\varphi'(0)|}\int_0^{2\pi}\Re\psi(y)\cos\vartheta\,d\vartheta, \tag{3}$$

1) $E(\varphi)$ ist auch der größte Wert von $|\Re\varphi(a)-\Re\varphi(b)|$ für $|a|\leqq R$, $|b|\leqq R$.

wo y den Kreis $R\,|\varphi'(0)|\,e^{\vartheta i}$ im positiven Sinne durchläuft. Da nun diesen Werten von y die Werte von x auf dem Kreise $|x| = R$ entsprechen, ist für je zwei Werte auf dem Integrationswege

$$|\Re\psi(y_1) - \Re\psi(y_2)| \leqq E(\varphi).$$

Daher liegt $\Re\psi(y)$ für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ zwischen $A - \frac{1}{2}E(\varphi)$ (inkl.) und $A + \frac{1}{2}E(\varphi)$ (inkl.), wo A eine gewisse Konstante bezeichnet. Wegen

$$|\Re\psi(y) - A| \leqq \tfrac{1}{2}E(\varphi)$$

ergibt sich also aus (3)

$$\pi R\,|\varphi'(0)| = \int_0^{2\pi} \Re\psi(y)\cos\vartheta\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} (\Re\psi(y) - A)\cos\vartheta\, d\vartheta$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} |\Re\psi(y) - A|\cdot|\cos\vartheta|\, d\vartheta \leqq \frac{E(\varphi)}{2}\int_0^{2\pi} |\cos\vartheta|\, d\vartheta$$

$$= \frac{E(\varphi)}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta\right) = \frac{E(\varphi)}{2}(1 - (-2) + 1)$$

$$= 2E(\varphi),$$

$$(2) \qquad |\varphi'(0)| \leqq \frac{2}{\pi}\,\frac{E(\varphi)}{R},$$

was zu beweisen war.

3. In dieser Relation (2) kann die Konstante $\frac{2}{\pi}$ durch keine kleinere Zahl ersetzt werden. Denn es ist leicht, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Größe δ eine Funktion $\varphi(x)$ anzugeben, welche in einem gewissen Gebiet $|x| \leqq R$ regulär ist, aber die Relation

$$(4) \qquad |\varphi'(0)| > \left(\frac{2}{\pi} - \delta\right)\frac{E(\varphi)}{R}$$

erfüllt. Es sei

$$\varphi(x) = ix + \frac{i}{3}x^3 + \frac{i}{5}x^5 + \dots$$

und R eine nachher näher zu bestimmende Zahl < 1. $\varphi(x)$ stellt einen für $|x| < 1$, also gewiß für $|x| \leqq R$ regulären Zweig der Funktion

$$\operatorname{arc\,tg} ix = \frac{1}{2i}\log\frac{1-x}{1+x}$$

dar. Bekanntlich ist für $|x| < 1$

$$-\frac{\pi}{4} < \Re\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\right) < \frac{\pi}{4},$$

also

$$-\frac{\pi}{4} < \Re \operatorname{arc\,tg}(ix) = \Re\varphi(x) < \frac{\pi}{4}$$

$$E(\varphi) < \frac{\pi}{2};$$

andererseits ist

$$|\varphi'(0)| = 1;$$

wird also R so gewählt, daß

$$1 - \delta\frac{\pi}{2} < R < 1$$

ist, so ist

$$|\varphi'(0)| = 1 = \left(\frac{2}{\pi} - \delta\right)\frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \delta\frac{\pi}{2}} > \left(\frac{2}{\pi} - \delta\right)\frac{E(\varphi)}{R},$$

wie in (4) behauptet wurde.

4. Dagegen ist es, wie nunmehr gezeigt werden soll, möglich, in Herrn Schottkys Relation

$$(1) \qquad |\varphi'(0)| \leqq \frac{2}{\pi}\frac{D(\varphi)}{R}$$

die Zahl $\frac{2}{\pi}$ durch eine kleinere absolute Konstante, nämlich $\frac{1}{\sqrt{3}}$, zu ersetzen. Ich behaupte also die Richtigkeit der Beziehung

$$(5) \qquad |\varphi'(0)| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{D(\varphi)}{R}.$$

Hierzu mache ich Gebrauch von folgendem bekannten geometrischen Satz[1]):

Wenn der Abstand je zweier Punkte einer ebenen Punktmenge $\leqq D$ ist, so gibt es in der Ebene mindestens einen Punkt, der von jedem Punkte der Menge höchstens die Entfernung $\frac{D}{\sqrt{3}}$ hat.

Im vorliegenden Fall gibt es also eine komplexe Zahl α, so daß für alle x mit dem absoluten Betrage R die Ungleichheitsbeziehung

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqq \frac{D(\varphi)}{\sqrt{3}}$$

---

1) Derselbe findet sich, auf eine n-dimensionale Punktmenge verallgemeinert (wo der Abstand eines passend bestimmbaren Punktes von allen Punkten der Menge $\leqq D\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$ ist), in Herrn Jungs Dissertation: „Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschließt", Marburg, 1899, welche auch im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 123, 1901, S. 241—257, abgedruckt worden ist.

besteht. Nach dem Cauchyschen Satz ist also

$$|\varphi'(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(x)-\alpha}{x^2}\,dx\right| \leqq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{D(\varphi)}{\sqrt{3}}\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{D(\varphi)}{R},$$

womit die Behauptung (5) bewiesen ist.

5. Gegen Ende seiner Abhandlung[1]) hat Herr Schottky den Satz bewiesen:

$$(6) \qquad |\varphi(x_0)-\varphi(x_1)| \leqq D(\varphi)\frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,sin}\left|\frac{R(x_0-x_1)}{R^2-x_0\bar{x}_1}\right|,$$

wo $|x_0|<R$, $|x_1|<R$ ist, $\bar{x}_1$ die zu x_1 konjugierte Zahl bezeichnet und wo der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegene Wert des Arc sin gemeint ist. Aus (6) hatte Herr Schottky alsdann (1) entwickelt, indem er $x_1 = 0$ setzte, durch $|x_0|$ dividierte und zur Grenze $x_0 = 0$ überging.

Ich will nun feststellen, daß der Satz (6) weder im Sinne des § 2 noch im Sinne des § 4 einer Verschärfung fähig ist. Genauer gesagt, ich will an je einem Beispiel zeigen:

1) daß der Quotient

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)| : E(\varphi)\operatorname{Arc\,sin}\left|\frac{R(x_0-x_1)}{R^2-x_0\bar{x}_1}\right|$$

$>\frac{2}{\pi}$ sein und sogar beliebig großer Werte fähig sein kann,

2) daß der Quotient

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)| : D(\varphi)\operatorname{Arc\,sin}\left|\frac{R(x_0-x_1)}{R^2-x_0\bar{x}_1}\right|$$

$>\frac{1}{\sqrt{3}}$ und sogar $>\frac{2}{\pi}-\delta$ sein kann, wo δ eine beliebig kleine positive Größe ist.

1) Hier liefert die oft bei derartigen Betrachtungen angewendete Funktion aus § 3

$$\varphi(x) = ix + \frac{i}{3}x^3 + \frac{i}{5}x^5 + \dots$$

den gewünschten Nachweis.

Es sei $x_0 = r$, $x_1 = 0$, $0 < r < R < 1$. Dann ist

$$E(\varphi)\operatorname{Arc\,sin}\left|\frac{R(x_0-x_1)}{R^2-x_0\bar{x}_1}\right| = E(\varphi)\operatorname{Arc\,sin}\frac{r}{R} < \frac{\pi}{2}\operatorname{Arc\,sin}\frac{r}{R} < \frac{\pi^2}{4},$$

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)| = r + \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} + \dots$$

Wenn ω eine beliebig große Zahl ist, ist $r<1$ so wählbar, daß

$$r + \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} + \dots > \frac{\pi^2}{4}\cdot\omega$$

---

1) l. c. S. 253.

ist; wird dann R zwischen r und 1 gewählt, so ist, wie behauptet,

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)|:E(\varphi)\,\text{Arc}\sin\left|\frac{R(x_0-x_1)}{R^2-x_0\bar{x}_1}\right|>\frac{\pi^2}{4}\omega:\frac{\pi^2}{4}=\omega.$$

2) Es sei $\varphi(x)=x,\ x_0=r,\ x_1=-r,\ R=1$ und $0<r<1$. Dann ist

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)|=2r,$$

$$D(\varphi)=2,$$

$$D(\varphi)\,\text{Arc}\sin\left|\frac{R(x_0-x_1)}{R^2-x_0\bar{x}_1}\right|=2\ \text{Arc}\sin\frac{2r}{1+r^2}<2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi,$$

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x_1)|:D(\varphi)\,\text{Arc}\sin\left|\frac{R(x_0-x_1)}{R^2-x_0\bar{x}_1}\right|>\frac{2r}{\pi},$$

also

$$>\frac{2}{\pi}-\delta,$$

wenn nur r hinreichend nahe an 1 liegt.

Den 31 ten August 1905.

Zur Theorie des Integrallogarithmus.[1])

Von MARTIN KRAUSE in Dresden.

Die schon von Euler untersuchte Funktion $li\,(a)$, die von Soldner mit dem Namen des Integrallogarithmus bezeichnet wurde, ist in der neueren Zeit in einigen Arbeiten behandelt worden.[2]) Zu den in diesen

1) Herr Lerch, dem ich diese Notiz vor ihrer Veröffentlichung mitteilte, machte mich auf eine semikonvergente Entwickelung aufmerksam, die er im Intermédiaire im Jahre 1901 ohne Beweis angegeben hatte und die mit der von mir aufgestellten konvergenten Entwicklung in ihrer Struktur große Ähnlichkeit besitzt. Ich verweise in bezug hierauf auf die nachfolgende Arbeit von Herrn Lerch, die er auf meine Anregung hin veröffentlicht hat.

2) Laguerre: Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$. Bulletin de la société mathématique de France tome VII. — Lommel: Zur Theorie der Besselschen Funktionen. Mathematische Annalen Band 16. — Stieltjes: Recherches sur quelques séries semi-convergentes. Annales de l'école normale III, 3. — Phragmén: Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann. Stockh. Öfv. 48. — Phragmén: Über die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemannschen Primzahlformel. ibidem. Siehe in bezug auf die beiden letzten Arbeiten auch Fortschritte der Mathematik. Band 23. Seite 300. — Nielsen: Handbuch zur Theorie der

Arbeiten gegebenen Darstellungen möge eine weitere hinzugefügt werden, die für gewisse Werte des Argumentes von Vorteil sein dürfte.

1. Wir gehen von der bekannten Mac Laurinschen Summenformel aus. Dieselbe kann folgendermaßen gefaßt werden. Die Summe:

$$f(l) + f(l+1) + \cdots + f(l+m) \tag{1}$$

hat den Wert:

$$\int_l^{l+m} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\left(f(l+m) + f(l)\right) + V_{2n} + P_{2n}.$$

Dabei ist gesetzt worden:

$$V_{2n} = \frac{B_1}{2!}\left(f'(l+m) - f'(l)\right) - \frac{B_2}{4!}\left(f^{(3)}(l+m) - f^{(3)}(l)\right) + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^n B_{n-1}}{2n-2!}\left(f^{2n-3}(l+m) - f^{2n-3}(l)\right),$$

ferner bedeutet P_{2n} den Rest. Nimmt man die Bedingung hinzu, daß die Summe $\sum_{k=0}^{k=m-1} f^{2n}(l+k+t)$, während t von 0 bis 1 geht, ihr Zeichen nicht ändert, so kann man schreiben:

$$P_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{\Theta}{2n!} \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} B_n \left(f^{2n-1}(l+m)) - f^{2n-1}(l)\right), \quad 0<\Theta<1. \tag{2}$$

2. Wir wählen nun die Funktion:

$$f(x) = \frac{a^x}{x} - \frac{1}{x}, \tag{3}$$

wobei unter a eine beliebige positive Größe zu verstehen ist. Dann nimmt der $r$te Differentialquotient die Form an:

$$\frac{a^x}{x}\left((\mathrm{l}\,a)^r - \frac{r(\mathrm{l}\,a)^{r-1}}{x} + \frac{r \cdot r-1\,(\mathrm{l}\,a)^{r-2}}{x^2} \cdots + (-1)^r \frac{r!}{x^r}\right) - (-1)^r \frac{r!}{x^{r+1}}.$$

Wir können diesen Ausdruck auch schreiben:

$$(-1)^r \frac{a^x r!}{x^{r+1}}\left(1 - \frac{x\,\mathrm{l}\,a}{1} + \frac{(x\,\mathrm{l}\,a)^2}{1\cdot 2} \cdots + (-1)^r \frac{(x\,\mathrm{l}\,a)^r}{r!}\right) - (-1)^r \frac{r!}{x^{r+1}}.$$

Zylinderfunktionen. Leipzig 1904. § 34. — Nielsen: Notiz über den Integrallogarithmus. Monatshefte für Mathematik und Physik. Band 16. — Lerch: Über einige Entwickelungen auf dem Gebiete der unvollständigen Eulerschen Integrale 2ter Art. Crelle, Band 128. — Gutknecht: Integrallogarithmus. Diss. Bern 1903. Auf die letzte Arbeit wurde ich nach Drucklegung dieser Arbeit durch die Liebenswürdigkeit von Herrn Lampe aufmerksam gemacht.

Nun gilt aber die Gleichung:

$$a^{-x} = 1 - \frac{x\,\mathrm{l}a}{1} \cdots + (-1)^r \frac{(x\,\mathrm{l}a)^r}{r!} + (-1)^{r+1} a^{-\vartheta x} \frac{(x\,\mathrm{l}a)^{r+1}}{(r+1)!}.$$

Unter solchen Umständen nimmt der $r$te Differentialquotient die Form an:

$$\frac{a^{(1-\vartheta)x}}{r+1} (\mathrm{l}a)^{r+1}. \tag{4}$$

Hieraus folgt, daß wir für den Rest die unter (2) angegebene Form wählen können. Nehmen wir nun an, daß unter den Zahlen $l, l+1, \ldots l+m$ die Null nicht vorkommt, so finden wir für das Integral: $\int\limits_l^{l+m} \left(\frac{a^x}{x} - \frac{1}{x}\right) dx$ den folgenden Ausdruck:

$$\frac{a^l}{l} + \frac{a^{l+1}}{l+1} + \cdots + \frac{a^{l+m}}{l+m} - \left(\frac{1}{l} + \cdots + \frac{1}{l+m}\right)$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{a^{l+m}}{l+m} + \frac{a^l}{l} - \frac{1}{l+m} - \frac{1}{l}\right) - V_{2n} - P_{2n},$$

wobei die Größen V_{2n} und P_{2n} die vorhin angegebenen Werte besitzen.

Das allgemeine Glied von V_{2n} hat die Form: $\pm \frac{B_r}{2r!}(f^{2r-1}(l+m) - f^{2r-1}(l))$ Nun ist:

$$B_r = \frac{2\,(2r)!}{(2\pi)^{2r}} S_{2r},$$

also kann dasselbe geschrieben werden:

$$\pm \frac{2 S_{2r}}{(2\pi)^{2r}} (f^{(2r-1)}(l+m) - f^{2r-1}(l)).$$

Hieraus folgt, daß für endliche Werte von l und m und für:

$$|\mathrm{l}a| < 2\pi \tag{5}$$

der Grenzwert von P_{2n} für $n = \infty$ der Null gleich ist und demgemäß V_∞ eine konvergente Reihe darstellt.

Wir erhalten unter solchen Umständen den

Lehrsatz: Leistet die Größe a der Ungleichung (5) *Genüge, und ist unter den Zahlen $l, l+1, \ldots l+m$ die Null nicht enthalten, so ist das Integral:* $\int\limits_l^{l+m} \left(\frac{a^x}{x} - \frac{1}{x}\right) dx$, *von dem endlichen Teile:*

$$\frac{a^l}{l} + \frac{a^{l+1}}{l+1} + \cdots \frac{a^{l+m}}{l+m} - \left(\frac{1}{l} + \cdots + \frac{1}{l+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a^{l+m}}{l+m} + \frac{a^l}{l} - \frac{1}{l+m} - \frac{1}{l}\right)$$

abgesehen, gleich der konvergenten unendlichen Reihe V_∞.

Kommt unter den Zahlen

$$l,\ l+1,\ \ldots\ l+m$$

die Null vor, ist etwa $l+r=0$, so tritt an Stelle des Gliedes $\frac{a^{l+r}}{l+r}-\frac{1}{l+r}$ der Ausdruck $\mathrm{l}a$. Setzen wir insbesondere $l=0$, so erhalten wir den

Lehrsatz: Das Integral: $\int\limits_0^m \left(\frac{a^x}{x}-\frac{1}{x}\right)dx$ *ist, von dem endlichen Teile:*

$$\log a+\frac{a}{1}+\cdots+\frac{a^{m-1}}{m-1}+\frac{1}{2}\frac{a^m}{m}-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\cdots-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2m}$$

abgesehen, gleich der konvergenten unendlichen Reihe:

$$-\frac{B_1}{2!}\left(f'(m)-\frac{(\mathrm{l}a)^2}{2}\right)+\frac{B_2}{4!}\left(f^{(3)}(m)-\frac{(\mathrm{l}a)^4}{4}\right)-\frac{B_3}{6!}\left(f^{(5)}(m)-\frac{(\mathrm{l}a)^6}{6}\right)\cdots$$

3. Wir wollen jetzt annehmen, daß m immer größer und größer werde, und zusehen, wie dann die Resultate sich gestalten. Nehmen wir die Voraussetzung hinzu, daß a kleiner als 1 sei, so geht

$$\frac{a^l}{l}+\frac{a^{l+1}}{l+1}+\cdots+\frac{a^{l+m}}{l+m}$$

in eine konvergente unendliche Reihe über. Setzen wir:

$$a=e^{-\alpha},$$

so ist α eine positive Größe, die überdies nach dem Früheren kleiner als 2π sein muß. Im weiteren folgen wir einer ähnlichen Methode, wie sie Saalschütz in § 25 seines Werkes über die Bernoullischen Zahlen angewandt hat.

Der $r$te Differentialquotient der Funktion: $\frac{a^x}{x}-\frac{1}{x}$ kann geschrieben werden:

$$\pm\,\alpha^{r+1}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{\alpha x}{r+2}+\frac{(\alpha x^2)}{1\cdot 2\cdot r+3}\cdots\right).$$

Der Ausdruck in der Klammer soll transformiert werden. Wir schreiben ihn zunächst

$$\frac{1}{r+1}-\frac{y}{r+2}+\frac{y^2}{1\cdot 2\cdot r+3}-\frac{y^3}{3!\,r+4}\cdots,$$

wobei gesetzt ist: $\alpha x=y$, dann aber:

$$\frac{1}{r+1}-\frac{y}{r+1}\left(1-\frac{1}{r+2}\right)+\frac{y^2}{1\cdot 2\cdot r+1}\left(1-\frac{2}{r+3}\right)-\frac{y^3}{3!\,r+1}\left(1-\frac{3}{r+4}\right)\cdots$$

oder auch:

$$\frac{1}{r+1}\left(1-y+\frac{y^2}{1\cdot 2}-\frac{y^3}{3!}\cdots\right)+\frac{y}{r+1}\left(\frac{1}{r+2}-\frac{y}{r+3}+\frac{y^2}{1\cdot 2\cdot r+4}\cdots\right)$$

und demgemäß:

$$\frac{e^{-y}}{r+1}+\frac{y}{r+1}\left(\frac{1}{r+2}-\frac{y}{r+3}+\frac{y^2}{1\cdot 2\cdot r+4}\cdots\right).$$

Diese Transformation kann wiederholt werden, und wir erhalten die Darstellung:

$$e^{-y}\left(\frac{1}{r+1}+\frac{y}{r+1\cdot r+2}+\cdots\frac{y^s}{r+1\cdots r+s+1}\right)$$
$$+\frac{y^{s+1}}{r+1\cdots r+s+1}\left(\frac{1}{r+s+2}-\frac{y}{r+s+3}+\frac{y^2}{1\cdot 2\cdot r+s+4}\cdots\right).$$

Nehmen wir nun an, daß die Ungleichung besteht: $y < r+1$, so wird der erste Teil der letzten Darstellung, wenn y immer größer wird, wie groß auch im übrigen r und s angenommen werden, sich immer mehr und mehr dem Grenzwert Null nähern. Ferner können wir s so groß wählen, daß dasselbe bei dem zweiten Teile der Fall ist und demgemäß auch bei dem ganzen Ausdrucke.

Zweitens können wir den $r$ten Differentialquotienten, vom Faktor α^{r+1} abgesehen, auch schreiben:

$$\frac{a^x}{y}\left(1-\frac{r}{y}+\frac{r\cdot r-1}{y^2}-\cdots\pm\frac{r!}{y^r}\right)-(-1)^r\frac{r!}{y^{r+1}}.$$

Nehmen wir nun an, daß $y > r$ ist, so folgt, daß der angegebene Ausdruck mit wachsendem Werte von y sich immer mehr und mehr dem Grenzwert Null nähert.

Unter solchen Umständen erhalten wir den folgenden

Lehrsatz: Leistet α der Ungleichung Genüge: $\alpha < 2\pi$, so ist der Grenzwert von $\frac{B_r}{2r!}f^{2r-1}(m)$ für $m=\infty$, wie groß auch r sein möge, stets der Null gleich.

Nach diesen Bemerkungen gehen wir zu der Betrachtung des Integrales $\int\limits_l^{l+m}\left(\frac{a^x}{x}-\frac{1}{x}\right)dx$ zurück. Wenn l positiv, von Null verschieden angenommen wird, so kann das Integral geschrieben werden:

$$\int\limits_l^{l+m}\frac{a^x}{x}\,dx-\int\limits_l^{l+m}\frac{dx}{x},$$

oder also wir finden für das Integral $\int_l^{l+m} \frac{a^x}{x}\, dx$, von der Summe:

$$\frac{a^l}{l} + \frac{a^{l+1}}{l+1} + \cdots \frac{a^{l+m}}{l+m} - \left(\frac{1}{l} + \cdots \frac{1}{l+m}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a^{l+m}}{l+m} + \frac{a^l}{l} - \frac{1}{l+m} - \frac{1}{l}\right) + \log\frac{l+m}{l}$$

abgesehen, die Reihendarstellung:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r \frac{B_r}{2r!} \left(f^{2r-1}(l+m) - f^{2r-1}(l)\right).$$

Lassen wir m unendlich groß werden und nehmen an, daß l eine positive ganze Zahl ist, so folgt der

Lehrsatz: Unter den im obigen angegebenen Bedingungen ist das Integral: $\int_l^{\infty} \frac{a^x}{x}\, dx$, *von dem endlichen Teile:*

$$-\frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} \cdots - \frac{a^{l-1}}{l-1} - \frac{a^l}{2l} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{l-1} + \frac{1}{2l} - \log(1-a) - \log l - E$$

abgesehen, gleich der konvergenten unendlichen Reihe:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r+1} \frac{B_r}{2r!} f^{2r-1}(l).$$

Erwägt man, daß gesetzt werden kann:

$$\frac{1}{1} + \cdots \frac{1}{l-1} + \frac{1}{2l} - \log l - E = -\frac{1}{12l^2} + \frac{1}{120l^4} - \frac{\vartheta}{252l^6},$$

$$-\log(1-a) - \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} \cdots - \frac{a^{l-1}}{l-1} = \frac{a^l}{l(1-\theta a)^l},$$

so folgt, daß etwa für $a = e^{-1}$ und für einigermaßen große l die angenäherte Berechnung des endlichen Teiles keinerlei Schwierigkeiten bereitet. Dasselbe gilt von der unendlichen Reihe.

Die gefundene Reihendarstellung dürfte sich daher für die numerische Berechnung des Integrallogarithmus in den angedeuteten Fällen sehr wohl eignen.

Dresden, den 28. April 1905.

Bemerkungen über eine Formel aus der Theorie der unvollständigen Gammafunktion und des Integrallogarithmus.

Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

Vor einigen Jahren versuchte ich die Theorie der Transzendente $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-(m+a)u}}{(m+a)^s}$, welche im wesentlichen schon von Malmsten[1]) herrührt, und von Lipschitz[2]) ausführlich untersucht wurde, für die Theorie der unvollständigen Gammafunktion

$$Q(s, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

in anderer Weise nutzbar zu machen, als dies bereits durch Hermite[3]) geschehen war. Mein Resultat bestand in der halbkonvergenten Entwicklung

$$(1)\quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mu-w}}{(mu+w)^s} = \frac{1}{u} Q(1-s, w) + \frac{e^{-w}}{2w^s} + \frac{e^{-w}}{w^s} \sum_{\mu} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu u^{2\mu-1}}{(2\mu)!} G(w,s)_\mu, \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

wobei w, u, s positive reelle Größen bedeuten, ferner

$$G(w, s)_\mu = 1 + \binom{2\mu-1}{1} \frac{s}{w} + \binom{2\mu-1}{2} \frac{s(s+1)}{w^2} + \binom{2\mu-1}{3} \frac{s(s+1)(s+2)}{w^3} + \cdots,$$

und $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ... die positiven Bernoullischen Zahlen sind, und zwar ist der durch die Benutzung der halbkonvergenten Reihe bedingte Fehler vom gleichen Zeichen und vom absolut kleineren Wert wie das erste vernachlässigte Glied der Entwicklung.

Dieses Resultat würde ein ausgezeichnetes Hilfsmittel für die Berechnung von $Q(1-s, w)$ ausmachen, wenn man über eine bequeme

1) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 38.

2) ibid. Bd. 54 und 105. Daß in seiner ersten Arbeit Lipschitz den funktionentheoretischen Charakter der Reihe noch nicht ganz beherrschte, folgt daraus, daß er von einer Funktion von vier Elementen spricht, indem er das eine Argument komplex annimmt und in seine beiden Bestandteile spaltet. Die erste funktionentheoretische Behandlung des Gegenstandes — nachdem die mustergültigen Arbeiten von Riemann und Hurwitz betreffend zwei Spezialfälle vorlagen — geschah wohl durch die Arbeit des Verfassers (Acta math. Bd. 11).

3) daselbst, Bd. 90.

Berechnungsweise der **Malmstenschen** Reihe links in (1) und zwar für verhältnismäßig kleine u verfügte.

Entwicklungen zur Berechnung der Reihe des **Malmstén-Lipschitzschen** Typus sind zwar vorhanden[1]), und zwar ist z. B. für $0 < v < 1$

$$(2)\quad \sum_{m=0}^{\infty}(m+v)^{s-1}e^{-u(m+v)} = \frac{\Gamma(s)}{u^s} + a_0 - a_1 u + a_2 u^2 - a_3 u^3 + \cdots,$$

wobei der Konvergenzradius gleich 2π ist und die Koeffizienten durch die Funktionen der komplexen Veränderlichen s definiert sind, die als Summen oder analytische Fortsetzungen der Reihen

$$a_p = \frac{2\Gamma(s+p)}{p!\,(2\pi)^{s+p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2nv - \frac{s+p}{2}\right)\pi}{n^{s+p}}$$

vollständig definiert sind.

Um die Formel (2) zur Berechnung der linken Seite von (1) zu verwenden, müßte man $w = u\omega$ setzen, dann ω auf die Form $a + v$ bringen, wobei $0 < v < 1$ und a eine positive ganze Zahl bedeutet; alsdann unterscheidet sich die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty}(m+v)^{-s}e^{-u(m+v)}$ von der folgenden $\sum_{m=0}^{\infty}(m+\omega)^{-s}e^{-u(m+\omega)}$ nur um ihre ersten a Glieder, die also zu berechnen blieben, um den Wert der linken Seite von (1) zu erhalten. Man könnte sich sogar mit dem Grenzfall $v = 1$ von (2) begnügen, in welchem

$$a_p = \frac{2\Gamma(s+p)}{p!\,(2\pi)^{s+p}}\zeta(s+p)\cos\frac{s+p}{2}\pi$$

ist; dieser Fall hätte den Vorteil, daß die Koeffizienten in der Entwicklung

$$(2^0)\quad \sum_{m=1}^{\infty} m^{s-1}e^{-mu} = \frac{\Gamma(s)}{u^s} + \sum_{0}^{\infty}(-1)^p\,\frac{2\Gamma(s+p)\cos\frac{s+p}{2}\pi}{p!\,(2\pi)^{s+p}}\zeta(s+p)\,u^p$$

bloß von s abhängen und die Berechnung auf eine Tabelle der Funktion $\zeta(s)$ zurückführbar wäre. Alsdann müßte man für ω eine ganze Zahl $a = \frac{w}{u}$ setzen, um die Berechnung von (1) vermöge der Entwicklung (2^0) zu bewerkstelligen.

1) Abgeleitet in meinem Aufsatz Nr. 28 des III. Jahrgangs der Rozpravy (II. Klasse) der Prager Akademie, p. 2 und 3 des Sonderabdrucks (1894).

Die Behandlung der Entwicklung (1) vereinfacht sich wesentlich, wenn man darin $s = 1$ nimmt; alsdann geht $Q(1-s, w)$ in das Integral

$$Q(0, w) = \int_w^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = -li(e^{-w})$$

über, und die Formel (1) kann wie folgt geschrieben werden:

$$(3) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-(m+\omega)u}}{m+\omega} = Q(0, \omega u) + \frac{e^{-\omega u}}{2\omega} + e^{-\omega u} \sum_{\mu} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{2\mu\,\omega^{2\mu}} \sum_{\alpha=0}^{2\mu-1} \frac{w^\alpha}{\alpha!},$$
$$(w = \omega u;\ \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Setzt man hier für ω eine positive ganze Zahl a ein, so berechnet sich die linke Seite vermöge der logarithmischen Reihe durch den Ausdruck

$$-\log(1-e^{-u}) - \sum_{\nu=1}^{a-1} \frac{e^{-\nu u}}{\nu}.$$

Die sich so darbietende halbkonvergente Bestimmung des Integrallogarithmus

$$(4) \int_w^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = \log \frac{1}{1-e^{-u}} - \sum_{\nu=1}^{a-1} \frac{e^{-\nu u}}{\nu} - \frac{e^{-w}}{2a} + e^{-w} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \frac{B_\mu}{2\mu a^{2\mu}} \sum_{\alpha=0}^{2\mu-1} \frac{w^\alpha}{\alpha!}$$
$$\left(u = \frac{w}{a};\ \mu = 1, 2, 3, \ldots\right)$$

habe ich 1901 im VIII. Bandes des Intermédiaire des mathématiciens (Question 2155) ohne Beweis mitgeteilt, während die Begründung der allgemeineren Formel (1) den Schluß einer demnächst im 130. Bande des Crelleschen Journals erscheinenden Abhandlung bildet. Der Umstand, daß die Divergenz der Entwicklung (4) eigentlich auf Konstanten beruht, hat mir nicht entgehen können, denn für größere μ ist $\sum_0^{2\mu-1} \frac{w^\alpha}{\alpha!}$ beinahe gleich e^w, so zwar daß der Unterschied $\sum_{\alpha=2\mu}^{\infty} \frac{w^\alpha}{\alpha!}$ nach Multiplikation mit $\frac{B_\mu}{2\mu a^{2\mu}}$ das allgemeine Glied einer konvergierenden Reihe bildet, sobald $\frac{w}{a} = u$ kleiner als 2π bleibt. Allein da mir der Gebrauch der Formel lediglich für $a > 4$ vorschwebte, so hatte die Trennung des konstanten halbkonvergenten Teiles von dem konvergenten veränderlichen Teile für mich kein unmittelbares Interesse. Als ich nun durch die Güte des Herrn Krause in Kenntnis der Resultate seiner Abhand-

lung (s. oben S. 36) gesetzt wurde, unternahm ich es, meine ursprüngliche Untersuchung für den Spezialfall des Integrallogarithmus hier auseinanderzusetzen und sie durch die eben angedeutete Trennung zu ergänzen, wobei namentlich der Umstand hervorgehoben werden mag, daß sie auch bei allgemeinen nicht ganzen a gelingt und die Ausdehnung des Resultats auf den viel wichtigeren Fall der Funktion $li(e^{+w})$ ermöglicht.

Es seien a, u zwei beliebige reelle positive Größen, und es werde mit $F(a, u)$ die durch die offenbar konvergierende unendliche Reihe

$$F(a, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(a+n)u}}{a+n} \tag{5}$$

definierte Funktion der beiden Veränderlichen a und u bezeichnet.

Diese Reihe verwandle man in ein bestimmtes Integral vermöge der Gleichung

$$\frac{1}{a+n} = \int_0^{\infty} e^{-(a+n)z}\, dz;$$

es kommt

$$F(a, u) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a(u+z)}\, dz}{1 - e^{-(u+z)}}. \tag{6}$$

Hier machen wir von der Formel

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x} + \tfrac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{(2\mu)!} x^{2\mu-1} + (-1)^n \Theta_n \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+1}$$

Gebrauch, wobei $0 < \Theta_n < 1$. Es entsteht so aus (6) die Gleichung

$$F(a, u) = \int_0^{\infty} e^{-a(u+z)} \frac{dz}{u+z} + \tfrac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-a(u+z)}\, dz$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{(2\mu)!} \int_0^{\infty} e^{-a(u+z)} (u+z)^{2\mu-1}\, dz + R_n,$$

wobei

$$(-1)^n R_n = \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!} \Theta \int_0^{\infty} e^{-a(u+z)} (u+z)^{2n+1}\, dz, \qquad (0 < \Theta < 1).$$

Nun ist

$$\int_0^{\infty} e^{-a(u+z)} \frac{dz}{u+z} = \int_{au}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}, \qquad \int_0^{\infty} e^{-a(u+z)} (u+z)^k\, dz = \frac{1}{a^{k+1}} \int_{au}^{\infty} e^{-x} x^k\, dx,$$

also bekommen wir die Gleichung

$$(7)\quad F(a,u)=\int_{au}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2a}e^{-au}+\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!\,a^{2\mu}}\int_{au}^{\infty} e^{-x}x^{2\mu-1}dx+R_n,$$

wobei noch bemerkt werden möge, daß

$$(-1)^n R_n = \frac{B_{n+1}\,\Theta}{(2n+2)!\,a^{2n+2}}\int_{au}^{\infty} e^{-x}x^{2n+1}\,dx.$$

Diese Formel (7) zeigt, wie man die Berechnung der unendlichen Reihe (5) auf die des Integrallogarithmus zurückführen kann, sobald der Rest R_n vernachlässigt werden darf; denn die auf der rechten Seite von (7) auftretenden Integrale drücken sich in geschlossener Gestalt aus, und zwar ist

$$\int_{w}^{\infty} e^{-x}x^m\,dx = m!\,e^{-w}\left[1+\frac{w}{1!}+\frac{w^2}{2!}+\cdots+\frac{w^m}{m!}\right].$$

Ich bemerke nun, daß die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!\,a^{2\mu}}\int_{0}^{au} e^{-x}x^{2\mu-1}\,dx$$

konvergiert, falls $0<u<2\pi$ ist. Benützt man die Zerlegung

$$\int_{au}^{\infty} e^{-x}x^{2\mu-1}\,dx = (2\mu-1)! - \int_{0}^{au} e^{-x}x^{2\mu-1}\,dx,$$

so ergibt sich aus (7)

$$F(a,u)=\int_{au}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2a}e^{-au}-\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!\,a^{2\mu}}\int_{0}^{au} e^{-x}x^{2\mu-1}\,dx$$
$$+\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{2\mu\,a^{2\mu}}+R_n.$$

Die aus den Integralen zusammengesetzte Reihe wird unter der Annahme $0<u<2\pi$ konvergent für $n=\infty$, und derjenige Bestandteil der rechten Seite, der den Charakter der halben Konvergenz verursacht, ist von u unabhängig; es liegt die Vermutung nahe, daß nach Ersetzen des „konvergenten“ Teiles durch die unendliche Reihe der Rest R_n sich zu einer von u unabhängigen Größe kompensiert, d. h. die Größe

$$(\mathrm{a})\qquad R_n' = \sum_{\mu=n+1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!\,a^{2\mu}}\int_{0}^{au} e^{-x}x^{2\mu-1}\,dx + R_n$$

von u nicht abhängt. Um dies zu ergründen, beachten wir, daß nach der Definition (5)

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\sum_{0}^{\infty} e^{-(a+n)u} = -\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}$$

und demnach aus (7) durch Differentiation nach u

$$\frac{\partial R_n}{\partial u} = -\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} + \frac{1}{u} e^{-au} + \tfrac{1}{2} e^{-au} + \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{(2\mu)!} u^{2\mu-1} e^{-au}$$

folgt; mit Hilfe dieser Darstellung von $\frac{\partial R_n}{\partial u}$ läßt sich die Größe (a) nach u differenzieren, und wir bekommen so

$$\frac{\partial R_n'}{\partial u} = -\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} + \frac{1}{u} e^{-au} + \tfrac{1}{2} e^{-au} + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{(2\mu)!} u^{2\mu-1} e^{-au},$$

was wegen der Identität

$$\frac{1}{1-e^{-u}} = \frac{1}{u} + \tfrac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{(2\mu)!} u^{2\mu-1} \qquad (|u| < 2\pi)$$

identisch verschwindet.

Wir haben somit anstelle von (7), wenn $au = w$ geschrieben wird,

$$(7^0) \quad \begin{cases} F(a, u) = \varphi(a) + \int_w^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2a} e^{-w} \\ -\sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu e^{-w}}{2\mu a^{2\mu}} \left(e^w - 1 - \frac{w}{1!} - \frac{w^2}{2!} - \cdots - \frac{w^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}\right), \end{cases}$$

wobei für die Funktion $\varphi(a)$ die halbkonvergente Entwicklung

$$\text{(b)} \qquad \varphi(a) = \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{2\mu a^{2\mu}} + R_n'$$

vorliegt. Multipliziert man (7^0) auf beiden Seiten mit e^{au} und differenziert nach a das Resultat, so entsteht

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nu}}{(a+n)^2} = e^{au} \varphi'(a) - u e^{au} \varphi(a) + u e^{au} \int_{au}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2}$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{B_m u}{2m a^{2m}} \left(e^{au} - \sum_{\nu=0}^{2m-2} \frac{a^\nu u^\nu}{\nu!}\right)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{B_m}{a^{2m+1}} \left(e^{au} - \sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{a^\nu u^\nu}{\nu!}\right);$$

hier läßt sich nun der Grenzübergang zu $u = 0$ ausführen, und wir erhalten unter der Bezeichnung

$$\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} \text{ wegen } \psi'(a) = \sum_0^\infty \frac{1}{(a+n)^2}$$

das Resultat

$$\varphi'(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} - \psi'(a),$$

und hieraus durch Integration

$$\varphi(a) = \log a - \frac{1}{2a} - \psi(a) + \text{const}.$$

Für große a ist nach (b) $\varphi(a)$ beliebig klein; und somit ist die Konstante gleich Null, d. h.

$$\varphi(a) = \log a - \frac{1}{2a} - \psi(a).$$

Wir haben somit die merkwürdige Entwicklung der Größe (5):

$$(7^*) \quad \begin{cases} F(a, u) = \log a - \dfrac{1}{2a} - \psi(a) + \displaystyle\int_w^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} + \frac{1}{2a}e^{-w} \\ \quad - \displaystyle\sum_{m=1}^\infty (-1)^{m-1} \frac{B_m e^{-w}}{2m\, a^{2m}} \left(e^w - \sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{w^\nu}{\nu!}\right), \end{cases}$$

in welcher $w = au$, $a > 0$, $0 < u < 2\pi$ vorausgesetzt wird, und wie üblich $\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$.

Nun ist bekanntlich

$$-\int_w^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} = C + \log w + \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m w^m}{m!m},$$

und es folgt aus (7*) die Identität

$$C + \log u + \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \frac{w^m}{m!m} + \sum_{n=0}^\infty \frac{e^{-(a+n)u}}{a+n}$$
$$= -\frac{1}{2a} - \psi(a) + \frac{1}{2a}e^{-w} - \sum_{m=1}^\infty (-1)^{m-1} \frac{B_m e^{-w}}{2m\, a^{2m}} \left(e^w - \sum_0^{2m-1} \frac{w^\nu}{\nu!}\right).$$

In derselben sind bei positivem u des Intervalls $(0 \ldots 2\pi)$ beide Seiten eindeutige analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen a; wir bekommen daher eine richtige Gleichung, wenn wir darin a in $-a$ verwandeln und nunmehr $a > 0$ voraussetzen. Da ferner

$$\psi(a) - \psi(-a) = -\frac{1}{a} - \pi \cot a\pi,$$

also

$$\frac{1}{2a} - \psi(-a) = -\frac{1}{2a} - \pi \cot a\pi - \psi(a),$$

und

$$li(e^w) = C + \log w + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m!\,m},$$

so erhalten wir die Gleichung

$$(8) \quad \begin{cases} li(e^w) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n-a)u}}{n-a} = \log a - \frac{1}{2a} - \pi \cot a\pi - \psi(a) + \frac{1}{2a} e^w \\ \qquad - \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{B_m e^w}{2m\,a^{2m}} \left(e^{-w} - \sum\limits_{\nu=0}^{2m-1} \frac{(-w)^\nu}{\nu!} \right) \end{cases}$$

$$(w = au;\quad 0 < u < 2\pi;\quad a > 0).$$

Dabei ist in üblicher Weise

$$li(e^w) = \mathrm{val}\cdot p \cdot \int_{-\infty}^{w} e^x \frac{dx}{x}$$

gesetzt worden. Die Gleichung (8) setzt in merkwürdiger Weise die Funktionen $li(e^w)$, $F(-a, u)$ und $\psi(a)$ in Zusammenhang, und sie liefert, wenn man darin $a = s + \xi$ nimmt, wobei s eine positive ganze Zahl ist und ξ unendlich klein vorausgesetzt wird, eine merkwürdige Formel zur Berechnung von $li(e^w)$.[1]) Wir haben zunächst

$$\pi \cot a\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n-a)u}}{n-a} = \pi \cot \xi\pi - \frac{e^{u\xi}}{\xi} - \sum_{n=1}^{s-1} \frac{e^{(s-n)u}}{s-n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mu}}{m} + (\xi),$$

wobei (ξ) eine unendlich kleine Größe bedeutet. Die rechte Seite wird nach dem Grenzübergang

$$-u - \sum_{m=1}^{s-1} \frac{e^{mu}}{m} - \log(1 - e^{-u}),$$

und wir erhalten daher aus (8)

$$(9) \quad \begin{cases} li(e^w) = u + \sum\limits_{m=1}^{s-1} \frac{e^{mu}}{m} + \log(1 - e^{-u}) - \psi(s) - \frac{1}{2s} + \log s \\ \qquad + \frac{e^w}{2s} - \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{B_m e^w}{2m\,s^{2m}} \left(e^{-w} - \sum\limits_{\nu=0}^{2m-1} \frac{(-w)^\nu}{\nu!} \right), \end{cases}$$

$$\left(u = \frac{w}{s} < 2\pi,\ s \text{ positive ganze Zahl}\right).$$

---

1) Rozpravy (Prag), V. B., Nr. 14 (II. Klasse).

Bei Anwendung dieser Formel muß die Zahl s wesentlich größer als w genommen werden, da sonst viele Glieder in der Reihe wegen des Faktors e^w zu groß wären. Ist z. B. w in der Nähe von 5, so daß e^w ungefähr 150 beträgt, so wird die Wahl $s = 10$ ziemlich zweckmäßig, und man wird sich mit 3 Gliedern der Reihe begnügen können, um 8 Stellen genau zu erhalten.

Eine ähnliche Formel zur Berechnung von $li(e^{-w})$ liefert Gleichung (7*), wenn man für a eine ganze Zahl setzt; denn es ist alsdann

$$F(a, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mu}}{m} - \sum_{m=1}^{a-1} \frac{e^{-mu}}{m} = -\log(1 - e^{-u}) - \sum_{m=1}^{a-1} \frac{e^{-mu}}{m}.$$

Auf diese Weise entsteht die Entwicklung des Herrn Krause, während aus (7) das von mir im Jahre 1901 im Intermédiaire des mathématiciens mitgeteilte Resultat (4) hervorgeht; es war dort die unendliche Reihe mit der halbkonvergenten Reihe für $\psi(a)$ zusammengeschmolzen. Immerhin sind die Fälle nicht selten, wo man die halbkonvergente Entwicklung wird vorziehen müssen.

Für die Funktion $F(a, u)$ habe ich im Jahre 1896 eine andere Entwicklung abgeleitet, in welcher zwar $\psi(a)$, nicht aber der Integrallogarithmus vorkommt. Die Formel lautete

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{z^{m+x}}{m+x} = z^{x-1} \sum_{0} \psi(m+1) \binom{x-1}{m} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^m - \log(1-z) - \psi(x).$$

Setzt man hier $z = e^{-u}$ und integriert nach x von a bis $a + 1$, so kommt

$$\int_a^{\infty} e^{-ux} \frac{dx}{x} = e^u \sum_{0}^{\infty} \psi(m+1)(e^u - 1)^m \int_a^{a+1} \binom{x-1}{m} e^{-ux} dx - \log(1 - e^{-u}) - \log a.$$

Weil bei unbestimmtem z

$$\sum_{0}^{\infty} z^m \int_a^{a+1} \binom{x-1}{m} e^{-ux} dx = \int_a^{a+1} (1+z)^{x-1} e^{-ux} dx$$

den Wert

$$e^{-au}(1+z)^{a-1} \frac{1 - e^{-u}(1+z)}{u - \log(1+z)}$$

hat, so wird die Entwicklung

$$(10) \qquad (1+z)^{a-1} \frac{e^u - (1+z)}{u - \log(1+z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu$$

uns die Größen C_ν liefern, für welche die Gleichung besteht

$$(10^1)\quad \int_{au}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} = -\log a - \log(1-e^{-u}) + e^{-au}\sum_{m=0}^{\infty}\psi(m+1)C_m(e^u-1)^m.$$

Die Funktion (10) bleibt synektisch im ganzen Einheitskreise ($|z|<1$), und die Reihe nimmt für $z=e^u-1$ den Wert e^{au} an; d. h.

$$e^{-au}\sum_{m=0}^{\infty} C_m(e^u-1)^m = 1.$$

Davon kann man Gebrauch machen, um aus den Koeffizienten

$$\psi(m+1) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + \psi(1)$$

den Teil $\psi(1)$ zu entfernen, so daß man schließlich hat, weil $\psi(1)$ die mit Minuszeichen genommene Eulersche Konstante C ist:

$$(10^2)\quad \int_{au}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} = -C - \log a - \log(1-e^{-u})$$
$$+ e^{-au}[C_1(e^u-1) + (1+\tfrac{1}{2})C_2(e^u-1)^2 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})C_3(e^u-1)^3 + \cdots].$$

Man kann auch schreiben

$$C_m = \int_0^1 \binom{a+x-1}{m} e^{(1-x)u}\,dx = \int_0^1 \binom{a-\xi}{m} e^{u\xi}\,d\xi,$$

und dies ist nach dem Mittelwertsatze

$$(10^3)\quad C_m = \frac{e^u-1}{u}\binom{a-\xi}{m}. \qquad (0<\xi<1)$$

Bezeichnet man mit $\overline{C}_m$ die Größen C_m, in welchen u durch $-u$ ersetzt ist, so erschließt man aus (10^2) leicht

$$(10^4)\quad \begin{cases} li(e^{au}) = C + \log au + \log\dfrac{e^u-1}{u} + \\ e^{au}[\overline{C}_1(1-e^{-u}) - (1+\tfrac{1}{2})\overline{C}_2(1-e^{-u})^2 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})\overline{C}_3(1-e^{-u})^3 - \cdots], \\ \displaystyle\sum_0^{\infty}\overline{C}_m z^m = \frac{1+z-e^{-u}}{u+\log(1+z)}(1+z)^{a-1}. \end{cases}$$

Diese Entwicklungen (10) konvergieren nur für recht kleine u, also für kleine Werte $w=au$, für welche die ursprünglichen nach Potenzen von w fortschreitenden Reihen gut brauchbar sind. Sie bieten demnach kaum einige Vorteile, weshalb wir bei ihnen nicht verweilen.

Freiburg (Schweiz), den 28. April 1905.

Analytisch-geometrische Ableitung der Realitätsbedingungen für die Wurzeln der Gleichungen vierten Grades.

Von ERNST ECKHARDT in Homburg v. d. H.

Eine *vollständige* Bestimmung der Realitätsbedingungen für die Wurzeln der Gleichungen vierten Grades auf rein analytisch-geometrischem Wege ist zur Zeit nicht vorhanden. Wohl aber hat man die analytische Geometrie dazu benutzt, die bei diesen Gleichungen möglichen Fälle zu beleuchten.[1]) Hier ist vor allem Kronecker zu erwähnen, der die Diskriminante dieser Gleichungen

$$D = 4(a^2 + 12c)^3 - (2a^3 - 72ac + 27b^2)^2$$

gleich Null setzt, die Größen a, b, c als Koordinaten eines rechtwinkligen Systems auffaßt und so zu der Diskriminantenfläche, einer Fläche 5. Grades, gelangt, durch deren Betrachtung sich die einzelnen Fälle erledigen lassen. In seiner Algebra, Bd. I, S. 279 gibt Herr H. Weber eine Abbildung und Erläuterung derselben. Diese Betrachtung Kroneckers setzt außer der Flächentheorie auch die *Auflösung* der Gleichungen 4. Grades voraus.

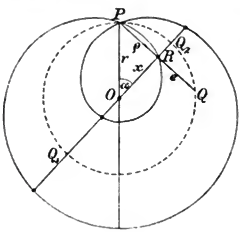


Fig. 1.

In dieser Arbeit soll nun die Behandlung der Gleichungen vierten Grades von vornherein eine analytisch-geometrische sein. Dabei werden sich die möglichen Fälle von selbst ergeben und die Diskriminante wird jetzt umgekehrt aus der Behandlung folgen.

Die Untersuchung setzt bloß die Grundlagen der analytischen Geometrie der Ebene voraus.

1. *Die Kurve und ihre Polargleichung.* — Die zugrunde liegende Kurve ist die bekannte Pascalsche Schnecke, eine Konchoide mit kreisförmiger Basis, die schon oft behandelt worden ist und deren mannigfache Eigenschaften und Anwendungen in dem Buche von Herrn G. Loria

1) Matthiessen: Grundzüge der antiken und modernen Algebra. S. 953—963. Barth: Mechanisch-graphische Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichung. Archiv (2) 1, 1—45. Hoppe: Bezirke der drei Wurzelformen der Gl. 4. Grades. Archiv (2) 14, 398—404.

über „ebene Kurven" zusammengestellt sind.[1]) Ist O der Mittelpunkt der Basis, r ihr Radius, P der Pol, PO der Nullstrahl und e eine konstante, positiv und negativ zu nehmende Strecke, so gilt für einen beliebigen Punkt R der Schnecke, wenn $PR = \varrho$ und $\sphericalangle RPO = \varphi$, die Polargleichung

$$\varrho = 2r\cos\varphi + e.$$

Ist $|e| < r$, so hat die Kurve die Gestalt der Figur 1. Die innere Schleife schließt den Mittelpunkt ein.

Wird $r < |e| < 2r$, so erhält man Figur 2. Die innere Schleife schließt den Mittelpunkt aus.

Für $|e| = 2r$ wird P ein Rückkehrpunkt.

Im Falle $|e| > 2r$ besteht die Kurve aus einem isolierten Punkte P und einer geschlossenen Linie. Figur 4. Dies erkennt man, wenn man, wie dies auch Herr Loria tut, die kartesische Gleichung der Schnecke

$$(\xi^2 + \eta^2 - 2r\xi)^2 = e^2(\xi^2 + \eta^2)$$

betrachtet.

Ist e *rein imaginär*, so besteht die Kurve nur aus *einem* isolierten Punkte P: $(\xi = 0,\ \eta = 0)$.

Diese Tatsache hat Herr Loria nicht erwähnt. Ohne sie ist die Behandlung der Gleichungen 4. Grades mit *vier imaginären* Wurzeln nicht möglich.

Für die fernere Untersuchung ist es nun notwendig, die Polargleichung der Schnecke für O *als Nullpunkt* und OP als Nullstrahl aufzustellen.

Ist $OR = x$ und $\sphericalangle POR = \alpha$, so hat man $\varrho^2 = x^2 + r^2 - 2rx\cos\alpha$ und nach dem Sehnensatze $(r + x)\cdot(r - x) = \varrho\cdot e$, sodaß die Polargleichung für O als Nullpunkt lautet:

$$(r^2 - x^2)^2 = e^2(x^2 + x^2 - 2rx\cos\alpha),$$

oder

$$x^4 - (2r^2 + e^2)x^2 + 2re^2x\cos\alpha + r^2(r^2 - e^2) = 0.$$

Mit dieser Polargleichung wird die zu untersuchende Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, in der a, b, c reell sein sollen, identisch, wenn

$$\text{I. } 2r^2 + e^2 = -a, \quad \text{II. } 2re^2\cos\alpha = b, \quad \text{III. } r^2(r^2 - e^2) = c.$$

Aus I und III folgt für die zur Konstruktion der Schnecke dienenden Größen r und e

$$r_{1,2}^2 = \tfrac{1}{6}\left(-a + \sqrt{a^2 + 12c}\right), \quad e_{1,2}^2 = \tfrac{1}{3}\left(-2a - \sqrt{a^2 + 12c}\right),$$
$$r_{3,4}^2 = \tfrac{1}{6}\left(-a - \sqrt{a^2 + 12c}\right), \quad e_{3,4}^2 = \tfrac{1}{3}\left(-2a + \sqrt{a^2 + 12c}\right).$$

---

1) G. Loria. Ebene Kurven. Leipzig, Teubner, 1902, Bd. 1, S. 136 ff.

Demnach ist zunächst der Fall $a^2 + 12c < 0$ auszuscheiden, da dann die ganze Kurve imaginär wäre. Ferner ist aber auch wegen $\cos\alpha = \frac{b}{2r_\nu e_\nu^2}$, $\nu = 1, 2, 3, 4$, der Fall $|b| > |2r_\nu e_\nu^2|$ auszuschließen. Diese beiden Fälle werden in der Fortsetzung behandelt.

2. *Die Gleichungen mit vier reellen Wurzeln.* — Soll die vorgelegte reduzierte Gleichung vierten Grades vier reelle Wurzeln besitzen, so muß die mit ihr identische Polargleichung der Kurve $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ für ein in bestimmten Grenzen liegendes α vier reelle Radienvektoren haben. Eine unter dem Winkel α gegen die Nullachse gezogene Gerade muß also die Kurve in vier reellen Punkten schneiden. Hierzu ist zunächst nötig, daß die Kurve selbst reell ist, daß also von den Wertepaaren r_ν und e_ν in Nr. **1** wenigstens *ein* Paar *reell* ist. Außer $a^2 + 12c \geq 0$ muß, wie am einfachsten aus $2r^2 + e^2 = -a$ hervorgeht, zunächst a *negativ* sein. Die weitere Entscheidung über die Realität der r_ν und e_ν hängt davon ab, ob $c \gtrless 0$ ist.

a) $c > 0$. — In diesem Fall ist, da $a < 0$ und $a^2 + 12c > 0$, die Größe $r_{3,4}$ *imaginär.* Die Wertepaare $r_{3,4}$ und $e_{3,4}$ sind also zu verwerfen. Es bleiben die Werte $r_{1,2}$ und $e_{1,2}$ übrig. Von ihnen ist $r_{1,2}$ unter den gegebenen Bedingungen stets reell, $e_{1,2}$ *nur dann*, wenn $-2a - \sqrt{a^2 + 12c} \geq 0$ oder $a^2 - 4c \geq 0$ ist.

Aus $r_{1,2}^2 - e_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + 12c}) > 0$ folgert man, daß $r_{1,2}^2 > e_{1,2}^2$, und, da nur das positive r_1 zur Konstruktion gebraucht wird, daß $r_1 > |e_{1,2}|$. Die innere Schleife schließt also nach Nr. **1** den Mittelpunkt O ein. Den hierher gehörigen Gleichungen liegt also die Figur 1 zugrunde. Da für α nach Nr. **1** die Beziehung

$$\cos\alpha = \frac{b}{2r_1 e_{1,2}^2}$$

gilt, so ist α und mit ihm die Gerade OR solange reell, als $-2r_1 e_{1,2}^2 \leq b \leq +2r_1 e_{1,2}^2$ ist. Jede Gerade unter dem $\sphericalangle\,\alpha$ gegen OP bestimmt dann vier reelle Radienvektoren, und man erhält das folgende Resultat:

Solange $a < 0$, $c > 0$, $a^2 - 4c \geq 0$, $-2r_1 e_{1,2}^2 \leq b \leq +2r_1 e_{1,2}^2$, hat die Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ vier reelle Wurzeln.

Die Bedingung für b geht durch Quadrieren über in $b^2 \leq 4r_1^2 \cdot e_{1,2}^4$, oder, wenn man die Werte von r_1^2 und $e_{1,2}^2$ einführt,

$$27b^2 \leq 2\left(-a + \sqrt{a^2 + 12c}\right)\left(4a^2 + a^2 + 12c + 4a\sqrt{a^2 + 12c}\right),$$

$$27b^2 \leq -2a^3 + 72ac + 2(a^2 + 12c)\sqrt{a^2 + 12c},$$

$$(2a^3 - 72ac + 27b^2)^2 \leq 4(a^2 + 12c)^3.$$

Nach der Einleitung ist also die Bedingung für b identisch mit der für die Diskriminante $D \geqq 0$.

Den Werten $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 180^0$ entsprechen die Gleichungen mit einer Doppelwurzel. Für $\alpha = 90^0$ sind je zwei Wurzeln entgegengesetzt gleich.

b) $c < 0$. — Da die Bedingung $a^2 - 4c > 0$ immer erfüllt ist, so genügt für die Realität von $r_{1,2}$ und $e_{1,2}$, daß $a < 0$ und $a^2 + 12c \geqq 0$ ist. Unter den beiden letzten Bedingungen sind aber jetzt auch $r_{3,4}$ und $e_{3,4}$ reell, und man hat demnach für die Konstruktion der Kurve ein positives r_1 mit zugehörigem $e_{1,2} = \pm |e_1|$ und ein positives r_3 mit zugehörigem $e_{3,4} = \pm |e_3|$ zur Verfügung. — Die verschiedenen Zeichen der Größen e beziehen sich auf den Sinn der Abtragung dieser Größen (Nr. **1**).

Beachtet man nun, daß infolge der leicht zu erweisenden Ungleichungen

$$r_1^2 < e_{1,2}^2 < (2r_1)^2 \quad \text{und} \quad e_{3,4}^2 > (2r_3)^2,$$

so erhält man unter Zugrundelegung von r_1 und $\pm |e_1|$ die Kurve in Fig. 2 nach Nr. **1**, bei Benutzung von r_3 und $\pm |e_3|$ dagegen die Fig. 4, also eine geschlossene Kurve ohne Schleife und einen isolierten Doppelpunkt.

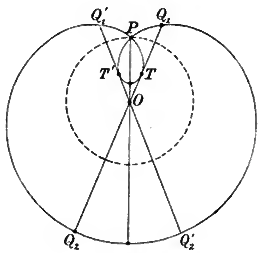


Fig. 2.

Nur die erstere Kurve kann für vier reelle Wurzeln in Betracht kommen; denn die letztere hat nur für $\alpha = 0^0$ bez. $\alpha = 180^0$ vier reelle Radienvektoren.

Die Fig. 2 sei also aus den Größen r_1 und $\pm |e_1|$ konstruiert, sodaß für *jeden ihrer Punkte* die Polargleichung

$$x^4 - (2r_1^2 + e_1^2)x^2$$
$$+ 2r_1 e_1^2 \cos\alpha \cdot x + r_1^2(r_1^2 - e_1^2) = 0$$

gilt, oder in abgekürzter Form $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$. Man erkennt aus der Figur, daß α für vier reelle Radienvektoren auf das Gebiet zwischen den von O an die innere Schleife gezogenen Tangenten beschränkt ist. *Es ist nun für die weitere Untersuchung wichtig, die vier Radienvektoren dieser Tangenten festzustellen.* Dies geschieht am einfachsten durch folgende Überlegung:

Ist $OT = \varrho$ die Länge der einen Tangente, und schneidet sie die äußere Schleife in Q_1 und Q_2, so muß wegen $2\,OT + OQ_1 + OQ_2 = 0$ OQ_1 von der Form $-\varrho + \varepsilon$ und OQ_2 von der Form $-\varrho - \varepsilon$ sein.

Die zu der Doppelwurzel ϱ und den Wurzeln $-\varrho \pm \varepsilon$ gehörige Gleichung lautet aber

$$x^4 - (2\varrho^2 + \varepsilon^2)x^2 + 2\varrho\varepsilon^2 \cdot x + \varrho^2(\varrho^2 - \varepsilon^2) = 0.$$

Da nun $OT = \varrho$ ein Radiusvektor der Kurve ist, so muß diese Gleichung mit der Polargleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ identisch sein, was für ϱ und ε zu den in Nr. 2 gegebenen Ausdrücken für r_ν und e_ν führt. Es muß also sein

$$\varrho_{1,2}^2 \equiv r_{1,2}^2, \quad \varepsilon_{1,2}^2 \equiv e_{1,2}^2; \quad \varrho_{3,4}^2 \equiv r_{3,4}^2, \quad \varepsilon_{3,4}^2 \equiv e_{3,4}^2.$$

Die Identitäten von $\varrho_{1,2}$ und $\varepsilon_{1,2}$ mit $r_{1,2}$ und $e_{1,2}$ beziehen sich auf die unter $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 180^0$ gezogene Gerade OP. Die übrigen Identitäten müssen daher für die Tangenten OT und OT' gelten.

Daraus folgt die interessante Tatsache, daß

$$OT = +r_3, \quad OQ_1 = -r_3 + e_3, \quad OQ_2 = -r_3 - e_3;$$
$$OT' = -r_3, \quad OQ_1' = r_3 - e_3, \quad OQ_2' = +r_3 + e_3.$$

Aus $b \equiv 2\varrho\varepsilon^2$ folgt dann *für die Grenzwerte von* b, daß $b_1' = -|2r_3e_3^2|$ und $b_1 = +2r_3e_3^2$ sein muß.

Durch Ausführung der Rechnung kann man zeigen, daß immer $2r_1e_1^2 \geqq 2r_3e_3^2$ ist.

Für $a < 0$, $a^2 + 12c > 0$, $b > 0$ sind demnach solange vier reelle Wurzeln vorhanden, als $2r_3e_3^2 \leqq b \leqq 2r_1e_1^2$.

Nach Nr. 1 ist dann $\cos\alpha$ bestimmt durch $2re^2 \cdot \cos\alpha = b$, worin r und e die Größen sind, aus denen die Kurve konstruiert wurde, also hier r_1 und e_1.

Im obigen Falle ist folglich $\cos\alpha$ eingeschlossen in die Grenzen

$$\frac{2r_1e_1^2}{2r_1e_1^2} \leqq \cos\alpha \leqq \frac{2r_3e_3^2}{2r_1e_1^2}.$$

Ist $a < 0$, $a^2 + 12c > 0$, $b < 0$, so sind vier reelle Wurzeln vorhanden, wenn die durch O gehende Gerade im Winkel POT' liegt, wenn also $-2r_1e_1^2 \leqq b \leqq -2r_3e_3^2$ ist.

3. *Grenzfälle bei den Gleichungen mit vier reellen Wurzeln.* — Zu den Grenzfällen sind alle die Fälle zu zählen, in denen entweder die durch O gehende Gerade eine *ausgezeichnete* Lage hat, oder in denen je nach der Größe von e in bezug auf r die Kurve *besondere Formen* annimmt.

Diese Fälle erledigen sich an der Hand der einzelnen Kurven wie folgt:

a) $|e| < r$ (Figur 1). — Ausgezeichnete Lagen treten ein für $\alpha = 0^0$, $\alpha = 90^0$, $\alpha = 180^0$. Da nach Nr. 2 nur $r_{1,2}$ und $e_{1,2}$ reell sind, so gilt

für α $2r_1e_1^2\cdot\cos\alpha=b$. Den Werten $\alpha=0^0$ und $\alpha=180^0$, bei denen also $b=\pm 2r_1e_1^2$, entspricht je eine Gleichung mit einer Doppelwurzel. Für $\alpha=90^0$ ist $b=0$, und die zugehörige Gerade schneidet je zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln aus. Die übrigen Bedingungen sind aus Nr. 2 a), $c>0$, zu entnehmen.

b) $r<|e|<2r$. — Es sind vier *ausgezeichnete* Lagen vorhanden, die, wenn $\alpha\leqq 180^0$, sich bestimmen aus $\cos\alpha=\pm 1$ und $\cos\alpha=\pm\frac{2r_3e_3^2}{2r_1e_1^2}$. Die zugehörigen Werte von b sind $b=\pm 2r_1e_1^2$ und $b=\pm 2r_3e_3^2$. Ihnen entsprechen vier Gleichungen mit je einer Doppelwurzel. Ordnet man die vier Wurzeln der Größe nach, so ergibt die Nullachse, oder die um 180⁰ gedrehte Nullachse je eine Gleichung, bei der die Doppelwurzel die 1. und 2. Stelle, bez. die 3. und 4. Stelle einnimmt. Die Tangenten OT und OT' liefern dagegen Gleichungen, bei denen die Doppelwurzel die 2. und 3. Stelle einnimmt. Die Bedingungen für a und c sind $a<0$ und $a^2+12c>0$.

c) $e=0$. — Die äußere und innere Schleife fallen mit dem Kreise zusammen. Die Kurve besteht aus einem Doppelkreis. Jede Gerade durch O bestimmt also zwei Doppelwurzeln. Da jetzt nach Nr. **1** $a=-2r^2$, $c=r^4$, $b=2re^2\cdot\cos\alpha=0$, so sind die hierher gehörigen Bedingungen

$$a<0,\quad a^2-4c=0,\quad b=0.$$

d) $e=r$. *Casus irreducibilis.* — Der Punkt O liegt *auf* der inneren Schleife. Jede Gerade durch O liefert also eine verschwindende Wurzel und drei davon verschiedene reelle Wurzeln. Die letzteren entsprechen der Gleichung

$$x^3+ax+b=0,\quad \text{da}\quad c=r^2(r^2-e^2)=0.$$

Aus $a=-3r^2$ und $b=2r^3\cos\alpha$ ergibt sich als Bedingung für drei reelle Wurzeln

$$a<0\quad \text{und}\quad \left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2=-\sin^2\alpha\leqq 0.$$

e) $e=2r$. *Drei gleiche Wurzeln.* — Die innere Schleife in Fig. 2 reduziert sich auf den Punkt P, und dieser wird ein Rückkehrpunkt. Nur die Geraden für $\alpha=0^0$ und $\alpha=180^0$ können noch vier reelle Wurzeln liefern. Für $\alpha=0^0$ erhält man drei *positive* gleiche, für $\alpha=180^0$ drei negative gleiche Wurzeln.

Aus $a=-6r^2$, $c=-3r^4$, $b=\pm 8r^3$ findet man als Bedingungen für drei gleiche Wurzeln

$$a<0,\quad a^2+12c=0,\quad 8a^3+27b^2=0.$$

f) $e=0$, $r=0$. — Die Doppelschleife reduziert sich auf den Punkt O, der dadurch ein vierfacher Punkt wird. Jeder Geraden

durch O entsprechen daher vier gleiche Wurzeln Null. Es ergibt sich, daß $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ sein muß.

4. *Die Gleichungen mit vier imaginären Wurzeln* (Fig. 3). Erteilt man der Größe e einen *rein* imaginären Wert, so bleiben die Koeffizienten der Polargleichung $x^4 + ax^2 + bx + c \equiv x^4 - (2r^2 + e^2)x^2 + 2r_1 e_1^2 \cos\alpha \cdot x + r^2(r^2 - e^2) = 0$ *reell.*

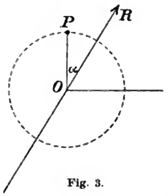


Fig. 3.

Die Kurve besteht aber jetzt, wie man am besten an der Form

$$(r^2 - x^2)^2 = e^2(r^2 + x^2 - 2rx\cos\alpha)$$

erkennt, nur aus *einem* reellen Doppelpunkte P, Fig. 3.

Für reelle Werte von x ist nämlich $(r-x)^2 > 0$, also um so mehr $r^2 + x^2 - 2rx\cos\alpha > 0$. Ist nun $e = i \cdot e_1$, also $e^2 = -e_1^2$, so ist die rechte Seite der Polargleichung *negativ*; die linke Seite $(r^2 - x^2)^2$ ist aber für reelle x positiv. Die Gleichung kann daher nur für solche Werte von x und α befriedigt werden, für welche jede Seite der Gleichung zugleich verschwindet. Dies geschieht

1) durch $\alpha = 0^0$ und die Doppelwurzel $x = r$,

2) „ $\alpha = 180^0$ „ „ „ $x = -r$.

Fall 1 und 2 bestimmen aber *denselben isolierten Punkt P als einzigen Repräsentanten der Kurve.*

Aus dieser merkwürdigen Tatsache folgt, daß die Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ so lange *vier imaginäre Wurzeln* hat, als eine reelle *nicht durch P* gehende Gerade OR vorhanden und e_ν rein imaginär ist. Zur Feststellung hiervon dienen die Gleichungen

$$2r^2 + e^2 = -a, \quad r^2(r^2 - e^2) = c, \quad 2re^2\cos\alpha = b.$$

Aus ihnen ersieht man zunächst, daß jetzt $a \gtrless 0$ sein kann, c dagegen *positiv* sein muß. Durch $c > 0$ werden aber die Wertepaare $r_{3,4}$ und $e_{3,4}$ in Nr. **1** ausgeschlossen, denn $r_{3,4}$ ist imaginär.

Demnach braucht nur untersucht zu werden, wann $e_{1,2}$ rein imaginär ist, oder $e_{1,2}^2 < 0$. Dies tritt ein, wenn

$$1)\ a > 0, \quad \text{oder} \quad 2)\ a < 0 \quad \text{und} \quad a^2 - 4c < 0.$$

Da $b = 2r_1 e_{1,2}^2 \cos\alpha$ und $0 < \alpha < 180^0$, so ist die Gerade OR reell, wenn

$$-|2r_1 e_{1,2}^2| < b < +|2r_1 e_{1,2}^2|.$$

Die Bedingungen für vier imaginäre Wurzeln sind demnach

$$a > 0, \quad c > 0, \quad \text{oder} \quad a < 0, \quad c > 0, \quad a^2 - 4c < 0$$

und

$$- |2r_1 e_{1,2}^2| < b < + |2r_1 e_{1,2}^2|.$$

Aus der Figur 3 ersieht man, daß die Fälle $b = \pm |2r_1 e_{1,2}^2|$ zu dem Gebiet mit zwei reellen und zwei imaginären Wurzeln gehören.

5. *Die Gleichungen mit zwei reellen und zwei imaginären Wurzeln.* — Sind die in Nr. 2 und Nr. 4 aufgestellten Bedingungen für vier reelle und vier imaginäre Wurzeln nicht erfüllt, so hat die biquadratische Gleichung nur *zwei* reelle oder nur *zwei* imaginäre Wurzeln. Die Fälle $a^2 + 12c < 0$ und $|b| > |2r_1 e_1^2|$ sind schon in Nr. 1 erwähnt und von der analytisch-geometrischen Behandlung zunächst ausgeschlossen worden. Für sie vergleiche man Archiv der Math. und Phys. (3) 7, 88 und 95.

Es bleibt daher noch der Fall $-2r_3 e_3^2 < b < 2r_3 e_3^2$ zu erledigen. Dies geschieht unter Zugrundelegung von Fig. 2 oder von Fig. 4. — Die Fig. 2 ist aus den Größen r_1 und $r_1 < e_2 < 2r_1$ konstruiert und ergab als das Gebiet für vier reelle Wurzeln die Geraden zwischen den Tangenten OT und OT', deren Lagen durch $\cos\alpha_1 = + \frac{2r_3 e_3^2}{2r_1 e_1^2}$ und $\cos\alpha_1' = - \frac{2r_3 e_3^2}{2r_1 e_1^2}$ bestimmt waren. Es ist also $\alpha_1' = 180^0 - \alpha_1$.

Wird nun in $\cos\alpha = \frac{b}{2r_1 e_1^2}$ (s. Nr. 1) $-2r_3 e_3^2 < b < 2r_3 e_3^2$, so ist $\alpha_1 < \alpha < 180^0 - \alpha_1$. Daraus folgt aber, daß die zu α gehörigen Strahlen nur zwei reelle Schnittpunkte und also auch nur zwei reelle Radienvektoren bestimmen können.

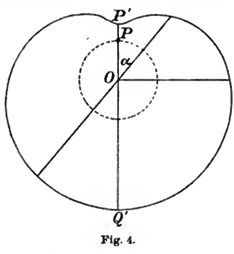


Fig. 4.

Behandlung dieses Falles mit Hilfe von Fig. 4. Die Fig. 4 ist im Gegensatze zu Fig. 2 aus den im Fall $c < 0$ ebenfalls reellen Werten r_3 und e_3 konstruiert; aber jetzt ist $e_3 > 2r_3$, und deshalb erhält man eine geschlossene Kurve ohne innere Schleife und einen isolierten Doppelpunkt (s. Nr. 1).

Nur die Nullachse und die Gerade $\alpha = 180^0$, für die $b = \pm 2r_3 e_3^2$ ist, bestimmen *vier* reelle Radienvektoren. Jede andere Gerade, für die $\cos\alpha = \frac{b}{2r_3 e_3^2}$, $-2r_3 e_3^2 < b < +2r_3 e_3^2$, ergibt bloß zwei reelle Radienvektoren.

(Fortsetzung folgt.)

Das Abrollen von Kurven bei geradliniger Bewegung eines Punktes.

Von P. Kokott in Sagan.

In der Aufgabe 75 des Archivs (3) 6, 341 habe ich das Beispiel einer rollenden Lemniskate behandelt, deren Mittelpunkt eine gerade Linie beschreibt. Daselbst ist ganz allgemein gezeigt, daß die feste Kurve die Gestalt hat

$$\xi = \int \frac{\eta f'(\eta) - f(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - f(\eta)^2}} d\eta,$$

wobei die Funktion f aus der beweglichen Kurve $M(x, y) = 0$ dadurch entsteht, daß man y vermittels $x^2 + y^2 = \eta^2$ eliminiert und dann inbezug auf x auflöst. In den meisten Fällen ist es bequemer, $\eta\psi(\eta)$ statt $f(\eta)$ zu setzen; man erhält dann

$$\xi = \int \frac{\eta\psi'(\eta)}{\sqrt{1 - \psi(\eta)^2}} d\eta.$$

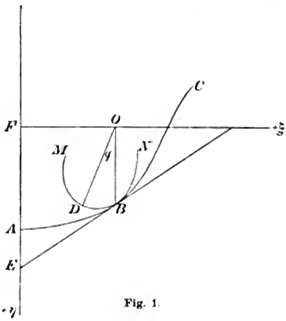


Fig. 1.

Im folgenden will ich eine Reihe bemerkenswerter Fälle angeben, da es sich um eine Kurveneigenschaft handelt, die noch wenig behandelt ist.

Für das Auffinden geeigneter Beispiele ist die Bemerkung von Wichtigkeit, daß auch umgekehrt die Gestalt der beweglichen Kurve gefunden werden kann, wenn die feste gegeben ist.

In der Tat, sei $\xi = \lambda(\eta)$ die feste Kurve ABC (Fig. 1) und $\varphi = \mu(r)$ die gesuchte rollende Linie in Polarkoordinaten, wobei OD dem Nullwerte von φ entsprechen möge, so ist $\sphericalangle OBE = BE\eta$, d.h. $r\frac{d\varphi}{dr} = \lambda'(\eta) = \lambda'(r)$ oder $\varphi = \int \frac{\lambda'(r)\,dr}{r}$.

1. Sei z. B. die feste Kurve $\xi = \int\limits_1^\eta \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1 - \eta^4}}$ in der Fig. 2 durch $RNSL$ dargestellt, so ist

$$\lambda'(\eta) = -\frac{\eta^2}{\sqrt{1 - \eta^4}}, \qquad \varphi = -\int \frac{r\,dr}{\sqrt{1 - r^4}},$$

woraus $r^2 = \cos 2\varphi$, also die *Lemniskate* folgt. Die Bewegung geht in der Weise vor sich, daß der Lemniskatenquadrant 1 sich auf RNF abrollt, dann in den Inflexionspunkten beider Kurven eine Durchdringung statt-

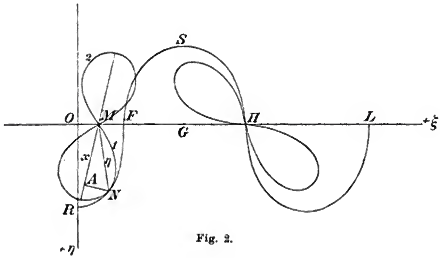


Fig. 2.

findet, sodann der Lemniskatenquadrant 2 sich auf der inneren Seite des Bogens FS abwickelt u. s. f. Während der ganzen Bewegung verschiebt sich M auf der Achse $O\xi$.

2. *Die Kardioide.* (Fig. 3.) — Ihre Gleichung ist $r = 1 + \cos\varphi$; die Winkel φ zählen von AB als Anfangslage aus. Da $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ und $r = \eta$ ist, so erhält man $x = \eta(\eta - 1)$. Die Funktion ψ hat also den Wert $\eta - 1$. Bilden wir $\frac{\eta\psi'(\eta)}{\sqrt{1-\psi^2}}$, so erhalten wir

$$\xi = \int \frac{\eta\, d\eta}{\sqrt{2\eta - \eta^2}},$$

oder da $\xi = 0$ für $\eta = 2$ ist,

$$\xi = \sqrt{2\eta - \eta^2} + \arccos(\eta - 1).$$

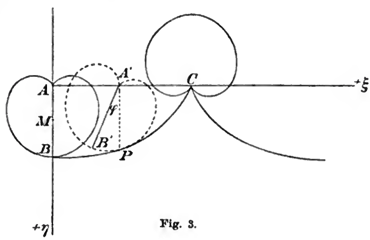


Fig. 3.

Setzt man $\eta - 1 = \cos\varphi$, so ergibt sich als Gleichung der festen Kurve

$$\xi = \sin\varphi + \varphi, \quad \eta = 1 + \cos\varphi,$$

d. h.: Soll die Spitze der Kardioide auf einer Geraden fortschreiten, so muß sich die Kardioide selbst auf derjenigen Zykloide abwälzen, die der Kreis mit dem Kardioidendurchmesser beschreibt, wenn er auf jener Geraden abrollt.

3. *Die verallgemeinerte Kardioide.* (Fig. 4.) — Die eben betrachtete Kurve ist ein spezieller Fall der Pascalschen Schnecke $r = p\cos\varphi + m$. Nehmen wir an, es wäre $m > p$, so stellt die Gleichung eine Blattform mit einer gegen den Koordinatenanfang gerichteten Ausbuchtung dar. Die Funktion ψ hat den Wert $\frac{\eta - m}{p}$ und wir erhalten für ξ:

$$\xi = \int \frac{\eta\, d\eta}{(m+p)\sqrt{p^2 - m^2 + 2m\eta - \eta^2}} = \sqrt{(p+m-\eta)\cdot(p-m+\eta)} + m \arccos\frac{\eta - m}{p}.$$

Führt man wieder φ ein, so ist

$$\xi = p\sin\varphi + m\varphi, \quad \eta = p\cos\varphi + m.$$

Das sind aber die Gleichungen für die *verlängerte Zykloide.* Trägt man AN auf AB bis M ab und zeichnet mit AM um M den Kreis, so

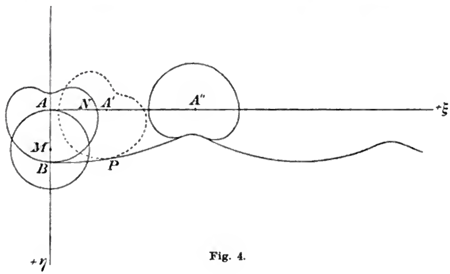


Fig. 4.

beschreibt der mit dem Kreise fest verbundene Punkt B beim Abrollen auf $A\xi$ diejenige Zykloide, auf welcher sich das Blatt abwälzen muß, damit der Punkt A sich auf $A\xi$ bewege. Ähnlich liegen die Verhältnisse für $p < m$.

4. *Die Parabel.* — Der Punkt, welcher sich in gerader Linie bewegen soll, sei der Brennpunkt. Ihre Gleichung ist dann $r^{-1} = 1 + \cos\varphi$ oder $x = 1 - \eta$. Daraus folgt $\xi^2 = 2\eta - 1$, welche Gleichung eine der oberen kongruente Parabel darstellt; beide berühren einander in den Scheiteln.

5. *Die Schleifenlinie.* (Fig. 5.) — Ihre Gleichung ist $r = \cos n\varphi$. Die Figur stellt den Fall $n = 2$ vor. Da $\varphi = \frac{1}{n}\arccos r$ ist, so ergibt die Rechnung $n^2\xi^2 + \eta^2 = 1$. Denkt man sich n kongruente Ellipsen mit den Halbachsen 1 und $\frac{1}{n}$, welche einander in B berühren, so

wickelt sich zunächst die Halbschleife DA auf dem Ellipsenquadranten DB ab; sodann tritt die benachbarte Schleife in die zweite Ellipse und rollt auf BEF u. s. f.

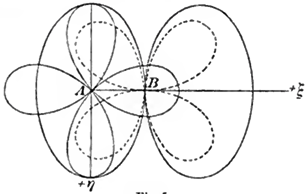


Fig. 5.

6. *Die gerade Linie.* (Fig. 6.) Sie habe die Gleichung $x = 1$. In der Figur ist ihre Anfangslage durch BC dargestellt. Beim Abrollen soll A auf $A\xi$ fortrücken. Es ist $x = \eta \cdot \frac{1}{\eta}$; die Funktion ψ ist also $\frac{1}{\eta}$ und

$$\xi = \int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \quad \text{oder} \quad \eta = \tfrac{1}{2}(e^{\xi} + e^{-\xi}).$$

Wir sehen demnach, daß sich der rechtwinklige Haken ABC auf einer *Kettenlinie* wälzen muß, wenn seine Spitze eine geradlinige Bahn beschreiben soll.

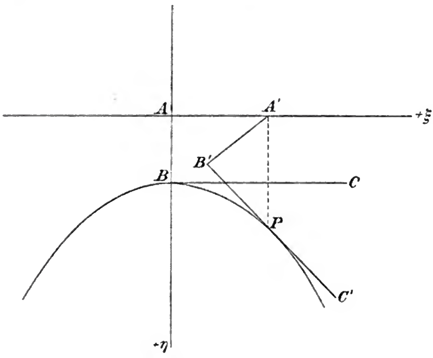


Fig. 6.

7. *Die Spirallinien.* — Aus $r^p = n\vartheta$ erhält man für ξ

$$\xi = \frac{p}{p+1} \frac{\eta^{p+1}}{n}.$$

Die festen Kurven haben also parabolischen Charakter; für $p = 1$ ist die Kurve eine wirkliche Parabel. Für die logarithmische Spirale ergibt die Rechnung eine unter 45° geneigte Gerade.

Sagan, den 9. Februar 1904.

Sur deux manières de construire les spiriques de Perseus;

Par F. Gomes Teixeira à Porto.

On trouve dans le tome II, p. 52, de l'édition des *Oeuvres de Huygens* publiée par la Société hollandaise des Sciences une lettre de Sluse à Huygens dans laquelle il donne une méthode pour construire les *spiriques de Perseus* au moyen d'une hyperbole équilatère. Nous allons nous occuper de cette méthode dans le premier chapitre de ce travail pour en donner une démonstration algébrique et indiquer quelques résultats qui s'y rapportent.

Dans le second chapitre nous donnerons, pour la construction des mêmes courbes, une méthode bien plus simple que celle de Sluse, puisque, au lieu d'une hyperbole, nous employons une circonférence et que nous dérivons chaque point de la spirique de chaque point de la circonférence, comme Sluse les dérive de l'hyperbole, au moyen de la construction d'une moyenne géométrique entre deux segments de droite.

Les résultats obtenus dans ces deux chapitres sont étendus dans le troisième chapitre aux sections de la surface engendrée par une ellipse, par une hyperbole ou par une parabole quand elle tourne autour d'une droite placée dans son plan et perpendiculaire à l'un de ses axes.

I.

Sur une méthode de Sluse pour construire les spiriques de Perseus au moyen d'une hyperbole.

1. On sait que l'équation des spiriques de Perseus est la suivante:

$$(x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 = 4l^2(x^2 + c^2), \tag{1}$$

où R représente le rayon de la circonférence méridienne du tore auquel appartient la spirique considérée, c la distance du plan qui la contient à l'axe de la surface et l la distance du centre de la circonférence rapportée au même axe.

En posant dans cette équation

$$y^2 = (\lambda - y_1)y_1, \tag{2}$$

λ étant une quantité constante, on obtient la transformée suivante:

$$(x^2 - y_1^2 + \lambda y_1 + l^2 + c^2 - R^2)^2 - 4l^2(x^2 + c^2) = 0,$$

et nous allons chercher les conditions pour que cette équation représente deux coniques.

Pour cela, le premier membre de cette équation doit être réductible à la forme

$$(x^2 + Ay_1^2 + By_1 + C)(x^2 + A'y_1^2 + B'y_1 + C'),$$

ce qui donne les équations de condition

$$AA' = 1, \quad A + A' = -2, \quad C + C' = 2(c^2 - l^2 - R^2),$$
$$CC' = (l^2 + c^2 - R^2)^2 - 4l^2c^2, \quad B + B' = 2\lambda,$$
$$BB' + AC' + CA' = \lambda^2 - 2(l^2 + c^2 - R^2),$$
$$B'C + BC' = 2\lambda(l^2 + c^2 - R^2), \quad AB' + BA' = -2\lambda.$$

Or, les deux premières équations donnent

$$A = -1, \quad A' = -1;$$

la troisième et la quatrième donnent

$$C = c^2 - l^2 - R^2 + 2lR, \quad C' = c^2 - l^2 - R^2 - 2lR;$$

ensuite la cinquième et la sixième donnent

$$B = \lambda - 2l, \quad B' = \lambda + 2l,$$

et enfin la septième donne

$$\lambda = 2R.$$

La dernière équation n'est pas distincte des précédentes.

Donc le lieu considéré se réduit à deux coniques quand $\lambda = 2R$, et les équations de ces coniques sont les suivantes:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x^2 - y_1^2 + 2(R - l)y_1 + c^2 - l^2 - R^2 + 2lR = 0,\\ x^2 - y_1^2 + 2(R + l)y_1 + c^2 - l^2 - R^2 - 2lR = 0. \end{aligned}$$

Ces deux équations peuvent être réduites à la forme

$$(4) \qquad y_2^2 - x^2 = c^2,$$

en posant dans la première $y_1 = y_2 + R - l$ et dans la deuxième $y_1 = y_2 + R + l$. Elles représentent donc deux hyperboles équilatères dont les axes sont égaux à $2c$, la première ayant le centre au point $(0, R - l)$ et l'autre au point $(0, R + l)$.

En changeant dans l'analyse précédente la valeur de B contre celle de B', c'est-à-dire en posant

$$B = \lambda + 2l, \quad B' = \lambda - 2l,$$

on trouve deux nouvelles hyperboles, symétriques des précédentes par rapport à l'axe des abscisses, qui correspondent à $\lambda = -2R$.

On conclut de tout ce qui précède qu'il existe *quatre hyperboles égales* telles que à chacun de leurs points correspond un point de la spirique considérée lequel est lié à celui-là par la relation (2), où $\lambda = 2R$ ou $\lambda = -2R$.

Ce résultat pouvait être prévu, puisque le second membre de l'équation (2) ne change pas de valeur quand on y remplace y_1 par $\lambda - y_1$, ni quand on y remplace λ par $-\lambda$ et y_1 par $-y_1$. Cette circonstance fait encore voir que, pour obtenir tous les points de la spirique, il ne faut pas employer plus d'une des hyperboles considérées.

2. Il résulte de la relation

$$y^2 = (2R - y_1)\, y_1 \tag{5}$$

que les points de l'hyperbole auxquels correspondent les points réels de la spirique sont ceux qui sont compris entre les droites représentées par les équations

$$y_1 = 0, \quad y_1 = 2R.$$

1°. Si les deux droites coupent une même branche de l'hyperbole, la courbe est formée par deux ovales extérieurs l'un à l'autre.

2°. Si une seule de ces droites coupe l'hyperbole, la spirique se réduit à un ovale.

3°. Si l'une des deux droites coupe la branche supérieure et l'autre la branche inférieure de l'hyperbole, la spirique est formée par deux ovales dont l'un est à l'intérieur de l'autre.

Dans tous ces cas les sommets de la spirique correspondent aux points où les droites coupent l'hyperbole, et aux sommets de cette courbe compris entre les droites.

Les conditions pour que les droites considérées coupent l'hyperbole peuvent être traduites par des inégalités, que nous ne nous arrêterons pas à déduire et qui coïncident avec les conditions connues pour que la spirique ait une ou deux branches.

3. Si l'on pose dans l'équation (5) $y_1 = R$, il vient $y = \pm R$. On voit donc que la spirique et l'hyperbole se coupent dans les points correspondant à $y = R$ et qui sont réels quand à $y_1 = R$ correspond un point réel de l'hyperbole, c'est-à-dire quand $c \gtreqless l$.

D'un autre côté, les points où les ordonnées de la spirique passent par une valeur maxima sont données par l'équation

$$(y_1 - R)\, y_1' = 0,$$

qui résulte de (5), dont une solution est $y_1 = R$.

L'hyperbole passe donc par les deux points de la spirique, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, où les ordonnées de cette courbe ont une valeur *maxima*.

4. On peut tracer les normales de la spirique considérée au moyen des normales et des tangentes de l'hyperbole. En effet, l'équation (5) donne la suivante:

$$yy' = Ry_1' - y_1y_1',$$

qui détermine la sous-normale de la spirique au point (x, y) quand on connaît la sous-normale de l'hyperbole au point correspondant (x, y_1) et le segment de droite, dépendant de la tangente à l'hyperbole au même point, représenté par Ry_1'.

5. Les hyperboles qui correspondent aux diverses valeurs de c, c'est-à-dire aux diverses sections du tore, forment une surface dont l'équation est la suivante:

$$x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 + 2(R-l)y_1 = (R-l)^2.$$

Cette surface est donc un cône de révolution, dont l'axe coïncide avec l'axe du tore, et qui coupe cette surface dans son équateur et dans le cercle parallèle plus élevé.

Il en résulte que à chaque point du cône représenté par l'équation précédente correspond un point du tore lié au premier par les relations

$$x = x_1, \quad y^2 = (2R - y_1)y_1, \quad z = z_1.$$

II.

Sur une manière de construire les spiriques de Perseus au moyen d'une circonférence.

6. On vient de voir que, dans la méthode de Sluse, les points de la spirique sont dérivés de ceux d'une hyperbole au moyen de la construction d'une moyenne géométrique entre deux segments de droite. Nous allons donner maintenant une autre méthode plus simple que la précédente, pour construire la spirique considérée, dans laquelle on déduit chaque point de cette courbe d'un point correspondant d'une circonférence en construisant aussi une moyenne géométrique entre deux segments de droite. Cette méthode se présente d'une manière très naturelle, mais nous ne l'avons pas trouvée dans les travaux sur les spiriques que nous avons pu voir.

Considérons encore l'équation de la spirique

$$(x^2 + y^2 + l^2 + c^2 - R^2)^2 = 4l^2(x^2 + c^2)$$

et posons

$$x^2 = x_1^2 - c^2.$$

Il vient

$$(x_1 \pm l)^2 + y^2 = R^2. \tag{6}$$

On voit donc que la relation précédente transforme la spirique considérée en deux circonférences de rayon égal à R, ayant leurs centres aux points $(\pm l, 0)$, et que à chaque point (x_1, y) de ces circonférences correspond un point de la spirique, ayant la même ordonnée et une abscisse égale à la moyenne géométrique entre $x_1 - c$ et $x_1 + c$. Il convient de remarquer que, pour faire la construction de la courbe, il suffit d'employer l'une des circonférences considérées, puisque la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On trouve facilement la forme que la spirique prend dans les divers cas qui peuvent se présenter.

1°. Si les circonférences ne coupent pas l'axe des ordonnées (*tore ouvert*) et que la droite représentée par l'équation $x = c$ soit comprise entre ces circonférences, la spirique est formée par deux ovales, qui ont quatre sommets sur l'axe des abscisses correspondant aux points où les circonférences considérées coupent cet axe. Aux quatre points où les tangentes aux circonférences sont parallèles à l'axe des abscisses correspondent quatre points où les tangentes à la spirique sont parallèles au même axe.

2°. Si le tore est ouvert et la droite $x = c$ coupe une des circonférences, la spirique se réduit à un ovale, qui a deux sommets sur l'axe des ordonnées, qui correspondent aux points où cette droite coupe la circonférence considérée, et deux sommets sur l'axe des abscisses, qu'on obtient comme au cas précédent. Si la droite coupe la demi-circonférence plus prochaine de l'axe des ordonnées, la courbe a quatre points où les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses qui correspondent aux points des circonférences où les tangentes sont parallèles à cet axe. Mais, si la droite coupe l'autre demi-circonférence, ces points deviennent imaginaires.

3°. Si le tore est ouvert et l'une des circonférences est comprise entre l'axe des ordonnées et la droite $x = c$, la courbe est imaginaire.

4°. Si les circonférences coupent l'axe des ordonnées (*tore fermé*), la spirique est formée par deux ovales, quand les droites $x = c$ et $x = -c$ coupent l'une des circonférences considérées, par un seul ovale, quand une seule de ces droites coupe cette circonférence, et elle est imaginaire quand ni l'une ni l'autre ne la coupent. On détermine les sommets de ces ovales et les points où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses comme dans les cas précédents.

7. On peut tracer d'une manière très facile les normales à la spirique au moyen des normales aux circonférences considérées. En effet, on a

$$x \frac{dx}{dy} = x_1 \frac{dx_1}{dy},$$

et, par conséquent, les sous-normales de la spirique et de la circonférence, par rapport à l'axe des ordonnées, sont égales. Les normales à ces deux courbes aux points correspondants coupent donc l'axe des ordonnées dans le même point.

8. Les circonférences qui entrent dans les constructions précédentes ne dépendent pas de c, et sont égales à la circonférence méridienne du tore considéré. De là et de ce qu'on vient de dire au n°. 7 il résulte que les normales aux diverses spiriques qui correspondent aux diverses valeurs données à c, menées par les points où elles coupent une droite parallèle à l'axe des abscisses, coupent l'axe des ordonnées en deux points, l'un qui correspond aux points des spiriques où la convexité est tournée vers le côté des abscisses positives, et l'autre qui correspond aux points de ces courbes qui ne satisfont pas à cette condition.

De ce qui précède il résulte que, si un plan se déplace parallèlement à un plan fixe qui passe par l'axe du tore, les normales aux spiriques qui en résultent, aux points du même parallèle de la surface se coupent sur deux droites qui passent par l'axe du tore et sont perpendiculaires à cet axe. Les lieux géométriques de ces normales sont donc des *conoïdes.*

On trouve facilement l'équation de ces conoïdes.

En effet, l'équation des normales aux spiriques qui correspondent au même point (α, β) de la circonférence précédemment considérée (6) est la suivante:

$$xY(l^2-\beta^2-\alpha^2+R^2)+\beta X(\alpha^2+\beta^2+l^2-R^2)=2l^2x\beta,$$

où $x=\sqrt{\alpha^2-c^2}$.

Si l'on représente donc par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface dont on veut chercher l'équation, on a

$$xy'(l^2-\beta^2-\alpha^2+R^2)+\beta x'(\alpha^2+\beta^2+l^2-R^2)=2l^2x\beta.$$

Mais, comme le point (x, β, z') doit être placé sur le tore, on a

$$(x^2+\beta^2+l^2+z'^2-R^2)^2=4l^2(x^2+z'^2).$$

En éliminant maintenant x entre cette équation et la précédente, on obtient l'équation demandée.

On peut donner à cette équation sa forme plus simple en transportant l'origine des coordonnées au point dont les coordonnées, rapportées aux axes primitifs, sont $(0, \omega, 0)$ en supposant

$$\omega=\frac{2l^2\beta}{l^2-\beta^2-\alpha^2+R^2}.$$

On trouve alors

$$\left[K^2\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + \beta^2 + l^2 + z'^2 - R^2\right]^2 = 4l^2\left[K^2\frac{x'^2}{y'^2} + z'^2\right],$$

où

$$K = \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2 + l^2 - R^2)}{l^2 - \beta^2 - \alpha^2 + R^2}.$$

À ce qui précède nous ajouterons encore que les tangentes aux spiriques placées sur les plans parallèles au plan fixe mentionné ci-dessus, aux points du même parallèle du tore, forment des cylindres tangents à cette surface en tous les points de ce parallèle.

III.

Sur l'extension des méthodes précédentes à quelques autres courbes.

9. Tout ce qu'on vient de dire dans les n^{os}. précédents est applicable à la courbe définie par l'équation

$$(x^2 + y^2 + l^2 - c^2 - R^2)^2 = 4l^2(x^2 - c^2), \tag{7}$$

qui ne diffère de (1) que par le signe de c^2. Ainsi, on peut construire cette courbe au moyen de l'hyperbole

$$x^2 - y_2^2 = c^2,$$

conjuguée de celle qui a été considérée précédemment, et au moyen de la relation

$$y^2 = (2R - y_1)y_1;$$

et on peut la construire aussi au moyen de la circonférence

$$(x_1 + l)^2 + y^2 = R^2$$

et de la relation

$$x^2 = x_1^2 + c^2.$$

La courbe représentée par l'équation (7) peut être considérée comme la section du tore par le plan imaginaire $y = c\sqrt{-1}$. Ses points réels correspondent aux points imaginaires du tore. On peut l'appeler *pseudo-spirique.*

10. Tout ce qu'on a dit précédemment à l'égard des sections du tore peut être étendu aux sections de la surface engendrée par une ellipse, quand elle tourne autour d'une droite placée dans son plan et perpendiculaire à l'un de ses axes.

L'équation de ces sections est la suivante:

$$(a^2y^2 + b^2x^2 + b^2c^2 + b^2l^2 - a^2b^2)^2 = 4b^4l^2(x^2 + c^2),$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse, l la distance de son centre à l'axe de révolution et c la distance du plan de la section au même axe; et l'on voit, en procédant comme dans le cas des spiriques, que ces courbes peuvent être construites au moyen de l'hyperbole

$$b^2x^2 - a^2y_1^2 + 2ab(a-l)y_1 + b^2[c^2 - (l-a)^2] = 0$$

et de la relation

$$y^2 = (2b - y_1)y_1,$$

ou au moyen de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2(x_1 - l)^2 = a^2b^2$$

et de la relation

$$x^2 = x_1^2 - c^2.$$

Les conséquences de ces constructions données précédemment pour le cas des spiriques, peuvent être étendues facilement aux courbes plus générales qu'on vient de définir.

11. En changeant dans ce qui précède b^2 en $-b^2$ on trouve des résultats applicables aux sections de la surface engendrée par le mouvement d'une hyperbole autour d'une droite placée dans son plan et perpendiculaire à l'un de ses axes.

12. Une des constructions qu'on vient de considérer est aussi applicable aux sections de la surface engendrée par la parabole

$$y^2 = 2px + q,$$

quand elle tourne autour de l'axe des ordonnées, par des plans parallèles à l'axe de révolution.

Il est facile de voir que l'équation de ces courbes est la suivante

$$(y^2 - q)^2 = 4p^2(x^2 + c^2),$$

et qu'elles peuvent donc être construites au moyen de la parabole

$$y^2 = 2px_1 + q,$$

qui coïncide avec la parabole donnée, et de la relation

$$x^2 = x_1^2 - c^2.$$

Porto, 7 mars 1905.

Eine einfache synthetische Ableitung der Grundeigenschaften eines Büschels polarer Felder.

Von STANISLAUS JOLLES in Berlin.[1])

Die folgenden Untersuchungen liefern die Grundlagen zu einer anschaulichen und einheitlichen synthetischen Theorie eines Büschels polarer Felder. Sie wurden veranlaßt durch Arbeiten des Herrn Reye[2]) über tetraedrale Komplexe und ihre Beziehungen zu den Büscheln polarer Räume.

1. Die homologen Strahlenbüschel I. Ordnung zweier kollinearen Strahlenfelder Σ_1, Σ_2 einer Ebene σ erzeugen ∞^2 Kegelschnitte c^2. Aus den beliebigen Punkten S_1, S_2 des Raumes werden nun die kollinearen Felder Σ_1, Σ_2 bezw. durch die kollinearen zentrischen Ebenenbündel $[S_1]$, $[S_2]$ projiziert. Sie erzeugen die Kongruenz C^1_3 der Bisekanten einer kubischen Raumkurve c^3, und jede in dieser Kongruenz enthaltene Regelschar II. Ordnung ist zu einem der Kegelschnitte c^2 perspektiv. Durch einen beliebigen Punkt X von σ geht im allgemeinen eine bestimmte Bisekante x von c^3, sie wird mit c^3 bekanntlich durch ∞^1 Flächen II. Ordnung verbunden. Somit gehen durch einen beliebigen Punkt X von σ im allgemeinen ∞^1 Kegelschnitte c^2.

2. Aus zwei beliebigen Punkten der kubischen Raumkurve c^3 wird die Kongruenz C^1_3 ihrer Bisekanten durch zwei zu ihr perspektive, also

1) Einem von der Redaktion ausgesprochenen Wunsche folgend, hat Herr Jolles mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit kurz die Hauptsätze einer rein synthetischen Theorie eines Büschels polarer Felder zusammengestellt und anschaulich abgeleitet.

Es ist pädagogisch von grundlegender Bedeutung, den Kegelschnittbüschel auch synthetisch stets auf dieselbe Weise zu erzeugen; gleichgültig, ob einer oder alle beide ihn bedingende Kegelschnitte imaginär sind. Die vorliegende Erzeugung liefert eine solche allgemeine Erzeugung, sie dient zugleich als Einleitung in die Theorie des Büschels kollinearer Strahlenfelder. Diesem Büschel entspricht als Analogon im Raume der Büschel kollinearer Räume. Er ist mit der Theorie des tetraedralen Komplexes und des Büschels der Flächen II. Ordnung bekanntlich auf das engste verknüpft.

Verfasser und Redaktion hegen die Hoffnung, daß Leser des Archivs angeregt werden möchten, auf dieser Grundlage eine einheitliche Theorie aller Arten von Kegelschnittbüscheln aufzubauen. Red.

2) Reye, Die Geometrie der Lage. 3. Auflage, Leipzig 1892, 3. Abteilung, 1. und 2. Vortrag.

zueinander kollineare zentrische Ebenenbündel projiziert, und diese werden von σ in kollinearen Strahlenfeldern geschnitten. Somit lassen sich die Kegelschnitte c^2 noch auf ∞^2 Weisen durch die homologen Strahlenbüschel von Paaren kollinearer Strahlenfelder erzeugen. Die ∞^1 kollinearen Strahlenfelder, welche zu zweien diese Paare liefern, sollen ein **Büschel kollinearer Strahlenfelder** oder kurz ein Büschel $[\Sigma_i]$ heißen.

3. Eine in C_3^1 enthaltene Regelschar II. Ordnung wird aus den Punkten von c^3 durch homologe Ebenenbüschel der zu C_3^1 perspektiven kollinearen zentrischen Ebenenbündel projiziert. Die Achsen dieser homologen Ebenenbüschel sind die Leitstrahlen der Regelschar und bilden somit eine zu c^3 und einem Kegelschnitte c^2 perspektive Regelschar. Da nun zu den Kegelschnitten c^2 je eine aus Unisekanten von c^3 bestehende Regelschar II. Ordnung perspektiv ist, so gilt:

Jeder Kegelschnitt c^2 ist der Ort der Mittelpunkte homologer Strahlenbüschel I. Ordnung in den Feldern eines Büschels kollinearer Strahlenfelder.

4. Ein beliebiger Strahl s_x eines Feldes Σ_x, welches zu dem aus den beiden kollinearen Strahlenfeldern Σ_1, Σ_2 abgeleiteten Büschel $[\Sigma_i]$ gehört, wird von den homologen Strahlen aller übrigen Felder des Büschels, insbesondere also von dem ihm entsprechenden Strahle s_1 von Σ_1, in einem Punkte X geschnitten. Durch X gehen nach **1.** ∞^1 Kegelschnitte c^2. Sie treffen nach **3.** die Strahlen s_1, s_x bezw. noch in je zwei homologen Punkten von Σ_1, Σ_x. Aus solchen homologen Punkten wird jeder dieser Kegelschnitte c^2 durch zwei homologe Strahlenbüschel I. Ordnung von Σ_1, Σ_x projiziert, sobald je zwei Strahlen der Büschel einander zugeordnet werden, die den nämlichen Punkt des betreffenden Kegelschnittes c^2 enthalten. Somit sind, wenn zwei durch X gehende Kegelschnitte c^2 herausgegriffen werden, zwei Paar homologe Strahlenbüschel I. Ordnung der kollinearen Felder Σ_1, Σ_x bekannt, die bezw. die homologen Strahlen s_1, s_x gemein haben. Das genügt aber, um die kollineare Beziehung zwischen den Feldern Σ_1, Σ_x des Büschels $[\Sigma_i]$ eindeutig herzustellen. Fällt s_x nacheinander mit allen Strahlen des Strahlenbüschels I. Ordnung $[X]$ zusammen, so ergeben sich auf diese Weise alle Strahlenfelder des Büschels $[\Sigma_i]$. Folglich ist bewiesen:

Der Büschel $[\Sigma_i]$ von kollinearen Strahlenfeldern ist durch die beiden Strahlenfelder Σ_1, Σ_2 eindeutig bestimmt.

Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf **2.**:

Wird die Kongruenz C_3^1 der Bisekanten einer kubischen Raumkurve c^3 erzeugt durch irgend zwei bezw. zu den kollinearen Strahlenfeldern Σ_1, Σ_2 perspektive zentrische Ebenenbündel $[S_1]$, $[S_2]$, so

schneidet die Ebene der Felder alle zu C_3^1 perspektiven zentrischen Ebenenbündel stets in dem nämlichen Büschel $[\Sigma_i]$.

Nun wird jede dieser Kongruenzen C_3^1 auch erzeugt durch je zwei zu ihr perspektive, also zueinander kollineare zentrische Ebenenbündel, und diese wiederum projizieren zwei kollineare Felder des Büschels $[\Sigma_i]$, also ergibt sich:

Ein Büschel kollinearer Felder ist eindeutig durch irgend zwei seiner kollinearen Felder bestimmt.

5. Die Leitschar jeder aus Bisekanten einer kubischen Raumkurve c^3 gebildeten Regelschar II. Ordnung ist zu der Raumkurve und zu einem Kegelschnitte c^2 perspektiv. Vier harmonische Strahlen dieser Leitschar schneiden also beide Kurven in vier harmonischen Punkten. Aus vier harmonischen Punkten von c^3 wird nun eine beliebige Bisekante der Kurve durch vier harmonische Ebenen projiziert, folglich läßt sich der Satz aussprechen:

Bilden die von vier kollinearen Feldern eines Büschels nach einem beliebigen Punkte ihrer Ebene σ gesandten homologen Strahlen einen harmonischen Wurf, so bilden im allgemeinen die von jenen vier Feldern nach allen übrigen Punkten von σ gesandten homologen Strahlen harmonische Würfe.

6. Vier kollineare Strahlenfelder eines Büschels, welche nach einem beliebigen und folglich nach jedem Punkte ihrer Ebene vier homologe Strahlen senden, die einen harmonischen Wurf bilden, sollen v i e r h a r m o n i s c h e S t r a h l e n f e l d e r des Büschels heißen.

Gestützt auf diese Definition sind wir in der Lage, den Büschel kollinearer Strahlenfelder auf andere Gebilde I. Stufe projektiv zu beziehen. So gilt:

Die homologen Strahlen, welche die kollinearen Strahlenfelder eines Büschels nach einem beliebigen Punkte ihrer Ebene senden, bilden einen zum Büschel projektiven Strahlenbüschel I. Ordnung.

Ferner folgt aus **3.**:

Die Mittelpunkte der zentrischen Ebenenbündel, welche aus den Punkten einer kubischen Raumkurve c^3 die kollinearen Strahlenfelder eines Büschels projizieren, bilden auf ihr eine zum Büschel projektive Punktreihe.

Außerdem ergibt sich aus der gleichen Nummer der wichtige Satz:

Die homologen Punkte der kollinearen Felder eines Büschels bilden einen zum Büschel projektiven Kegelschnitt c^2.

7. Durch zwei in einer Ebene σ gelegene polare Felder Π_1, Π_2 ist das Punktfeld $\mathfrak{S}$ von σ bezw. korrelativ auf zwei in σ gelegene Strahlenfelder Σ_1, Σ_2 bezogen. Die zu $\mathfrak{S}$ korrelativen Strahlenfelder Σ_1, Σ_2 sind also zueinander kollinear. — Einem Punkte X von $\mathfrak{S}$ entsprechen in Σ_1, Σ_2 bezw. die ihm durch Π_1, Π_2 zugeordneten Polaren x_1, x_2. Ihr Schnittpunkt x_1x_2 und der Punkt X sind zweifach konjugiert, folglich entspricht dem Punkte x_1x_2 von $\mathfrak{S}$ in Σ_1, Σ_2 wiederum je eine mit X inzidente Gerade. Die Verbindungsgerade der zweifach konjugierten Punkte X, x_1x_2 trägt also eine zu den homologen Strahlenbüscheln von Σ_1, Σ_2 involutorisch gelegene Punktreihe von $\mathfrak{S}$. Beschreibt X eine beliebige Punktreihe I. Ordnung, so beschreibt x_1x_2 eine zu ihr projektive Punktreihe II. Ordnung, und das Erzeugnis beider ist ein rationaler Strahlenbüschel III. Ordnung. Die Verbindungsgeraden der zweifach konjugierten Punkte gehen also — und das ist, wie sich gleich zeigen wird, von ausschlaggebender Bedeutung — nicht durch einen Punkt.

Durch die beiden kollinearen Strahlenfelder Σ_1, Σ_2 geht nach **4.** ein Büschel solcher Felder. Jeder von ihnen ist korrelativ zum Punktfelde $\mathfrak{S}$. Die einem Punkte X von $\mathfrak{S}$ in den Feldern dieses Büschels zugewiesenen Strahlen gehen durch den zu X zweifach konjugierten Punkt x_1x_2, folglich sind die Verbindungsgeraden der zweifach konjugierten Punkte auch die Träger derjenigen Punktreihen des Punktfeldes $\mathfrak{S}$, die zu den ihnen entsprechenden Strahlenbüscheln der Felder des Büschels involutorisch liegen. Nun gehen nach obigem die Verbindungsgeraden der zugleich in beiden polaren Feldern Π_1, Π_2 konjugierten Punkte nicht durch einen Punkt, folglich liegen nicht nur Σ_1, Σ_2, sondern alle Felder des Büschels kollinearer Felder zu dem Punktfelde $\mathfrak{S}$ korrelativ involutorisch.[1]) Kurz:

Bilden zwei kollineare Felder eines Büschels mit einem zu ihnen korrelativen Felde polare Felder, so bilden alle Felder des Büschels mit ihm polare Felder.

Eine solche Mannigfaltigkeit von ∞^1 polaren Feldern heißt ein Büschel polarer Felder. Er ist durch zwei beliebige seiner Felder bestimmt.

8. Vier polare Felder eines Büschels polarer Felder sollen vier harmonische polare Felder des Büschels heißen, wenn für sie die Polaren eines beliebigen und folglich jedes Punktes ihrer Ebene einen Wurf von vier harmonischen Strahlen bilden.

1) Reye, Die Geometrie der Lage, 3. Auflage, Leipzig 1892, 2. Abteilung, S. 118.

Nunmehr kann auch der Büschel polarer Felder auf jedes Gebilde I. Stufe projektiv bezogen werden. Insbesondere gelten nach **6.** die beiden wichtigen Sätze:

Die polaren Felder eines Büschels weisen einem beliebigen Punkte ihrer Ebene Polaren zu, welche einen zum Büschel projektiven Strahlenbüschel I. Ordnung bilden.

Die Pole einer beliebigen Geraden in der Ebene eines Büschels polarer Felder bilden einen zum Büschel projektiven Kegelschnitt.

Hiermit sind die Grundeigenschaften eines Büschels polarer Felder dargetan. Ihre Beweise sind völlig unabhängig von beschränkenden Voraussetzungen über die Inzidenzkurven der die Büschel bildenden polaren Felder. So können entweder alle polaren Felder der Büschel reelle Inzidenzkurven haben, oder ∞^1 von ihnen imaginäre. Die Ableitung dieser sowie aller weiteren wichtigen Eigenschaften der Büschel polarer Felder sei dem Leser überlassen.

Halensee b. Berlin, d. 31. Mai 1905.

The groups in which every subgroup of composite order is invariant.

By G. A. Miller, University of Illinois.

The groups in which every subgroup is invariant are known.[1]) The present paper is devoted to a determination of all the groups in which every subgroup of composite order is invariant, but some subgroup of prime order is non-invariant. In what follows the symbol G will represent such a group. It will be convenient to consider all these groups under three headings as the order of G is a power of an odd prime, the power of an even prime, or divisible by different primes. In the last case it will be proved that the order of G is always of the form pq^2, where p and q are prime numbers and $p > 2$.

1. *The order of G is a power of an odd prime.* — When the order of G is p^m, G contains at least one invariant subgroup of order p. The subgroups of the corresponding quotient group are invariant since every subgroup of composite order in G is invariant. This quotient group is abelian since p is odd. The given invariant

1) Mathematische Annalen, **60** (1905), 597.

subgroup of order p is therefore the commutator subgroup of G, and *G contains only one invariant subgroup of order p.*

The operators of G which are commutative with a non-invariant operator of order p constitute a subgroup of order p^{m-1}. This subgroup (H) must be abelian since it contains more than one subgroup of order p which is invariant under it. It cannot involve more than two invariants, since each of its non-cyclic subgroups of order p^2 must involve the commutator subgroup, otherwise it would not be invariant under G. A non-invariant operator under G could not be generated by an operator of higher order since the latter would generate an invariant subgroup of order p^2. From this it follows that *H is of type $(m-2, 1)$, and the invariant operators of G constitute a cyclic subgroup of order p^{m-2}.*

From the results of the preceding paragraph it follows that there are two groups of order $p^m (p > 2, m > 2)$ in which every subgroup of composite order is invariant while some subgroups of prime order are non-invariant. These two groups are respectively conformal with the abelian groups of types $(m-1, 1)$ and $(m-2, 1, 1)$. In fact, these are the only non-abelian groups of order p^m which contain invariant operators of order p^{m-2}.[1]) Hence the preceding results may also be expressed as follows: *The necessary and sufficient condition that every subgroup of composite order in a non-abelian group of order p^m, $p > 2$, is invariant is that this group contains invariant operators of order p^{m-2}.*

2. *The order of G is a power of two.* — If the quotient group with respect to an invariant operator of order 2 would be Hamiltonian, the operators of G which would correspond to the characteristic operator of order 2 in this Hamiltonian group would be of order 2, since the group of order 16 which would correspond to a quaternion subgroup could not involve three cyclic subgroups of order 8. All the operators of G would therefore be either of order 2 or of order 4. From the fact that a non-invariant operator of order 4 would be commutative with just half the operators of G, it follows that all the operators of order 4 in G would have a common square and that G would also be Hamiltonian. Hence *G contains only one invariant subgroup of order 2, viz. the commutator subgroup.*

The subgroup H which is composed of all the operators of G which are commutative with one of its non-invariant operators of order 2 is either abelian or Hamiltonian since it contains more than one invariant subgroup of order 2. In the former case it is of type

1) Burnside, Theory of groups of finite order, 1897, p. 78.

$(m-2, 1)$ for reasons given in the preceding section. The groups which come under this case are determined just as in the preceding section with the exception of the fact that there is only one group when $m = 3$, viz. the octic group. For all larger values of m there are two such groups, which are conformal respectively with the abelian groups of types $(m-2, 1, 1)$ and $(m-1, 1)$.

When H is Hamiltonian, its order is 16 and the order of G is 32. The order of H could not be less than 16 since it contains at least two operators of order 2 and it could not be more than 16 since G contains only one invariant operator of order 2. From these conditions the possible group of order 32 is readily determined. It contains 10 non-invariant operators of order 2, each being commutative with all the operators of a Hamiltonian group of order 16. It is the last group in the list of the possible groups of order 32, published in the Quarterly Journal of Mathematics, vol. 28, p. 232.

3. *The order of G is not a power of a prime number.* — At least one of the Sylow subgroups of G must be non-invariant. Let p represent the order of this Sylow subgroup. The number of its conjugates is $1 + kp$ and G can be represented as a transitive substitution group of degree $1 + kp$ and of class kp. As the order of G is $p(1 + kp)$, this transitive group contains an invariant subgroup of order $1 + kp$.[1] As this characteristic subgroup could not include any characteristic subgroup besides the identity, it is abelian, of order q^α, and of type $(1, 1, 1, \ldots)$. The value of α cannot exceed 2 since every subgroup of order q^2 is invariant under G and a subgroup of order p is maximal. Hence we have the interesting result that *the order of G is of the form pq^2, p and q being prime numbers.*

If $p = 2$, the subgroups of order p would not be maximal. Hence we must assume $p > 2$. Moreover, an operator of order p must permute all the subgroups of order q, so that $q + 1$ is divisible by p. These necessary conditions are clearly also sufficient for the existence of G. When they are satisfied there is only one G of a given order since the group of isomorphisms of the abelian group of order q^2 and type $(1, 1)$ contains operators of order $q^2 - 1$, and hence all the operators of order p are conjugate under this group. When G is represented as a transitive group of degree q^2, it is clearly primitive.

The results of the last paragraph include the following theorem: *If a non-abelian group contains only one subgroup of composite order,*

---

1) Frobenius, Berliner Sitzungsberichte, 1902, p. 20.

the order of the group is pq^2, $p > 2$ *and* $q + 1$ *divisible by* p, *and the Sylow subgroup of order* q^2 *is abelian and of type* (1, 1).

The principal facts proved in the preceding sections may be stated as follows: If the order of G is p^m, p being an odd prime, there are just two G's for every value of $m > 2$. When $p = 2$, there are just two groups when $m = 4$ or when $m > 5$. When $m = 5$ there are three G's and when $m = 3$ there is only one, viz. the octic group. If the order of G is not the power of a prime it is of the form pq^2 (p and q being primes, $p > 2$, and $q + 1$ divisible by p). Whenever these conditions are satisfied there is just one G, which may be represented as a primitive substitution group of degree q^2 and of class $q^2 - 1$.

Stanford University, January 1906.

Über Büschel kubischer Raumkurven.

Von Eugen Meyer in Charlottenburg.

v. Staudt hat bekanntlich zuerst ausgesprochen, daß die „unebenen Kurven 3. Ordnung“ in vieler Hinsicht für den Raum seien, was die Kurven 2. Ordnung für die Ebene sind.[1]) Dies hat sich in der Folgezeit immer mehr bestätigt. So ist z. B., um von Allbekanntem zu schweigen, die von Herrn Hurwitz[2]) entdeckte Beziehung zweier kubischer Raumkurven, auf deren einer die Ecken von ∞^1 Tetraedern liegen, während ihre Ebenen Schmiegungsebenen der andern sind, das Analogon zu der Beziehung zwischen zwei Kegelschnitten, deren einem ∞^1 Dreiecke einbeschrieben werden können, die dem andern umbeschrieben sind.

Als dem Kegelschnittbüschel entsprechend hat Herr Reye den „Bündel kubischer Raumkurven“, die die Ecken eines räumlichen Fünfecks enthalten, bezeichnet[3]), und demgemäß dem auf ersteres bezüglichen Desargues-Ch. Sturmschen Satz denjenigen des Inhalts gegenübergestellt, daß die Kurven jenes Bündels von jeder durch keine der Ecken des Fünfecks gehenden Ebene in Poldreiecken eines polaren Feldes geschnitten werden. So ersichtlich die Analogie ist, so läßt sich noch ein zweites genaueres Analogon herstellen mit Hilfe eines

1) Beiträge zur Geometrie der Lage. 3. Heft. Vorwort.
2) Mathem. Annalen. Bd. 20. S. 135.
3) Geometrie der Lage. 3. Aufl. II, 23. Vortrag.

bestimmten Systems 1. Stufe kubischer Raumkurven, das als „Büschel kubischer Raumkurven“ bezeichnet werden kann.

Dieser Büschel wird durch Satz I eingeführt. In ∞^1 solche Büschel gruppieren sich die ∞^2 Raumkurven, die durch vier feste Punkte gehen und dieselbe Grade zweimal treffen, wie sie von Herrn Rud. Sturm betrachtet worden sind[1]). Doch können diese Büschel wohl eine besondere Beachtung beanspruchen[2]). Ebenso verdient die Erzeugungsweise des tetraedralen Komplexes in Satz III deshalb bemerkt zu werden, weil hier jeder Komplexstrahl nur einmal auftritt, unter den Sehnen jener ∞^2 Kurven aber ∞^1-mal.

Satz IV gibt das genaue Analogon zu dem Desargues-Sturmschen Satz, wie man einsieht, wenn man diesen in der Form ausspricht: „Ein Kegelschnittbüschel wird von einer Ebene in einer Punktreihe 1. Ordnung geschnitten; die zu den einzelnen Kegelschnitten gehörigen Punktepaare bilden eine Involution 2. Grades“. Endlich scheint mir auch der bekannte von Chasles gefundene Satz über den Schnitt einer Ebene mit einer Raumkurve 3. Ordnung und einem ihr eingeschriebenen Tetraeder[3]) durch Satz IV in der wünschenswerten Vollständigkeit ausgesprochen und in den gehörigen Zusammenhang eingereiht zu sein.

I. *Es gibt auf jedem Kegel 2. Ordnung ∞^1 kubische Raumkurven, die zwei beliebig gegebene feste Graden zu eigentlichen oder uneigentlichen Sehnen (Doppelsekanten) haben, vorausgesetzt, daß der durch die Spitze des Kegels gehende mit den beiden Graden inzidente Strahl kein Kegelstrahl ist. Durch jeden beliebigen Punkt des Kegels geht i. a. eine solche Kurve.*

Es seien g und h die beiden festen Graden, P die Spitze des Kegels P^2. Zunächst ist die am Schlusse des Satzes ausgesprochene Behauptung klar. Denn durch die 4 Schnittpunkte von g und h mit P^2, durch P und einen beliebigen, nicht mit dreien dieser 5 Punkte in derselben Ebene liegenden Punkt auf dem Kegel gibt es eine einzige Raumkurve 3. Ordnung. Sie liegt aber vollständig auf P^2, weil der Kegel 2. Ordnung, der sie von P aus projiziert, mit P^2 fünf Strahlen gemeinsam hat, also mit ihm identisch ist.

Eine bestimmte dieser Kurven sei k^3. Eine an k^3 hingleitende, mit g und h stets inzidente Grade beschreibt eine Regelschar, zu deren Leitlinien g und h gehören.[4]) Der Kegel P^2 schneidet die so erzeugte gradlinige Fläche 2. Ordnung außer in k^3 noch in einem Kegelstrahl, der eine Leitlinie der Regelfläche ist, weil er nach der über g und h

1) Crelles Journal, 79, 107 ff. Liniengeometrie I. S. 337.
2) Vgl. H. Müller, Math. Ann. 1, 419.
3) Vgl. Reye, a. a. O. II, 226.
4) Reye a. a. O. II, S. 193.

gemachten Annahme mit diesen beiden Graden nicht gleichzeitig inzident sein kann. Der Raumkurve k^3 wird somit ein bestimmter Kegelstrahl zugeordnet.

Anderseits wird jedem Kegelstrahl s, der weder g noch h schneidet, eine jener Raumkurven zugewiesen. Denn s, g und h sind Leitlinien einer Regelschar, die P^2 in s und folglich noch in einer Raumkurve 3. Ordnung schneidet. Von ihr ist s eine Sehne, also müssen auch g und h Sehnen sein.

Die im Satze genannten Raumkurven lassen sich also den Kegelstrahlen in ein-eindeutiger Weise zuordnen, also gibt es auch von den ersteren ∞^1.

Ein solches System 1. Stufe nennen wir einen *Büschel kubischer Raumkurven.*

II. *Diejenigen Ordnungskurven eines tetraedralen Komplexes, die durch einen nicht auf einer Fläche des Haupttetraeders liegenden Punkt gehen, bilden einen Büschel.*[1])

Diese Ordnungskurven liegen auf dem zu jenem Punkte P gehörenden Komplexkegel. Durch jeden Punkt P_1 des Kegels, der so liegt, daß PP_1 weder durch einen Hauptpunkt geht, noch in einer Hauptebene liegt, geht eine und nur eine Ordnungskurve.[2]) Ferner haben diese Kurven sämtlich g und h zu Sehnen, wenn g und h zwei reelle Gegenkanten des Haupttetraeders sind, die stets existieren, solange nicht zwei oder mehr Ecken des Haupttetraeders zusammenfallen.

Die beim Beweise von Satz I angestellten Überlegungen zeigen ferner, daß jeder durch P gehenden Ordnungskurve ein durch P gehender Komplexstrahl zugewiesen werden kann, und daß umgekehrt jedem Strahl s des Kegels P^2, der weder g noch h schneidet, eine auf P^2 liegende Raumkurve 3. Ordnung zugeordnet wird. Diese Kurve aber ist eine Ordnungskurve. Sind nämlich für eine Kollineation, die in der Reyeschen Weise den Komplex erzeugt, die Punkte Q und Q' von s entsprechend, so müssen es auch die durch Q bezw. Q' mit g und h gleichzeitig inzidenten Graden q und q' sein, und folglich sind alle Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser Graden q und q', d. h. die ganze Schar (g, h, s) Komplexstrahlen. Der Komplexkegel P^2 muß daher die durch diese Schar bestimmte Fläche 2. Ordnung außer in dem Komplexstrahl s in einer Ordnungskurve schneiden.[3])

---

1) Vgl. meine Arbeit Math. Annalen Bd. 59, S. 408 und den dort gegebenen Hinweis auf Lie.

2) Reye a. a. O. III, S. 7/8.

3) Reye a. a. O. III, S. 8.

Somit ist wieder eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Komplexstrahlen und den Ordnungskurven von P^2 hergestellt und also der Satz II bewiesen.

III. *Die Sehnen eines Büschels kubischer Raumkurven bilden einen tetraedralen Komplex. Die Schnittpunkte des diesem Büschel gemeinsamen Sehnenpaares mit dem Kegel des Büschels sind die Ecken des Haupttetraeders des Komplexes.*

Bilden g und h dieses Sehnenpaar, und ist P^2 wieder der Kegel des Büschels, so ist zunächst leicht einzusehen, daß es einen einzigen tetraedralen Komplex gibt, der die Schnittpunkte von g und h mit P^2 zu Ecken des Haupttetraeders und P^2 zum Komplexkegel hat. Man findet z. B. eine der Kollineationen, die ihn erzeugen, dadurch, daß man jene Schnittpunkte sich selbst und dem Punkte P irgend einen Punkt P', der auf der Kegelfläche so liegt, daß PP' weder g noch h schneidet, als entsprechenden zuweist.

Da es nun auf P^2 durch jeden Punkt i. a. eine und nur eine kubische Raumkurve gibt, die dem Haupttetraeder umbeschrieben ist, so muß dieser Büschel von Ordnungskurven des Komplexes, der auf P^2 liegt, mit dem gegebenen Büschel zusammenfallen, und ihre Sehnen müssen also den Komplex bilden.

IV. *Ein Büschel kubischer Raumkurven wird von einer Ebene in einer Punktreihe 2. Ordnung geschnitten; die zu den einzelnen Raumkurven gehörigen Punktetripel bilden eine kubische Involution.*

Denn die Ebene schneidet den Kegel, der den Büschel von Raumkurven enthält, in einem Kegelschnitt k^2, und in ihr liegt ein Komplexkegelschnitt $\mathfrak{k}^2$ des durch die Sehnen des Büschels bestimmten tetraedralen Komplexes, der bei reellem Haupttetraeder dessen Flächen berührt. k^2 und $\mathfrak{k}^2$ stehen aber in der bekannten Beziehung, daß dem ersteren ∞^1 Dreiecke einbeschrieben werden können, die $\mathfrak{k}^2$ umbeschrieben sind; denn jedes aus Sehnen derselben Raumkurve gebildete Dreieck hat diese Eigenschaft. Die Eckpunkte dieser Dreiecke aber bilden eine kubische Involution.[1])

V. *Bestimmt man zu einem festen Punkte in bezug auf sämtliche kubische Raumkurven eines Büschels die konjugierten Punkte, so erhält man eine Punktreihe 2. Ordnung, vorausgesetzt, daß der Punkt nicht auf dem Kegel $\mathfrak{K}^2$ liegt, der den Büschel von Raumkurven trägt.*

Dabei versteht man unter dem konjugierten Punkte von A in bezug auf die Raumkurve k^3 den Punkt A_1, der in bezug auf alle

1) Em. Weyr, Wiener Berichte. Bd. 87. S. 595. Vgl. auch Rud. Sturm, Liniengeometrie I, S. 30.

durch k^3 gehenden Flächen 2. Ordnung zu A konjugiert ist, oder —, was für den Fall, daß durch A eine eigentliche Sehne von k^3 geht, dasselbe bedeutet, — der zusammen mit A_1 die gemeinsamen Punkte dieser Sehne und der Kurve harmonisch trennt.[1])

Denn die durch A gehenden Sehnen des Büschels bilden in dem tetraedralen Komplex den Komplexkegel mit der Spitze A, und dieser wird von der Polarebene von A in bezug auf $\mathfrak{K}^2$ in der im Satze erwähnten Punktreihe 2. Ordnung geschnitten.

Charlottenburg, Februar 1905.

Über die Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von zehn und zwölf Quadraten.

Von K. PETR in Prag.

Die Sätze von der Darstellung einer ganzen Zahl als Summe von 2, 4, 6, 8 Quadraten folgen, wie bekannt, aus den schon in „Fundamenta nova" angeführten Reihenentwicklungen der elliptischen Funktionen. Außerdem gibt es auch Sätze über die Zerlegung einer Zahl in 10 und 12 Quadrate. Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl von der Form $4k+3$ durch die Summe von 10 Quadraten gibt bereits Eisenstein an (Math. Abhandlungen, S. 195). Die Sätze über die Anzahl der Darstellungen einer beliebigen ganzen Zahl als Summe von 10 Quadraten, sowie einer geraden Zahl als Summe von 12 Quadraten führt Liouville an (Journ. de math. p. et appl., II. sér., 11. Bd., S. 1 und 9. Bd., S. 296)

Diese Sätze sind, soviel mir bekannt, nirgends bewiesen und werden auch als unbewiesen angeführt Deshalb will ich im folgenden darauf hinweisen, daß dieselben ebenfalls aus den bekannten Reihenentwicklungen der elliptischen Funktionen abgeleitet werden können.

Es seien $\theta(v)$, $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$, $\theta_3(v)$ Thetafunktionen von den Charakteristiken resp. (1,1), (1,0), (0,1), (0,0) und θ_1, θ_2, θ_3 die Nullwerte der betreffenden Thetafunktionen.

Die Funktion[2]) $T_\alpha(v) = \theta_\beta \theta_\gamma \frac{\theta_\alpha(v)}{\theta(v)}$ ist doppeltperiodisch (der zweiten Art von den Perioden $1, \tau$), wobei α, β, γ je eine von den Zahlen

1) Reye a. a. O. II, 217 ff.

2) In einer anderen Bezeichnung ist, wie bekannt: $T_\alpha(v) = \frac{2\omega_1}{\pi}\sqrt{\wp(u)-e_\alpha}$, $u = 2\omega_1 v$, $\alpha = 1, 2, 3$.

1, 2, 3 bedeuten. Für die Derivation dieser Funktion gilt folgende Formel

$$T'_\alpha(v) = -\pi T_\beta(v) T_\gamma(v).$$

Im folgenden brauchen wir die Werte der Funktion $T_\alpha(v)$ für die halben Perioden. Diese sind

$$\begin{aligned} T_1\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 0, & T_2\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \theta_3^2, & T_3\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \theta_2^2, \\ T_1\left(\tfrac{\tau}{2}\right) &= -i\theta_3^2, & T_2\left(\tfrac{\tau}{2}\right) &= 0, & T_3\left(\tfrac{\tau}{2}\right) &= i\theta_1^2, \\ T_1\left(\tfrac{1+\tau}{2}\right) &= -i\theta_2^2, & T_2\left(\tfrac{1+\tau}{2}\right) &= \theta_1^2, & T_3\left(\tfrac{1+\tau}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Die Darstellung einer Zahl als Summe von 10 Quadraten. — Die vierte Derivation der Funktion $T_\alpha(v)$ ist, wie man leicht nach obiger Formel erhält,

$$T_\alpha^{(IV)}(v) = \pi^4 T_\alpha(v)\left[T_\beta^4(v) + T_\gamma^4(v) + 14 T_\beta^2(v) T_\gamma^2(v)\right] + 4\pi^4 T_\alpha^3(v)\left[T_\beta^2(v) + T_\gamma^2(v)\right].$$

Substituiert man in diesem Ausdruck für v die halben Perioden, so erhält man sogleich

$$T_2^{(IV)}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi^4(\theta_2^8\theta_3^2 + 4\theta_2^4\theta_3^6),$$

$$T_1^{(IV)}\left(\tfrac{\tau}{2}\right) = -i\pi^4(\theta_1^8\theta_3^2 + 4\theta_1^4\theta_3^6).$$

Durch eine leichte Kombination dieser zwei Gleichungen mit der bekannten Formel

$$\frac{\theta_3^{(IV)}}{\theta_3} - 3\frac{\theta_3''^2}{\theta_3^2} = 2\pi^4\theta_1^4\theta_2^4,$$

oder anders

$$\theta_3^{(IV)}\theta_3 - 3\theta_3''^2 = 2\pi^4\theta_1^4\theta_2^4\theta_3^2$$

erhält man mit Rücksicht auf die Relation $\theta_1^4 + \theta_2^4 = \theta_3^4$ das Resultat

$$T_2^{(IV)}\left(\tfrac{1}{2}\right) + i T_1^{(IV)}\left(\tfrac{\tau}{2}\right) + (\theta_3^{(IV)}\theta_3 - 3\theta_3''^2) = \pi^4 \cdot 5\theta_3^{10},$$

womit unsere Aufgabe gelöst ist. Auf der linken Seite dieser Gleichung sind Ausdrücke, welche auf Grund der schon aus den „Fundamenta nova" bekannten Entwicklungen der elliptischen Funktionen als Potenzreihen leicht dargestellt werden können.[1]) Es ist

$$T_2^{(IV)}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left[\theta_1\theta_3\frac{\theta_3(v)}{\theta_1(v)}\right]_{v=0}^{(IV)} = 5\pi^4 + 4\pi^4\sum\frac{(-1)^m(2m+1)^4 q^{2m+1}}{1-q^{2m+1}}, \quad m=0,1,2,\ldots$$

$$i T_1^{(IV)}\left(\tfrac{\tau}{2}\right) = \left[\theta_2\theta_3\frac{\theta_3(v)}{\theta_2(v)}\right]_{v=0}^{(IV)} = 4\pi^4\sum\frac{(2m)^4 q^m}{1+q^{2m}}, \quad m=0,1,2,\ldots$$

$$\theta_3^{(IV)}\theta_3 - 3\theta_3''^2 = 16\pi^4\sum(x^4 - 3x^2y^2)q^{x^2+y^2}; \quad x,y=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

1) Jacobi, Fund. nova, p. 101 u. f., Formel 14) und 25).

Aus diesen Entwicklungen folgt sogleich: Die Anzahl der Darstellungen der Zahl $n = 2^\lambda N$ als Summe von 10 Quadraten ist,

1. wenn $N \equiv 3 \pmod 4$,

$$P_{10}(n) = \tfrac{4}{5}(2^{4\lambda+4} - 1)\sum(d_{4k+3}^4 - d_{4k+1}^4),$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Teiler d der Zahl N bezieht, und zwar ist der Teiler $d_{4k+3} \equiv 3 \pmod 4$ und $d_{4k+1} \equiv 1 \pmod 4$;

2. wenn $N \equiv 1 \pmod 4$,

$$P_{10}(n) = \tfrac{4}{5}(2^{4\lambda+4} + 1)\sum(d_{4k+1}^4 - d_{4k+3}^4) + \tfrac{16}{5}\sum(x^4 - 3x^2y^2),$$

wo x, y alle Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = 2^\lambda N$ durchlaufen.

Die Darstellung einer Zahl als Summe von 12 Quadraten. — Man kann hier die Funktion

$$\wp(2\omega_1 v) = e_\alpha + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 T_\alpha^2(v)$$

benützen. Substituiert man nacheinander in ihre vierte Derivation $v = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}\tau$, $v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, so erhält man

$$\wp^{(IV)}(\omega_1) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 \cdot 8(\vartheta_3^8\vartheta_2^4 + \vartheta_2^8\vartheta_3^4),$$

$$\wp^{(IV)}(\omega_2) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 \cdot 8(-\vartheta_1^8\vartheta_3^4 - \vartheta_3^8\vartheta_1^4),$$

$$\wp^{(IV)}(\omega_3) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 \cdot 8(\vartheta_2^8\vartheta_1^4 - \vartheta_1^8\vartheta_2^4).$$

Aus diesen Gleichungen folgt mit Rücksicht auf die Formel $\vartheta_1^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4$

$$2\wp^{IV}(\omega_1) - \wp^{IV}(\omega_2) - \wp^{IV}(\omega_3) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 \cdot 16[\vartheta_3^{12} + \vartheta_2^{12}].$$

Die Ausdrücke links gehen leicht in bequeme Formen über, wenn wir $u = 2\omega_1 v = 0$ in die vierte Derivation der bekannten Reihenentwicklungen[1]) der Funktionen $\wp(u + \omega_1)$, $\wp(u + \omega_2)$, $\wp(u + \omega_3)$ substituieren.

So ergibt sich endlich

$$\vartheta_2^{12} + \vartheta_3^{12} = 2 + 16\sum\frac{(2m)^5 q^{2m}}{1 - q^{4m}} - 16\sum\frac{(-1)^m m^5 q^{2m}}{1 - q^{2m}}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

woraus folgt: Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl $n = 2^{\lambda+1}N$ (N eine ungerade Zahl, $\lambda \geq 0$) als Summe von 12 Quadraten ist

$$P_{12}(n) = \tfrac{24}{31}(10 \cdot 2^{5\lambda+5} + 21)\sum d^5,$$

wobei das Summenzeichen sich auf sämtliche Teiler der Zahl N bezieht.

Prag, den 10. Oktober 1905.

---

1) **Jacobi**, l. c., p. 113, Formeln 3), 4), 5).

Über die Eulerschen Polyederrelationen.

Von Ernst Steinitz in Berlin.

Zwischen den Anzahlen e, f und k der Ecken, Flächen und Kanten eines konvexen Polyeders bestehen neben der Gleichung

$$e + f = k + 2 \tag{1}$$

noch die für jedes Polyeder geltenden Ungleichungen

$$e \leqq \tfrac{2}{3}k, \quad f \leqq \tfrac{2}{3}k, \tag{2}$$

welche, wie jene Gleichung, von Euler gefunden wurden. Euler hat aus den angegebenen Relationen einige einfache Schlüsse gezogen, z. B. den, daß es kein Polyeder mit 7 Kanten geben könne; dagegen hat er nicht geprüft, ob durch (1) und (2) die Bedingungen für e, f und k erschöpft sind. Da ich eine Bemerkung hierüber auch sonst nicht gefunden habe, so teile ich hier einen kurzen Beweis dafür mit, daß in der Tat, wenn man nur noch die Bedingung der Ganzzahligkeit für e, f und k hinzufügt, die Relationen (1) und (2) nicht nur notwendige sondern auch hinreichende Bedingungen dafür sind, daß konvexe Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten existieren.

Wir gehen von der Betrachtung eines konvexen Polyeders aus, von dem wir voraussetzen, es besitze unter seinen Grenzflächen wenigstens ein Dreieck und unter seinen Ecken wenigstens eine dreiseitige. e', f' und k' seien die Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten des Polyeders. Wir können dann durch die folgenden beiden Prozesse aus diesem Polyeder ein neues erhalten:

Erster Prozeß: Innerhalb der Kanten OA, OB, OC, welche von einer dreiseitigen Ecke O ausgehen, nehmen wir die Punkte A', B', C' an und schneiden von dem Polyeder das Tetraeder $OA'B'C'$ ab. Es bleibt dann ein konvexes Polyeder mit $e' + 2$ Ecken, $f' + 1$ Flächen und $k' + 3$ Kanten zurück, welches wenigstens drei dreiseitige Ecken, nämlich A', B', C' und wenigstens ein Dreieck, nämlich $A'B'C'$ besitzt.

Zweiter Prozeß: Es sei XYZ ein Dreieck des ursprünglichen Polyeders; ξ, η, ζ seien die (unbegrenzten) von XYZ verschiedenen Polyederebenen, welche bezw. durch die Kanten YZ, ZX, XY noch hindurchgehen. Wir nehmen innerhalb des von der Ebene XYZ und den Ebenen ξ, η, ζ begrenzten Gebietes, in welches man, aus dem Innern des Polyeders kommend, nach Überschreitung der Dreiecksfläche

XYZ gelangt, einen Punkt U an. Durch Vereinigung des ursprünglichen Polyeders mit dem Tetraeder $UXYZ$ entsteht ein neues konvexes Polyeder mit $e' + 1$ Ecken, $f' + 2$ Flächen und $k' + 3$ Kanten, welches die dreiseitige Ecke U und die Dreiecke YZU, ZXU, XYU besitzt.

Da durch beide Prozesse Polyeder mit Dreiecken und dreiseitigen Ecken entstehen, so kann man diese Prozesse beliebig oft wiederholen. Wendet man α-mal den ersten und β-mal den zweiten Prozeß an, so erhält man ein Polyeder mit $e' + 2\alpha + \beta$ Ecken, $f' + \alpha + 2\beta$ Flächen und $k' + 3\alpha + 3\beta$ Kanten.

Um nun unsere Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, es seien e, f, k irgend drei den Relationen (1) und (2) genügende ganze Zahlen. Dann haben wir zu zeigen, daß ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten existiert. — Zunächst folgt aus (1) und (2)

$$e \geqq \tfrac{1}{3}k + 2, \quad f \geqq \tfrac{1}{3}k + 2; \tag{3}$$

und diese Ungleichungen nehmen, wenn wir

$$k = 3q - r \tag{4}$$

setzen, wo q eine ganze Zahl, r eine der Zahlen 0, 1, 2 bezeichnet, die Form an

$$e \geqq q + 2 - \tfrac{1}{3}r, \quad f \geqq q + 2 - \tfrac{1}{3}r,$$

oder auch, weil e, f, r ganze Zahlen sind und $0 \leqq \frac{1}{3}r < 1$ ist, die Form

$$e \geqq q + 2, \quad f \geqq q + 2.$$

Setzen wir daher

$$\alpha = e - q - 2, \quad \beta = f - q - 2, \tag{5}$$

so sind α und β ganze Zahlen $\geqq 0$. Aus (5), (4), (1) folgt

$$e = q + 2 + \alpha, \quad f = q + 2 + \beta,$$
$$3q - r = k = e + f - 2 = 2q + 2 + \alpha + \beta,$$
$$q = (2 + r) + \alpha + \beta,$$

also

$$\begin{cases} e = (4 + r) + 2\alpha + \beta, \\ f = (4 + r) + \alpha + 2\beta, \\ k = (6 + 2r) + 3\alpha + 3\beta. \end{cases} \tag{6}$$

Wenn es nun ein konvexes Polyeder P mit $4 + r$ Ecken, $4 + r$ Flächen, $6 + 2r$ Kanten gibt, welches sowohl Dreiecke als auch dreiseitige Ecken besitzt, so brauchen wir, wie die Gleichungen (6) zeigen, auf dasselbe nur α-mal den ersten und β-mal den zweiten Prozeß an-

zuwenden, um ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten zu erhalten. Ein solches Polyeder P existiert aber in der Tat, nämlich für $r = 0$ die dreiseitige, für $r = 1$ die vierseitige, für $r = 2$ die fünfseitige Pyramide. — Hiermit ist der Beweis erbracht.

Zusatz: Den Ungleichungen (2) kann man, indem man mittels (1) k eliminiert, die Form geben

$$(7) \qquad 2f \geqq e + 4, \quad 2e \geqq f + 4;$$

und ebenso kann man umgekehrt aus den Ungleichungen (7), wenn man $e + f - 2 = k$ setzt, die Ungleichungen (2) herleiten. Die Ungleichungen (7) sind daher notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß zwei ganze Zahlen e und f die Anzahlen der Ecken und Flächen eines konvexen Polyeders sein können.

Breslau, den 1. September 1906.

Rezensionen.

J. J. Thomson. **Conduction of Electricity through Gases.** VIII u. 566 S. Cambridge 1903, University Press.

Die Entdeckung der Röntgenstrahlen bezeichnet den Beginn einer neuen Ära in der Geschichte der Physik. Sie gab den Anstoß, daß man sich mit Gasentladungen, Kathodenstrahlen, Kanalstrahlen usw. gründlicher als vorher zu beschäftigen begann, und auch die Erschließung des so überaus fruchtbar gewordenen Gebietes der Radioaktivität war eine unmittelbare Folge der Röntgenschen Entdeckung. Alle diese Erscheinungen stehen in engster Berührung mit den allgemeinen Problemen, die den Durchgang der Elektrizität durch Gase betreffen und die nunmehr zum großen Teile bereits ihre Lösung gefunden haben durch die Ausbildung jener Theorie, die besagt, daß ein Gas stets nur durch Ionen, die sich unter der Einwirkung der elektrischen Kräfte bewegen, Elektrizität zu leiten vermag. Um den Ausbau dieser Theorie hat sich zweifellos J. J. Thomson, der Leiter des Cavendish-Laboratoriums zu Cambridge, in Gemeinschaft mit einer stattlichen Zahl von Schülern die größten Verdienste erworben. Und somit war niemand berufener als er, eine zusammenfassende Darstellung dieses wichtigen Zweiges der modernen Physik zu liefern, wie sie uns nun in dem vorliegenden Werke geboten wird.

Der Verfasser stellt sich in seinem Buche die Aufgabe, zu zeigen, wie die Ionentheorie von den mannigfachen Phänomenen, die uns beim Durchgang der Elektrizität durch Gase begegnen, in vollkommener Weise Rechenschaft zu geben vermag. Mit Recht kann er behaupten, daß wir diese Vorgänge heute viel besser verstehen als die analogen Erscheinungen der Elektrizitätsleitung in festen und flüssigen Körpern

Im ersten Kapitel behandelt er die Frage, inwieweit einem Gase unter normalen Bedingungen eine Leitfähigkeit zukommt. Sodann werden in dem umfangreichen zweiten Kapitel die Eigenschaften der Gase, die sie in dem Zustande besitzen, in welchem sie relativ gute Leiter sind, ausführlich besprochen. Es folgt die mathematische Theorie der Elektrizitätsleitung durch Vermittelung von Ionen. Hieran schließen sich die Auseinandersetzungen über den Einfluß magnetischer Kräfte auf die Ionenbewegung an und über die Bestimmung des charakteristischen Quotienten $\frac{e}{m}$ (Ladung zur Masse eines Ions) sowie über die Ermittelung der Ionenladung selbst. Das siebente Kapitel trägt die Überschrift: „Einige physikalische Eigenschaften der Gasionen“; hier ist vornehmlich von der Eigenschaft der Ionen, als Kondensationskerne zu wirken, die Rede. Kapitel VIII—XI handeln von der Ionisierung durch glühende Körper, Flammen, Licht (Photoelektrizität) und Röntgenstrahlen. Es folgen weitere Darlegungen über Becquerel-

strahlen, die Funkenentladung, den Lichtbogen, elektrische Entladungen durch verdünnte Gase, die Theorie der elektrischen Vorgänge in Vakuumröhren, Kathodenstrahlen und Röntgenstrahlen. Im letzten, neunzehnten Kapitel werden schließlich unter dem Titel: „Einige Eigenschaften bewegter elektrisch geladener Körper" gewisse neuere Probleme der Elektronentheorie besprochen.

Die vorliegende Anzeige des Buches erscheint etwas verspätet. Jeder, der sich in neuerer Zeit auf dem Gebiete der gaselektrischen Erscheinungen selbst forschend betätigt hat, dürfte das Thomsonsche Werk schon ausgiebig zu Rate gezogen haben, so daß es einer besonderen Empfehlung nicht mehr bedarf. Eine deutsche Übersetzung[1]) (von E. Marx im Verlag von B. G. Teubner) ist unlängst erschienen.

Berlin. E. Aschkinass.

Svante August Arrhenius. Lehrbuch der kosmischen Physik. 2 Bände. Mit 304 Abbildungen und 3 Tafeln. VIII, VIII u. 1026 S. Leipzig 1903, S. Hirzel. ℳ 38.—, geb. ℳ 40.—

Der Verfasser, dessen Name in der Geschichte der modernen Physik und Chemie schon längst einen Ehrenplatz einnimmt, hat es in dem vorliegenden Werke unternommen, eine zusammenfassende Darstellung der gesamten kosmischen Physik zu liefern, eines Gebietes, auf dem er gleichfalls durch eigene Forschungen vielfach hervorgetreten ist. Es wird damit eine Lücke der wissenschaftlichen Literatur ausgefüllt, da es an einer brauchbaren Bearbeitung jenes umfangreichen Zweiges der exakten Naturwissenschaft, vom Standpunkte der neueren Anschauungen aus, bisher noch gänzlich fehlte. Selbstverständlich mußte der zur Behandlung herangezogene Stoff nach gewissen Gesichtspunkten begrenzt werden. Dies geschah in der Weise, daß Fragen von rein astronomischem, hydrographischem, geologischem und meteorologischem Charakter höchstens gestreift, dagegen alle Probleme, die mit der Physik und Chemie in innigem Zusammenhange stehen, ausführlich behandelt wurden.

Das ganze Werk umfaßt zwei starke Bände, von denen der erste die „Physik des Himmels" und die „Physik der Erde"; der zweite die „Physik der Atmosphäre" enthält. Allenthalben sind die neuesten Ergebnisse der Forschung berücksichtigt worden, so daß zunächst der Fachmann — im engeren Sinne genommen — dieses Buch künftig mit großem Nutzen zu Rate ziehen wird. Aber auch demjenigen, dessen speziellere Interessen auf einem anderen Gebiete der Naturwissenschaften liegen, ist die Lektüre der beiden Bände angelegentlichst zu empfehlen. Hervorgehoben zu werden verdient auch die Eleganz und Anschaulichkeit der Schreibweise.

Es wäre ein zweckloses Bemühen, den reichen Inhalt des Werkes in einer Anzeige kurz skizzieren zu wollen. Nur die Überschriften der einzelnen Kapitel mögen an dieser Stelle noch angeführt werden, um eine Vorstellung von der Fülle des dargestellten Stoffes zu geben und den Leser dieser Zeilen zur eigenen Lektüre des Buches zu reizen.

1) J. J. Thomson, Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autor. Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von Dr. E. Marx, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 187 Figuren im Text. VII u. 587 S. gr. 8. Leipzig 1906. B. G. Teubner. geh. ℳ 18.—, geb. ℳ 19.—.

Physik des Himmels: I. Die Fixsterne. II. Das Sonnensystem. III. Die Sonne. IV. Die Planeten, ihre Satelliten und die Kometen. V. Kosmogonie.

Physik der Erde: I. Gestalt, Masse und Bewegung der Erde. II. Die feste Erdkruste und das Erdinnere. III. Das Meer. IV. Das Wasser auf dem Festlande. V. Die Wellenbewegung des Meeres und der Seen. VI. Die Wechselwirkung zwischen Land und See. Küsten.

Physik der Atmosphäre: I. Bestandteile der Luft. II. Die Wärmezufuhr der Erde. IV. Die Temperatur der Erdoberfläche. V. Die Temperatur der Luft. VI. Der Luftdruck. VII. Das Wasser in der Atmosphäre. VIII. Wolken und Niederschlag. IX. Die Winde. X. Luftwirbel. XI. Theorie der atmosphärischen Zirkulation. XII. Einwirkung des Windes auf die feste Erdoberfläche. XIII. Die Gewitter. XIV. Meteorologische Akustik. XV. Meteorologische Optik. XVI. Atmosphärische Elektrizität. XVII. Die Polarlichter. XVIII. Der Erdmagnetismus.

Berlin. E. Aschkinass.

W. Ahrens. Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. X u. 522 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner. ℳ 8.—.

Eine sehr hübsche und anregende Lektüre gibt dieses Buch in seiner teils lehrreichen, teils amüsanten Zusammenstellung aller möglichen Urteile Berufener und Unberufener über Mathematik, ihren Bildungswert und Nutzen, über kleine und große Schwächen bekannter Mathematiker, über philosophisch-mathematische Probleme, über die Beziehungen der Mathematik zur Kunst und Technik und unzählig viele andere Dinge. Wenn auch die Zitate scheinbar regellos aneinander gereiht sind, so wird man doch von Zitat zu Zitat, ohne zu ermüden, weiter geführt, und nur ungern legt man schließlich das Buch aus den Händen.

Berlin. P. Schafheitlin.

R. Haußner. Darstellende Geometrie. I Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Mit 100 Figuren. 192 S. Leipzig 1902, G. J. Göschen. ℳ —.80.

J. Vonderlinn. Schattenkonstruktionen. Mit 114 Figuren. 118 S. Leipzig 1904, G. J. Göschen. ℳ —.80.

Das einfach und klar geschriebene Buch von Haußner, dessen Verständnis durch sorgfältig gezeichnete Figuren erleichert wird, behandelt im ersten Abschnitte die Parallelprojektionen ebener Gebilde und die affine Verwandtschaft der Figuren; im zweiten werden kurz die Methoden der schiefen Parallelprojektion besprochen, während die beiden letzten Abschnitte sich mit der orthogonalen Parallelprojektion von Punkten, Geraden, Ebenen und ebenflächig-begrenzten Körpern beschäftigen.

Eine hübsche Ergänzung dieses Buches bilden die Schattenkonstruktionen Vonderlinns. Es werden besprochen die Konstruktion des Schattens in orthogonaler Projektion von Punkten, Geraden, Polyedern; vom Zylinder, Kegel und der Kugel, sowie von Rotationskörpern, Gesimsen, Schrauben- und Röhrenflächen.

Berlin. P. Schafheitlin.

M. Möller. Orientierung nach dem Schatten. Studien über eine Touristenregel. Mit 30 Figuren in Holzschnitt. 156 S. Wien 1905, Hölder. ℳ 3.50.

Die Regel lautet: Auf das Zifferblatt einer horizontal liegenden nach Ortszeit gehenden Uhr falle der Schatten einer vertikalen Kante längs des Stundenzeigers, die Spitze des Zeigers gegen den schattengebenden Körper gerichtet; der Winkel zwischen XII und der so beschatteten Tagesstunde wird halbiert; die Halbierungslinie zeigt gegen Süden.

Selbstverständlich kann diese Regel nur näherungsweise richtig sein; die teils geometrischen, teils algebraischen Untersuchungen beziehen sich wesentlich auf die Ermittelung der Größe des Fehlers, der sowohl von der Jahreszeit als auch von der Stunde und der geographischen Breite abhängt. Beispielsweise ergibt sich für die Breite 30^0 ein Fehlermaximum von über 50^0, für Deutschland von zirka 25^0.

Berlin. P. Schafheitlin.

H. Müller u. M. Kutnewsky. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie. II. Teil. Ausgabe A, für Gymnasien. 2. Auflage. VIII u. 273 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. ℳ 2.20.

In der neuen Auflage sind verschiedene Kürzungen gegen die erste eingetreten; meiner Meinung nach hätten auch die Abschnitte über Gleichungen dritten Grades weggelassen werden können. Denn alle in den Anwendungen auf Seite 75—82 gegebenen Beispiele lassen sich ohne Kenntnis der Lösung der Gleichungen dritten Grades nicht allgemein, sondern nur für die speziellen Zahlenwerte lösen, die in der Aufgabe gewählt sind; dadurch aber kann unmöglich der Schüler Befriedigung an der betreffenden Aufgabe empfinden.

Die Aufnahme einiger Konstruktionsaufgaben über Kegelschnitte paßt nicht recht in den Rahmen der Sammlung; sie verstößt gegen den im übrigen durchaus rechnerischen Charakter, während andererseits die Anzahl dieser Aufgaben zu gering ist, um den Bedürfnissen der konstruierenden Geometrie zu genügen.

Berlin. P. Schafheitlin.

R. Schüßler. Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium. Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. VII u. 170 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. ℳ 7.—.

In den Sitzungsberichten der Akademie zu Wien aus den Jahren 1880, 1881 und 1884 hat Pelz nachgewiesen, daß bei den Aufgaben der orthogonalen Axonometrie die Benutzung des Achsenkreuzes wesentlich die Konstruktionen vereinfacht, und daß diese ohne die Reduktionskoeffizienten der Achsen durchgeführt werden können. Da jene Abhandlungen nicht für Anfänger bestimmt sind und ihnen gewisse Schwierigkeiten bereiten würden, so wird hier der Versuch gemacht, die einfachen Resultate von Pelz so abzuleiten, daß man keinerlei Vorkenntnisse vorauszusetzen braucht, und dieser Versuch kann als durchaus geglückt bezeichnet werden. Zur Besprechung

gelangt in klarer und anschaulicher Weise die Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene, von Polyedern, Prismen und Pyramiden, von Kreis und Kegelschnitten, von Zylinder, Kegel, Kugel und Rotationsflächen.

Berlin. P. SCHAFHEITLIN.

L. Zehnder. Das Leben im Weltall. Mit einer Tafel. 125 S. Tübingen und Leipzig 1904, J. C. B. Mohr (Paul Siebeck). ℳ 2.50.

Gar munter tummelt der Verf. das übermütige und ungestüme Rößlein seiner Phantasie durch Mikro- und Makrokosmos. Kein Zügel der Kritik hemmt seinen Lauf, keine Schranke der Tatsachen begrenzt seine Sprünge. Nicht unergötzlich für den Kundigen kann dieses Buch heillose Verwirrung in den Köpfen solcher Leser anrichten, die glauben, das von einem a. o. Professor für Physik an der Universität München Gebotene für Physik halten zu müssen.

Breslau. E. PRINGSHEIM.

E. Mathias. Le point critique des corps purs. 225 S. Paris 1904, C. Naud.

Diese ausführliche und klare Darstellung der Wissenschaft vom kritischen Zustande ist eine erweiterte Umarbeitung der von dem Verf. in den Rapports des internationalen Physiker-Kongresses zu Paris 1900 veröffentlichten Studie. Unter den neu hinzugekommenen Kapiteln sind die drei letzten besonders bemerkenswert, in denen der Verf. auf die bei dem kritischen Punkt auftretenden Anomalien eingeht und sich der von de Heen aufgestellten Hypothese der liquidogenen und gasogenen Moleküle zuneigt in einer Form, welche der von J. Traube gegebenen nahesteht. Obwohl der Verf. die de Heensche Hypothese in Einklang bringt mit der „klassischen“ Andrewsschen Theorie, dem Avogadroschen Gesetz und der Phasenregel, ist doch wohl der Beweis nicht erbracht, daß die ältere Theorie außer stande ist, die Anomalien ohne Hilfe einer solchen ad hoc eingeführten Hypothese zu erklären.

Breslau. E. PRINGSHEIM.

B. Weinstein. Thermodynamik und Kinetik der Körper. II. Band. XVIII u. 586 S. ℳ 16.—. 1903. III. Band, 1. Halbband. XVI u. 464 S. 1905. Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn. ℳ 12.—.

Dem an dieser Stelle schon besprochenen ersten Bande (Arch. (3) **3**, 66) ist in erfreulich raschem Tempo der zweite Band und der erste Halbband des dritten Bandes gefolgt.

Der zweite Band beginnt mit einem Kapitel über absolute Temperatur. Die thermodynamische und thermokinetische Temperaturskala wird eingehend erörtert und eine Vergleichung zwischen den absoluten Skalen und den konventionellen durchgeführt. Die neue strahlungstheoretische Temperaturskala, welche beim Erscheinen des Bandes noch in der Entstehung begriffen war, wird nur in einer kurzen Bemerkung gestreift. Sodann folgt ein Kapitel über Flüssigkeiten und eines über Gase. Hier zeigt sich ebenso wie im weiteren Verlauf des Buches deutlich, daß die im ersten Bande so aus-

führlich behandelten Zustandsgleichungen in der tatsächlichen Durchführung der Thermodynamik noch eine sehr geringe Rolle spielen, und daß auch die kinetischen Vorstellungen in dem großen Gebäude der Wärmelehre nur eine sehr bescheidene Wohnung finden.

In dem nächsten Kapitel, welches die Überschrift trägt: „Thermodynamische Mechanik und nicht umkehrbare Vorgänge", wird zunächst die Lehre von den thermodynamischen Gleichgewichten entwickelt, die Gibbssche Phasenregel, das thermodynamische Potential, Entropie und Energie werden behandelt. Daran schließt sich die Lehre von den Umwandlungsgeschwindigkeiten und von solchen Vorgängen überhaupt, bei denen die Zeit berücksichtigt werden muß. Im letzten Kapitel endlich wird die Theorie der Mischungen und Lösungen behandelt, mit Ausnahme der verdünnten Lösungen.

Mit diesen beschäftigt sich der erste Halbband des dritten Bandes. Die van't Hoffsche Theorie wird sehr genau inbezug auf ihre experimentellen und theoretischen Grundlagen geprüft, denen in Anbetracht der großen Bedeutung, welche die Theorie für den Fortschritt der Wissenschaft gehabt hat, eine größere Sicherheit zu wünschen wäre. Den Schluß des ersten Halbbandes bildet die Thermodynamik der Elektrizität und des Magnetismus, welche in dem zweiten Halbband, für den die Theorie der Elektrolyse vorbehalten ist, ihren Abschluß finden soll.

Wie der erste Band, so sind auch die jetzt vorliegenden Teile des Buches mit großer Sorgfalt und eingehender Benutzung und Kritik der sehr ausgedehnten theoretischen und experimentellen Literatur gearbeitet. An vielen Stellen sind eigene Entwicklungen des Verf. eingefügt und jede Zeile verrät, daß er sein Thema vollständig beherrscht und mit erstaunlichem Fleiß und geistiger Energie durchdrungen hat. Allerdings sind auch die Anforderungen nicht gering, welche das Buch an den Leser stellt, und der Ref. hofft, daß er noch Zeit und Stimmung finden wird, um den Inhalt genauer studieren zu können, als es ihm bis jetzt möglich war. Daß er dann, wie jeder genügend vorbereitete Leser hier eine reiche Quelle der Belehrung und Anregung finden wird, darüber hat er keinen Zweifel.

Breslau. E. Pringsheim.

E. Picard. Traité d'analyse. Part. I. Deuxième édition. 483 S. Paris 1901, Gauthier-Villars. Fr. 16.—.

Der erste Teil dieses Bandes enthält die Elemente der Integralrechnung. Eingehende Behandlung erfährt die Erweiterung des Integralbegriffs, welche in der mathematischen Physik eine so wichtige Rolle spielt, in dem Sinne, daß der Integrationsweg durch eine Kurve oder Fläche dargestellt wird. Dabei nimmt der Verfasser Gelegenheit, auf die prinzipiellen Fragen einzugehen, welche heute die Mathematiker stark beschäftigen, so bei der Definition der Kurvenlänge auf die Kurve von Peano und Hilbert, welche ein ebenes Flächenstück erfüllt, auf nichtintegrierbare Funktionen u. a.

Im zweiten Teil werden einige Anwendungen der im ersten entwickelten allgemeinen Sätze erbracht. Und zwar beschäftigt sich der Verfasser zunächst mit der Laplaceschen Gleichung $\Delta u = 0$ und den Fundamentaleigenschaften des Potentials. Hierbei möchte sich Referent die Bemerkung erlauben, daß vor

der Gaußschen die von Clausius (Die Potentialfunktion und das Potential, Leipzig 1877, A. Barth) herrührende Ableitung der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung den Vorzug verdient, insofern als sie nicht die Differenzierbarkeit der Masse zur Voraussetzung hat. Gleichwohl findet sich die Clausiussche Herleitung nicht in den neueren Darstellungen der Potentialtheorie, z. B. auch nicht in Poincarés Théorie du Potentiel newtonien, Paris 1899, Carré et Naud.

In dem zweiten Teile findet sich auch eine Untersuchung der Reihenentwicklungen, insbesondere der trigonometrischen Reihen, wobei der Cantorsche Satz — daß eine Identität der Form

$$\alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) = 0$$

nur bestehen kann, wenn sämtliche Koeffizienten verschwinden — sowie die Weierstraßschen Sätze über näherungsweise Darstellung einer willkürlichen Funktion mit vorgegebener Genauigkeit eingehende Besprechung erfahren.

Der dritte Teil endlich bringt die geometrischen Anwendungen der Infinitesimalrechnung: Theorie der Enveloppen, Regelflächen, Kongruenzen und Komplexe; der Krümmung und Torsion der Raumkurven; der Kurven auf einer Fläche und der abwickelbaren Flächen.

Die zweite Auflage unterscheidet sich wenig von der ersten, nur daß der Verfasser auf prinzipielle Fragen, die im Vordergrunde des Tagesinteresses stehen, etwas mehr eingegangen ist und zahlreiche literarische Nachweise für diejenigen Leser hinzugefügt hat, welche den betreffenden Fragen der „mikroskopischen Mathematik" weiter nachgehen wollen.

Berlin. E. Jahnke.

Annaes scientificos da academia polytechnica do Porto publicados sob a direcção de F. Gomes Teixeira. Vol. I. Nr. 1⁰. Coimbra 1905, imprensa da universidade.

Mit dem Jahre 1905 ist das Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas eingegangen und hat einem neuen Unternehmen Platz gemacht, das sich auf breiterer Grundlage aufbaut. Die Annaes öffnen ihre Spalten nicht bloß der reinen und angewandten Mathematik; sie nehmen auch Beiträge aus den Gebieten der Physik, der Chemie, der Naturwissenschaften und der sozialen Wissenschaften auf, und nicht bloß rein wissenschaftliche Arbeiten, auch pädagogische Artikel, Berichte über den gegenwärtigen Stand einzelner Wissenschaftszweige usw. Wir wünschen der neuen Zeitschrift, deren Leitung in den Händen des bewährten Jornal-Redakteurs geblieben ist, vollen Erfolg, insbesondere auch nach der Richtung, in Portugal den Sinn für die mathematischen Wissenschaften mehr und mehr zu verbreiten.

Der Inhalt des ersten Heftes ist: F. Gomes Teixeira: Questão entre Monteiro da Rocha e Anastacio da Cunha. — N. Nielsen: Sur les séries neumanniennes de fonctions sphériques. — J. J. Ferreira da Silva: A obra scientifica e a vida do chimico portuguez Roberto Duarte Silva. — Bento Carqueja: O capitalismo e as suas origens em Portugal.

Berlin. E. Jahnke.

H. Mayer. Die neueren Strahlungen. Kathoden-, Kanal-, Röntgen-Strahlen und die radioaktive Selbststrahlung (Becquerelstrahlen). Vom Standpunkte der modernen Elektronentheorie unter Berücksichtigung der neueren experimentellen Forschungsresultate behandelt und im Zusammenhange dargestellt. V u. 68 S. Mähr.-Ostrau 1904, R. Papauschek. ℳ 1.50.

Dieser kurze und ziemlich vollständige Auszug aus den zahlreichen, auf die neueren Strahlungen bezüglichen Publikationen dürfte manchem willkommen sein, obwohl dem Verf. kritisches Urteil und Klarheit der theoretischen Anschauungen nicht gerade nachzurühmen sind. Diese Mängel fallen besonders in der Einleitung sehr ins Auge. Die gläubige Annahme von Resultaten, die von den Autoren selbst zurückgezogen worden sind (v. Geitler, Ablenkung der Magnetnadel durch Kathodenstrahlen, Blondlot, Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Röntgenstrahlen) hätte bei einiger Aufmerksamkeit vermieden werden müssen. Daß der Verf. auf Blondlots *n*-Strahlen „eingegangen" ist, soll ihm nicht zum Vorwurf gemacht werden.

Breslau E. Pringsheim.

Fr. Strobel. Adreßbuch der lebenden Physiker, Mathematiker und Astronomen des In- und Auslandes und der technischen Hilfskräfte. X u. 208 S. Leipzig 1905, J. A. Barth. ℳ 7.60.

Das Adreßbuch will alle Lehrkräfte der Hochschulen, d. i. der Universitäten, der technischen Hochschulen, der Bergakademien und der landwirtschaftlichen Hochschulen, sowie der Mittelschulen des In- und Auslandes aus den Gebieten der Physik, Mathematik und Astronomie umfassen, wobei hinsichtlich der Anwendungen und Grenzgebiete eine Auswahl getroffen werden mußte, an welcher naturgemäß einer oder der andere etwas auszusetzen finden wird. Die Adressen der genannten Lehrkräfte sind nach Städten gruppiert und diese Stadtüberschriften alphabetisch geordnet.

Was die Namen oder Firmen der technischen Hilfskräfte angeht, so sind dieselben einmal in dieses alphabetische Verzeichnis aufgenommen, derart daß sie bei den einzelnen Städten am Ende zusammengestellt und durch Kursivschrift erkennbar gemacht worden sind. Andererseits werden dieselben in einem besonderen „Bezugsquellenverzeichnis", sachlich gruppiert, aufgeführt. Übrigens ist hierbei von den technischen Hilfskräften nichtdeutscher Länder abgesehen worden. Hieran schließt sich ein Register, das in einem Alphabet alle unter den Städten angegebenen Namen wiederholt, unter Hinzufügung der Seitenzahl.

Nach den Stichproben zu urteilen, welche Referent vorgenommen hat, ist das Adreßbuch mit großer Sorgfalt angefertigt worden, was nicht ausschließt, daß manche Unrichtigkeiten untergelaufen und manche Lücken unbemerkt geblieben sind. Dem Wunsche des Herausgebers nachkommend, seien diejenigen genannt, welche dem Referenten aufgefallen sind: Unter „Berlin" fehlen die Namen vieler Oberlehrer, wie durch Vergleich mit dem Mitgliederverzeichnis in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft (B. G. Teubner, Leipzig) ersichtlich wird. Unter „Breslau" fehlen die beiden Oberlehrer Prof. Dr. O. Gutsche und Dr. M. Peche; unter „Halle" die Verlagsbuchhandlung von Martin Schilling, welche den Vertrieb mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht übernommen

hat; unter „Holzminden" der Oberlehrer Dr. G. Kober; unter „Magdeburg" der Oberlehrer Dr. Bradhering; unter „Mannheim" Dr. B. Oster, Versicherungsmathematiker; unter „Prenzlau" der Oberlehrer Dr. Stegemann; unter „Tokio" der japanische Mathematiker Sawayama. Der Professor für darstellende Geometrie F. Schilling in Danzig ist identisch mit dem irrtümlich noch unter Göttingen aufgeführten Mathematiker.

Von Physikern habe ich den Privatdozenten Dr. Cl. Schäfer an der Breslauer Universität, den Prof. Dr. Stodola am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich und den Professor Sumeč an der Brünner technischen Hochschule vergebens im Adreßbuch gesucht.

Berlin. E. Jahnke.

Festschrift, Adolf Wüllner gewidmet zum siebzigsten Geburtstage von der Kgl. techn. Hochschule zu Aachen, ihren früheren und jetzigen Mitgliedern. Mit dem Bildnisse Wüllners, 8 Tafeln und 91 Figuren im Text. VIII u. 264 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. geh. ℳ 8.—, geb. ℳ 9.—.

Die dem bekannten Physiker Adolf Wüllner gewidmete Festschrift enthält 15 Abhandlungen aus verschiedenen naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen. Prozentual am stärksten ist naturgemäß die Physik vertreten.

Max Wien unterzieht die Helmholtzsche Resonanztheorie des Hörens einer meines Erachtens zutreffenden Kritik. Seine Ausführungen gipfeln in folgender Zusammenfassung: „Die vollkommene selektive Erregung ist nur bei sehr scharfer Resonanz denkbar. Diese ist aber nur möglich bei sehr schwacher Dämpfung. Mit schwacher Dämpfung ist jedoch die Erkennbarkeit des Trillers unvereinbar und damit ist die Möglichkeit der Erklärung der vollkommenen selektiven Erregbarkeit illusorisch geworden".

August Hagenbach liefert Beiträge zur Untersuchung der Bandenspektren; die hauptsächlichsten Experimente beziehen sich auf die Einwirkung des Druckes auf die Struktur der Spektren. Wenn ich auch nicht mit allem einverstanden bin, was der Verfasser äußert, so sind doch seine Versuche als eine schätzenswerte Bereicherung des experimentellen Materials anzuerkennen.

Sehr interessant ist eine zum Teil experimentelle, zum Teil theoretische Untersuchung von Sommerfeld über Lissajous-Figuren und Resonanzwirkungen bei schwingenden Schraubenfedern. Diese Versuche können verwertet werden zur Bestimmung des sogen. Querkontraktionskoeffizienten, der bekanntlich in der Theorie der Elastizität eine große Rolle spielt. Ursprünglich als bloße Demonstrationsversuche erdacht, scheinen sie mir auch noch ein darüber hinausgehendes Interesse zu haben; denn sie gestatten in relativ einfacher Weise auch bei anderen Temperaturen die Elastizitätsmoduln und damit deren Temperaturkoeffizienten zu bestimmen. Damit ist auch der Querkontraktionskoeffizient als Funktion der Temperatur bestimmt, und die von mir auf etwa 10 Metalle ausgedehnte Untersuchung dieser Funktion wird sich jetzt auch auf die Metalle erstrecken können, bei denen die bisherigen Methoden versagten. Nebenbei bemerkt bilden die Resonanzwirkungen ein vollständiges mechanisches Analogon zu den Erscheinungen, die zwei gekoppelte elektrische Schwingungskreise zeigen, wie sie z. B. in der drahtlosen Telegraphie verwendet werden.

Von den mathematischen Abhandlungen sei diejenige von Lothar Heffter über Anordnung und Aufbau der Geometrie hervorgehoben, weil sie erkenntnis-theoretisch und pädagogisch von hervorragendem Interesse ist. Es sei deshalb gestattet ihren Inhalt kurz zu skizzieren.

Als geometrische Elemente werden betrachtet der Punkt, die Ebene und die Gerade; die Geometrie befaßt sich nun mit den Beziehungen zwischen mehreren Elementen derselben oder verschiedener Art. Als elementare Beziehungen werden betrachtet die Inzidenz verschiedenartiger Elemente, die Parallelität und die Orthogonalität. Zur Klassifikation der Geometrie werden nun drei Transformationsarten des Punkt-Ebenen-Raumes benutzt, die durch die obigen elementaren Beziehungen bestimmt sind. Man nennt die Transformation des Raumes, die jedes Element ein-eindeutig in ein gleichartiges überführt, *projektiv*, wenn sie alle Inzidenzen enthält, *affin*, wenn sie alle Inzidenzen und Parallelitäten enthält, *äquiform*, wenn sie alle Inzidenzen, Parallelitäten und Orthogonalitäten enthält. Damit ist nun die Geometrie in die projektive, affine und äquiforme Geometrie eingeteilt. Durch Hinzufügung der „Parallelmetrik“ erweitert sich die projektive Geometrie zur affinen, diese zur äquiformen durch Hinzufügung der „Orthogonalmetrik“. Heffter führt diesen Gedanken in der vorliegenden Abhandlung näher aus.

Diese Blütenlese genügt, um erkennen zu lassen, eine wie wertvolle Gabe die Wüllner-Festschrift nicht nur für den Jubilar, sondern auch für weite wissenschaftliche Kreise ist.

Breslau. Cl. Schaefer.

H. Abraham et **P. Langevin. Les quantités élémentaires d'électricité Ions, Electrons, Corpuscules.** Mémoires réunis et publiés. 2 Bände. Paris 1905, Gauthier-Villars.

Das vorliegende unter den Auspizien der französischen physikalischen Gesellschaft herausgegebene Werk füllt in dankenswertester Weise eine Lücke der Literatur aus. Es ist nämlich eine Sammlung der wichtigsten Abhandlungen aus dem Gebiete der Ionen- und Elektronentheorie, die sämtlich ins Französische übertragen sind. Es ist demnach ein Werk wie die im Jahre 1900 ebenfalls von der französischen physikalischen Gesellschaft herausgegebenen „Rapports“. Jeder, der auf diesem Gebiete arbeitet oder sich orientieren muß, hatte bisher darunter zu leiden, daß die ungeheuere Literatur überall zerstreut war; dem ist nun abgeholfen. 150 der wichtigsten Abhandlungen — ich nenne nur die Namen Hertz, Thomson, Lenard, Lorentz, Drude, Hittorf, Larmor, Rutherford, Becquerel, Curie, Elster und Geitel — sind hier gesammelt und so bequem zugänglich gemacht. Wo ich es durch Stichproben kontrollieren konnte, habe ich auch an der Übersetzung nichts auszusetzen gefunden. Bei der ins Auge springenden Brauchbarkeit erübrigt sich eine weitere Empfehlung.

Breslau. Cl. Schaefer.

E. Rutherford. Radioactivity. 2. Auflage. 580 S. Cambridge 1905, University press. 12 sh. 6 p.

Rutherfords zahlreiche schöne Untersuchungen über Radioaktivität haben wesentlich dazu beigetragen, unsere Kenntnis von diesen wunderbaren

Erscheinungen zu erweitern. Es ist deshalb mit Freuden zu begrüßen, daß er es unternommen hat, die vielen Entdeckungen auf dem neuerforschten Gebiet kritisch zusammenzustellen. Daß damit einem Bedürfnis abgeholfen wird, zeigt die Tatsache, daß das Buch nach einem Jahre bereits in zweiter Auflage erscheint. Die neue Auflage ist, entsprechend den Fortschritten der Forschung in dem Jahr, zum großen Teil neu bearbeitet und bis in die allerneuste Zeit hinein ergänzt. Das Werk ist jedem zu empfehlen, der sich ernstlich über Radioaktivität informieren will. Dem Leser wird das Buch Genuß bringen, besonders vielleicht die Kapitel über die radioaktiven Umwandlungen, die glänzende Proben von Rutherfords Experimentier- und Kombinationskunst enthalten; er wird des Verfassers Ausführungen aber auch da mit Interesse folgen, wo vielleicht das Beobachtungsmaterial noch nicht umfassend genug zu sein scheint, um die vom Verfasser gezogenen Schlüsse zu rechtfertigen (etwa bei der Behandlung der α-Strahlen und dem Zusammenhang zwischen α-Strahlen und Helium); der Wert des Buches wird dadurch nicht beeinträchtigt.

Das Buch beginnt (Kap. I) mit einer historischen Übersicht über die Entdeckung der radioaktiven Substanzen und einer kurzen Beschreibung der als radioaktiv erkannten Elemente Uran, Thor, Radium, Aktinium, Polonium, Radioblei. Es folgt dann (Kap. II) ein kurzer Abriß der Ionen- und Elektronentheorie der Gasentladung, soweit diese für das Verständnis der radioaktiven Erscheinungen notwendig ist. Kap. III bespricht die Meßmethoden, die vielfach eigens für solche Messungen ausgearbeitet sind, und gibt wertvolle Einzelheiten für die Ausführung von Messungen an (praktische Elektrometerschlüssel, Isolationsverfahren u. dgl.). Den von radioaktiven Substanzen ausgehenden Strahlungen, ihrer Natur, ihren Eigenschaften und Wirkungen sind die nächsten 100 Seiten gewidmet. (Kap. IV u. V.) Verf. beschreibt die Untersuchungsmethoden, deren Resultate dazu führten, den β- und α-Strahlen korpuskularen Charakter zuzuschreiben, d. h. sie aufzufassen als Schwärme von elektrisch geladenen kleinen Teilchen, während man die γ-Strahlen wohl als elektro-magnetische Strahlung, den Röntgenstrahlen ähnlich, aufzufassen habe. Es wird gezeigt, auf welchem Wege man zur Kenntnis der wichtigsten Konstanten von α- und β-„particles“ gelangt (spezifische Ladung, Geschwindigkeit, Absorption). Besonders interessant ist der viele eigene Beobachtungen des Verf. enthaltende Abschnitt über α-Strahlen (auch Anhang A), von deren fernerem Studium sich wohl am ehesten weitere Aufklärung über das Wesen der Radioaktivität erwarten läßt. Die Abschnitte über γ-Strahlen und besonders über Sekundärstrahlen (die beim Auftreffen von α-, β- oder γ-Strahlen auf Materie entstehen) zeigen, daß wir von diesen Erscheinungen noch sehr wenig wissen. Von Eigenschaften und Wirkungen der Strahlen werden besprochen: elektrische, thermische, Phosphoreszenz erzeugende, ionisierende, chemische, physiologische. Die 3 folgenden Kapitel, VI (stetige Bildung von radioaktiver Substanz), VII (Emanationen), VIII (induzierte Radioaktivität) machen den Leser mit den experimentellen Tatsachen vertraut, die als Grundzüge für die später (Kap. IX) entwickelte Desaggregationstheorie der Radioaktivität dienen. Diese von Rutherford und Soddy aufgestellte Theorie faßt bekanntlich die Radioaktivität auf als Begleiterscheinungen beim Zerfall eines Atoms. Radioaktive Substanzen sind da-

nach instabile Gebilde, die, während sie die Erscheinungen, die man radioaktive nennt, äußern, zerfallen und in andere Körper sich verwandeln, die ihrerseits entweder inaktiv oder wieder radioaktiv sein können. Die Theorie läßt so eine ganze Reihe von Umwandlungsprodukten radioaktiver Substanzen voraussehen. Diejenigen, die bekannt sind, werden beschrieben, zunächst die von Uran, Thorium, Aktinium (Kap. X). Jedes dieser Umwandlungsprodukte ist definiert durch die Art von Strahlen, die es aussendet; und durch seine sog. mittlere Lebensdauer, d. h. eine Zahl, welche die allmähliche Abnahme der Radioaktivität der betreffenden Substanz mathematisch zu beschreiben gestattet. Wichtig ist nun, daß sich für jedes der Umwandlungsprodukte auch physikalische oder chemische Eigenschaften angeben lassen, die eine Unterscheidung und auch Trennung von den übrigen Substanzen ermöglichen. Tabellen auf S. 364 u. S. 370 geben an, was man von den Umwandlungsprodukten von Thorium bzw. Aktinium weiß. Besonders gut sind diese Verhältnisse beim Radium (Kap. XI) untersucht, von dem man nicht weniger als 7 Umwandlungsprodukte kennt. Einzelne von diesen Umwandlungsprodukten sind wahrscheinlich mit Radiotellur-Polonium bzw. mit Radioblei identisch; eine Tabelle (S. 406) stellt die Eigenschaften der Radiumabkömmlinge übersichtlich zusammen. Kap. XII behandelt die spontane Wärmeentwicklung bei radioaktiven Substanzen und gibt Zahlen an, die eine Vorstellung von den ungeheuren an solchen Körpern freiwerdenden Energiemengen schaffen. Dann werden die zur Erklärung der Radioaktivität vorgeschlagenen Theorien diskutiert (Kap. XIII) und die von Rutherford und Soddy aufgestellte, bereits vorher erwähnte Theorie weiter ins einzelne ausgeführt, wobei sich interessante Ausblicke auf die „Lebensgeschichte“, die Entstehung des Radiums, sowie auf die Bildung von Helium aus Radium ergeben. Die Besprechung der radioaktiven Mineralien (auch Anhang B) und der Radioaktivität der Atmosphäre bilden den folgenden Abschnitt (Kap. XIV), dessen Schluß die höchst interessante und wichtige Frage ventiliert, ob allen Substanzen eine gewisse, wenn auch sehr geringe Radioaktivität zuzuschreiben sei. Wäre dies der Fall, so müßten wir alle Materie als in langsamer Umwandlung begriffen ansehen, die sog. chemischen Elemente wären aufzufassen als Zwischenstufen während der Umwandlung aus hochatomigen Substanzen in solche mit niedrigem Atomgewicht. — Die Beobachtungen über allgemeine Radioaktivität der Materie sind jedoch noch nicht soweit abgeschlossen, daß man auf diesem Gebiete einigermaßen sichere Schlüsse zu ziehen berechtigt wäre.

Würzburg. F. Harms.

L. Boltzmann. Populäre Schriften. VII u. 440 S. Leipzig 1905, J. A. Barth. geh. ℳ 8.—, geb. ℳ 9.—.

„Den Manen Schillers, des unübertroffenen Meisters der naturwahren Schilderung echter, aus tiefstem Herzen kommender Begeisterung, gewidmet hundert Jahre nach dessen Eingang in die Unsterblichkeit“. „die forangestellte widmung ist keine frase. ich danke den werken göthe's, dessen faust fileicht das grösste aller kunstwerke ist und dem ich di mottos meiner ersten bücher entnommen, shakespeares etc. die höchste geistige erhebung; aber bei schiller ist es etwas anders, durch schiller bin ich geworden, one

in könnte es einen mann mit gleicher bart- und nasenform wie ich, aber nimals mich geben.“

Die hier zusammengestellten populären Schriften Boltzmanns sind von sehr verschiedenem Inhalte. Es sind Nachrufe auf Kirchhoff, Stefan und Loschmidt; es sind Reden, Antrittsvorlesungen, Abschiedsworte: „Über die Bedeutung von Theorien“, „Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit“, „Über die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik“, „Über statistische Mechanik“, „Über Luftschiffahrt“; es sind Abhandlungen mehr philosophischen Inhalts wie: „Über die Frage nach der objektiven Existenz der Vorgänge in der unbelebten Natur“, „Über eine These Schopenhauers“. In mehreren Aufsätzen setzt sich Herr Boltzmann mit der Energetik Ostwalds auseinander in dem Sinne, daß er durchaus kein prinzipieller Gegner der Bestrebungen ist, eine Theorie aufzubauen, die den Energiebegriff an die Spitze stellt, sondern nur ein Gegner der Art und Weise, wie dies Ostwald versucht.

Zum Schluß ist noch ein sehr amüsant geschriebener Bericht „Reise eines deutschen Professors ins Eldorado“ angehängt, wo Herr Boltzmann über seine Reise nach Kalifornien plaudert, die er auf Einladung der Berkeley-Universität im Jahre 1904 unternommen hatte. Der Bericht entbehrt nicht eines pikanten Beigeschmacks wegen der Streiflichter, die auf die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften und die Berliner Akademie fallen.

Berlin. E. Jahnke.

E. Blau. Die Mechanik fester Körper. Lehrbuch in elementarer Darstellung für höhere technische Fachschulen und zum Selbstunterricht nebst einer Sammlung von 250 aufgelösten Beispielen. VII u. 260 S. Hannover 1905, M. Jänecke. ℳ 6.60.

Das Buch ist von einem Ingenieur für den Gebrauch an höheren technischen Fachschulen und für den Selbstunterricht geschrieben. Mit Rücksicht auf den Leserkreis, an welchen sich der Verfasser wendet, hat er geglaubt, den Algorithmus des Differenzierens und Integrierens nicht als bekannt voraussetzen zu dürfen und überhaupt das Differentiations- und Integrationszeichen vermeiden zu müssen. Nun ist aber die Infinitesimalmethode z. B. überall da notwendig, wo aus der endlichen Zustandsgleichung des starren Körpers die Momentanwerte der Geschwindigkeit und Beschleunigung abgeleitet werden sollen; sie ist notwendig für die analytische Bestimmung von Schwerpunkten und Trägheitsmomenten. Soll also die Sprache der Infinitesimalrechnung vermieden werden, so resultiert die Schwerfälligkeit, den jedesmal erforderlichen Prozeß, der natürlich auf den Differentialalgorithmus oder auf die Integrationsregeln hinausläuft, immer wieder selbständig durchzuführen.

Der Verfasser behandelt in drei Abschnitten die geometrische Bewegungslehre, die Statik und Dynamik des starren Körpers, wobei, wie es in der Vorrede heißt, auf eine elementare Darstellung, auf die Ermittlung der Trägheitsmomente und auf die Ableitung und Anwendung der Bewegungsgesetze rotierender Körper besonderer Wert gelegt wird. Da das Buch im großen ganzen demjenigen empfohlen werden kann, der, unter Verzicht auf tieferes Eindringen in die mechanischen Vorgänge, eine gewisse Fertigkeit im

Lösen praktischer Aufgaben erwerben will, so will ich noch auf einige Mängel hinweisen, die sich mir beim Durchblättern störend bemerkbar gemacht haben.

Vielfach erscheint mir die Ausdrucksweise einer größeren Präzision fähig. Um nur eines hervorzuheben: Die Kraft hat doch nicht bloß Größe und Richtung, sie hat noch Richtungssinn; das Gleiche gilt von Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Bei der rechnerischen Ermittlung der Resultanten zu mehreren Kräften wären ein paar Worte über den Nachweis, daß die Horizontal-(Vertikal-) Komponente der Resultante gleich der Summe der entsprechenden Komponenten der Einzelkräfte ist, am Platze.

Was über das Kräftepaar gesagt ist, ist doch gar zu dürftig und wohl kaum geeignet, eine richtige Vorstellung von der Bedeutung desselben beim Leser hervorzurufen.

Bei der Lösung der Aufgabe 74 stimmt die Bezeichnung $l^2 = h^2 + b^2$ wohl nicht mit den Angaben der Figur überein.

Der Hauptwert des Buches scheint mir, wie schon angedeutet, in der großen Zahl und in der Mannigfaltigkeit der Übungsbeispiele zu liegen, deren Lösungen explizite mitgeteilt sind.

Berlin. E. Jahnke.

R. Dedekind. Stetigkeit und irrationale Zahlen. 3., unveränderte Auflage. VII u. 24 S. Braunschweig 1905, F. Vieweg und Sohn. ℳ 1.—.

Es ist ein unveränderter Abdruck der grundlegenden Schrift, wo zum ersten Male eine wirkliche Definition von dem Wesen der Stetigkeit entwickelt worden ist. Die erste Auflage erschien im Jahre 1872.

Berlin. E. Jahnke.

G. O. James. Elements of the kinematics of a point and the rational mechanics of a particle. New York 1905, J. Wiley & Sons.

Das Buch will denjenigen, welche einen Kursus über elementare Mechanik hinter sich haben, die Elemente zur Einführung in die höhere Mechanik bieten. Aus diesem Grunde hat der Verfasser sein besonderes Augenmerk auf die Prinzipien und auf die Form der Darstellung gerichtet und hat die Anwendungen fast gänzlich beiseite gelassen.

Dabei ist es von prinzipieller Bedeutung und verdient hervorgehoben zu werden, daß der Verfasser einen, wenn auch, seinen Zwecken entsprechend, nur kurzen Abriß der Vektorentheorie vorausschickt, wie es in neuerer Zeit bei Lehrbüchern der Mechanik mehr und mehr üblich wird. Die vektorielle Darstellung bietet eben den Vorteil, das Wesentliche in den Grundbegriffen der Mechanik schärfer und prägnanter hervortreten zu lassen, als es ohne sie möglich ist.

Da das Werk nur die Elemente aus der Kinematik eines Punktes und aus der Mechanik eines Massenteilchens liefern will, beschränkt sich der Verfasser auf die Zusammensetzung, Zerlegung und Projektion der Vektoren und verzichtet auf die Einführung der beiden Produktbildungen an Vektoren, welche bei ihrer Umdeutung in die Sprache der Mechanik zu den Begriffen:

Moment und Arbeit führen würden. Den letzteren Begriff hätte man allerdings in einer Mechanik des Massenpunktes von dem Umfange des vorliegenden Werkes zu finden erwarten dürfen. Dagegen werden die erste und die zweite Ableitung eines Vektors definiert mit Rücksicht auf die Begriffe der Geschwindigkeit und der Beschleunigung.

Die Vektorbezeichnung des Verfassers ist übrigens nicht empfehlenswert; der Verfasser nimmt die gewöhnlichen Buchstaben und setzt einen Strich über dieselben.

Das Buch kann allen denen, welchen an einer prinzipiellen Durchdringung der elementaren Begriffe in der Mechanik gelegen ist, empfohlen werden.

Berlin. E. JAHNKE.

G. Holzmüller. Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. I. Teil, bis zum Abschluß der Untersekunda reichend und im Anschluß an die preußischen Lehrpläne von 1901 für die Oberreal- und Realschulen neu bearbeitet. 4. Doppel-Auflage. Mit 192 Figuren im Text. XII u. 319 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner. ℳ 2.80.

Das vorliegende Buch bietet eine große Fülle von anregenden und hübschen geometrischen Konstruktionen, die dadurch erhöhten Reiz erhalten, daß viele bei Aufgaben der Praxis vorkommen; es kann deshalb jedem Lehrer empfohlen werden, das Buch öfter zur Hand zu nehmen. Um es auch als Schulbuch brauchbar zu machen, bedürfte es in mancher Beziehung einer Umarbeitung. Besonders müßte die Anordnung des Stoffes übersichtlicher und der Hinweis auf frühere Sätze genauer werden. Beim Beginne der Kreislehre (S. 91—93) wird beispielsweise eine große Anzahl schon bekannter Begriffe, Sätze und Konstruktionen angegeben, die für den Schüler ziemlich wertlos sind, weil nicht bemerkt ist, wo die Begriffe erklärt, die Sätze bewiesen und die Konstruktionen gelehrt worden sind. Ein solcher Hinweis ist um so notwendiger, als die Anordnung des Stoffes durchaus nicht übersichtlich ist. Unter den oben erwähnten Kreissätzen befinden sich z. B. auch die Sätze über den Abstand gleicher Sehnen vom Mittelpunkte. Schlägt man nun die Abschnitte nach, in denen man nach dem Inhaltsverzeichnisse Kreissätze erwarten sollte, so findet man den Satz nicht; er steht vielmehr (S. 29) gleichzeitig mit Tangentensätzen in einer Bemerkung zu der Aufgabe, das Lot von einem Punkte auf eine Gerade zu fällen. Ein anderes Beispiel: Der Satz über die Mittellinie eines Trapezes, der bei der Teilung einer Strecke benutzt wird, steht erst bei der Inhaltsberechnung (S. 126) der Figuren, weil er hierbei — wie es im Texte heißt — als bekannt vorausgesetzt werden muß. Hier ist er gerade ziemlich überflüssig; denn die Formel $J = \frac{a+b}{2} \cdot h$ wird sofort durch eine Diagonale des Trapezes erhalten.

Auch die Fassung der Erklärungen und Sätze ist nicht immer einwandfrei, z. B. (S. 15): Gleiche Bogen eines Kreises sind solche, zu denen gleiche Sehnen gehören. Wenn auch vorher gesagt wurde, daß man „gewöhnlich“ nur von dem kleineren zu einer Sehne gehörigen Bogen spricht, so ist doch obige Erklärung ganz unzulässig schon aus dem Grunde, weil dies „gewöhnlich“ — man denke an die Sätze vom Peripheriewinkel —

sehr häufig nicht zutrifft. Ferner findet sich (S. 33) der Satz: Die Gegenseiten eines Parallelogramms sind gleich und parallel; hierbei wird also Erklärung und Lehrsatz vermengt.

Falsch ist die Angabe, daß bei der Berechnung eines Dreiecks aus a, b und γ (S. 268) als Probe für die Richtigkeit der Rechnung mit der Tangentenformel die Winkelsumme des Dreiecks zu benutzen ist. Daß sämtliche Hauptsätze über die gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden im Raume dem Vorkursus in der Quinta zugewiesen werden, dürfte nicht allgemeinen Beifall finden.

Berlin. P. Schafheitlin.

E. Jahnke. Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Textfiguren. XII u. 235 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. ℳ 5.60.

Je umfassender und zahlreicher die mathematischen Wissenschaften in den verschiedenen Anwendungsformen benutzt werden, desto dringlicher fordert die Ökonomie auf, dem gemeinsamen Mittel, der Vektorenrechnung, volle Aufmerksamkeit zu schenken. Dieses Mittel lehrt den gewaltigen Stoff dieser verschiedenartigen Gebiete mit gemindertem Aufwand von geistiger Arbeit bewältigen. Jede Wissenschaft will ja ein ökonomisches Werkzeug zum Ersatz eigener Erfahrung und zur Erschließung fremder sein. In diesem Sinne ist die Vektorenrechnung ein mächtiges Universal-Instrument, welches allüberall gute Dienste leistet. Hamilton hat sie für die Physik, Graßmann namentlich für die Geometrie zugepaßt. Sie besitzt gleiche Wichtigkeit für den Mathematiker, den Physiker und Techniker. Für diese Kreise sind vorliegende Vorlesungen an der technischen Hochschule zu Charlottenburg als eine leichte Einführung bestimmt. Der Verfasser hat demgemäß Wert auf den Zusammenhang der Definitionen und Begriffe gelegt. In zahlreichen gut gewählten Beispielen aus der Mechanik, Physik, Graphostatik, Kinematik, Elastizität, Optik und insbesonders der Elektrizität wird der Übergang von der Theorie zur lebendigeren Praxis klargestellt. In allen Teilen ist das Buch bei guter Kürze deutlich; es entwickelt aus dem Einfachen zum Zusammengesetzten und kann demgemäß als wirkliche Einführung vollauf gelten.

In die Starkstrom-Elektrotechnik hat schon vor Jahren Steinmetz die komplexe Zahl als Rechnungsbehelf zum nicht geringen Erstaunen der Praktiker eingeführt, welche aus der Schulzeit auf diese „unmögliche" Zahlform nicht besonders vorbereitet waren. Als man vom Gleichstrom zum Wechsel- und Drehstrom schritt, drängte das Verständnis zur Erweiterung der mathematischen Hilfsmittel — von der Zahlenlinie zur Ebene. Mehr als die trigonometrische Behandlungsart leistet für die Erkenntnis die Vektorenrechnung (hier nur die ebene). Das Ohmsche Gesetz für Wechselstrom, die Wheatstonesche Brücke nach Görges und ein Satz von Blondel über Mehrphasenstrom illustrieren in dem Buche dieses Gebiet.[1]) Die rasche

1) Es mag bemerkt werden, daß Herzog-Feldmann in ihrem Werke „Die elektrischen Leitungsnetze" jenen Bestrebungen durch Einführung des „Richtungswiderstandes" in jüngster Zeit Rechnung trugen.

Entwicklung der modernen Elektrodynamik, sowie der Elektronentheorie weist immer mehr auf die Aneignung der Vektoren-Analysis als unentbehrliches Hilfsmittel hin.

Budapest. JOSEF HERZOG.

Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Herausgegeben von dem Schriftführer des Kongresses Dr. A. Krazer. Mit einer Ansicht von Heidelberg in Heliogravüre. X u. 756 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. ℳ 18.—.

Der stattliche, vornehm ausgestattete Band enthält eine Chronik des Kongresses (mit einem Verzeichnis der Teilnehmer), sodann sämtliche Vorträge mit Ausnahme von zweien (Guichard, sur les systèmes triples orthogonaux; Volterra, sur la théorie des ondes) und einen Bericht über die Literatur- und Modellausstellung. Außer zahlreichen, in den Text gedruckten Figuren finden sich drei Tafeln; zwei mathematischen Inhalts, zu Vorträgen von Minkowski und Prandtl gehörig, die dritte, dem ganzen vorangesetzt, eine wohlgelungene Heliogravüre: Ansicht Heidelbergs von der großen Schloßterrasse aus. — Auf eine eingehende Darstellung des Inhalts muß hier begreiflicherweise verzichtet werden, da ein Referent allein der Vielseitigkeit des Dargebotenen nicht gewachsen sein kann. Gerade diese Vielseitigkeit des Inhaltes aber bürgt dafür, daß der Band nicht nur den Teilnehmern liebe Erinnerungen wach zu halten, sondern auch allen Fachgenossen mannigfache Anregung zu geben geeignet ist.

Grunewald. G. HESSENBERG.

H. Weber u. J. Wellstein. Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. I. Band. Elementare Algebra und Analysis. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. XVIII u. 539 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 9.60.

Für den Wert dieses Werkes spricht schon der Umstand, daß der erste Band nach einem Zeitraum von 2 Jahren eine neue Auflage erlebt, kurz nachdem der zweite Band erschienen war, während der dritte erst im Herbste 1906 zu erwarten ist. Über die erste Auflage ist schon im 9. Bande dieser Zeitschrift, S. 369 referiert worden. Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten vor allem durch eine eingehendere Behandlung der historischen Entwickelung der Wissenschaft, und zwar ist der Verfasser den ihm in bezug hierauf geäußerten Wünschen dadurch nachgekommen, daß er nicht literarische Angaben, wie sie in den für ihre Zeit vorzüglichen „Elementen der Mathematik" von Baltzer enthalten sind, sondern kurzgefaßte Überblicke über die Entwickelung einzelner Teile der Elementarmathematik gegeben hat. Diese sind in besonderen Paragraphen untergebracht und beziehen sich auf Zahlen und Ziffern, auf die Anfänge der Zahlentheorie, quadratische Reste, Logarithmen und auf die Entwickelung der Lehre von der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Radikale. Sicherlich werden diese zusammenfassenden Darstellungen auch weit mehr im allgemeinen Interesse der Leser liegen, als vereinzelt auftretende literarische Quellennachweise. Wer aber über letztere sich genauer zu orientieren wünscht, muß auf die große Encyklopädie verwiesen werden, wo jetzt alle wünschens-

werten Einzelheiten zu finden sind, die zu der Zeit, als die Baltzerschen Elemente erschienen, schwer zugänglich waren. Die Zeit der Auffindung des ersten strengen Beweises des quadratischen Reziprozitätsgesetzes durch Gauß ist infolge eines Druckfehlers auf S. 281 falsch datiert: 1786 statt 1796. Hinzugekommen ist schließlich noch in dieser neuen Auflage ein besonderer Abschnitt über Funktionen, Differentiale und Integrale, der manchem Leser dieses Buches sehr erwünscht sein wird, namentlich da die Darstellung hier eine so elementare ist, daß man sie ohne Bedenken dem Unterrichte in den oberen Klassen der höheren Lehranstalten zugrunde legen könnte. Der teilweise Widerstand gegen die Einführung der Elemente der Infinitesimalrechnung auf unseren Realgymnasien und Oberrealschulen rührt wohl im wesentlichen daher, daß man sich deren Durchnahme häufig in der Weise vorstellt, wie sie die meisten systematischen Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung oder eine einleitende Vorlesung darbieten. So wird denn dieser letzte Abschnitt in seiner gedrängten und kurzen Darstellung hoffentlich mit dazu beitragen, diese Bedenken zu zerstreuen.

Charlottenburg. O. Pund.

G. Hessenberg. Ebene und sphärische Trigonometrie. 2., verbesserte Auflage. Mit 70 Figuren. 167 S. Leipzig 1904, G. J. Göschen. ℳ —.80.

Die vorliegende Auflage ist fast durchweg mit neuen Figuren versehen; obwohl auf den Zweifarbendruck verzichtet wurde, haben die Figuren, die manchem Lehrbuch zum Muster dienen könnten, an Anschaulichkeit gewonnen. Von den räumlichen Figuren sind diejenigen, welche einen vollständigen Kugelumriß enthalten, senkrechte, die übrigen schiefe Parallelprojektionen. — Im übrigen ist diese Auflage gegen die vorige wenig verändert. Das Büchlein enthält die Grundzüge der ebenen und sphärischen Trigonometrie in einer trotz des knappen Raumes auch für den Anfänger verständlichen Darstellung; das Verständnis wird dadurch erhöht, daß für die wichtigeren Sätze mehrere Beweise gegeben und für die Hauptaufgaben Zahlenbeispiele vollständig durchgeführt sind. — Auf einige weitere Vorzüge des vortrefflichen Büchleins sei besonders aufmerksam gemacht: Die Behandlung des ebenen Vierecks ist recht übersichtlich. Die Betrachtungen, welche sich bei dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke an die Nepersche Regel anschließen (§ 40), gewähren einen kleinen Einblick in den Begriff der „Gruppe“: es liegt hier ein Zyklus vom Grade 5 vor (vgl. u. a. Pund: Mitt. d. math. Ges. in Hamburg, **3**, No. 4, 1897). Den L'Huilierschen Formeln wird durch die Einführung des sphärischen Exzesses und Defektes des Dreiecks und der drei Nebendreiecke eine symmetrische Form gegeben, die mit der Studyschen im wesentlichen übereinstimmt. Die Methode der Hilfswinkel ist klar dargestellt. Besonders hervorgehoben sei die kurze Einführung in die Vektorenrechnung und die einfache und durchsichtige Ableitung des Moivreschen Satzes aus ihr. Gut ist auch der Hinweis auf die Fehlergrenzen bei den verschiedenen Rechnungsverfahren, sowie auf den Zusammenhang zwischen der ebenen und sphärischen Trigonometrie. — Folgende Bemerkungen mögen den Verfasser vielleicht zu Änderungen anregen: Für die Formeln I—VII (S. 10) müßte die Ableitung, wenn auch in einem anderen Bändchen der Sammlung, leicht aufzufinden sein. Der am Schluß des § 40 angeführte Satz ist in dieser Form nicht richtig. Ob

es sich empfiehlt, die Additionstheoreme auswendig lernen zu lassen, ehe man an ihren Beweis herangeht, ist wohl fraglich. — Schließlich seien noch einige Druckfehler erwähnt: S. 62, Gleichung XVI_1, fehlt ein Minuszeichen; es muß ferner heißen: S. 76 und 77 an einigen Stellen $t-1$ statt $1-t$; S. 126, Formel XV, $\operatorname{tg}\frac{s_c}{2}$ und $\cot(45^0+\frac{\sigma}{2})$; S. 155, Formel XII und XIII, in den Ausdrücken für x_3, $60^0+\frac{1}{3}\varphi$ und $60^0+\frac{1}{3}\varphi'$. — Das Büchlein kann nur warm empfohlen werden.

Berlin. R. Güntsche.

R. Lindt. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems“. XVIII. Heft der Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. II u. 196 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner. ℳ 6.—.

Ein wesentlicher Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich damit, über die von älteren wie neueren Autoren aufgestellte Form des Satzes vom Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten sowie über die von dem Satze gegebenen Begründungen kurzen Bericht zu erstatten, der meist mit einer Kritik verbunden ist.

Wir beschränken uns in betreff der älteren Autoren darauf, das Referat des Herrn Lindt über Lagranges Beweis, wie dieser in der von Crelle übersetzten Funktionentheorie enthalten ist, zu zergliedern, und wir wollen im Anschlusse hieran zur Beurteilung sowohl des Lindtschen Referates wie auch der Lagrangeschen Begriffsbestimmungen eine logische Analyse der letzteren selbst versuchen.

Das Referat des Herrn Lindt beginnt (S. 163 Zeile 13) mit folgenden Sätzen: „Steht eine Kraft P immer auf einer Fläche $F(x, y, z) \equiv w = 0$ senkrecht, so sind ihre Komponenten gleich $P\frac{\partial w}{\partial x}$, $P\frac{\partial w}{\partial y}$, $P\frac{\partial w}{\partial z}$. Es verhalten sich also auch die drei Komponenten der Kraft, die die Fläche auf einen sich in ihr bewegenden Körper ausübt, wie $\frac{\partial w}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial y} : \frac{\partial w}{\partial z}$; denn „es ist klar, daß die Richtung der Wirkung der Fläche auf den Körper, oder vielmehr des Widerstandes, den sie ihm entgegensetzt, nur auf der Fläche senkrecht stehen kann“. Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man ganz von der Fläche absieht und ihre Gleichung ($w = 0$) bloß als eine durch die Aufgabe gegebene Bedingungsgleichung betrachtet.“ In dem ersten Satze sollte es heißen: „so verhalten sich ihre Komponenten wie $P\frac{\partial w}{\partial x}$, $P\frac{\partial w}{\partial y}$, $P\frac{\partial w}{\partial z}$“; denn die partiellen Ableitungen hängen von der zufälligen Form der Gleichung ab, ob dieselbe z. B. rational gemacht ist oder nicht. Um ganz präzis zu sein, wollen wir aus dem Referate die Folgerungen ziehen, die sich nur unter der Voraussetzung ergeben, daß nur ein oder zwei Körper (oder Punkte) und nur eine Bedingungsgleichung für die Koordinaten derselben gegeben sind. Wir formulieren dann die Folgerung aus dem angeführten Zitate folgendermaßen. Ist die Beweglichkeit eines Körpers durch die Bedingungsgleichung $w(x, y, z) = 0$ beschränkt, so wird derselbe in Ruhe bleiben, wenn eine Kraft auf denselben wirkt, deren

Richtung durch das Verhältnis $\frac{\partial w}{\partial x} : \frac{\partial w}{\partial y} : \frac{\partial w}{\partial z}$ gegeben, deren Intensität aber jede beliebige Größe haben darf. Die Stelle ferner, welche von Z. 19 S. 163 bis Z. 11 S. 164 unmittelbar auf die oben zitierten Sätze folgt, kann man ihrem Inhalte nach mit den Worten zusammenfassen, mit denen dieselbe schließt: „daß man jede durch eine Gleichung $F = 0$ repräsentierte Bedingung für unendlich kleine Verschiebungen stets durch ein dem oben beschriebenen entsprechendes Lagrangesches Flaschenzugsystem ersetzen kann".

Herr Lindt geht hier zu Bedingungsgleichungen über, welche die Koordinaten von mehr als einem Punkte enthalten. Setzen wir voraus, daß eine Bedingungsgleichung für zwei Punkte $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$ gegeben ist, so wollen wir aus dem obigen Zitate S. 163 Z. 13 bis Z. 19 folgende Folgerung zulassen. Die Kräfte, die wir an den Punkten x, y, z und ξ, η, ζ anzubringen haben, wenn die Punkte in Ruhe verharren sollen, müssen die durch die Proportionen $\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$ und $\frac{\partial F}{\partial \xi} : \frac{\partial F}{\partial \eta} : \frac{\partial F}{\partial \zeta}$ bestimmten Richtungen haben. Wie aber steht es nun mit den Intensitäten dieser Kräfte? Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten bestimmt genau das Verhältnis der Intensitäten. Nun wird in der zuletzt angeführten Stelle der Satz aufgestellt, daß jeder Bedingungsgleichung ein Flaschenzugsystem entspricht, bei welchem die Beweglichkeit der Punkte im Infinitesimalen dieselbe, wie die durch die Bedingungsgleichung zugelassene ist. Wozu dient nun dieser Satz? Dies wird aus dem Referate nicht klar; denn es wird nach Aufstellung des Satzes sofort dazu übergegangen, das Prinzip in seiner ganzen Allgemeinheit, d. h. für beliebig viele Punkte und Bedingungsgleichungen auszusprechen. Und doch ist die Anwendung des erwähnten Satzes zum Beweise des Prinzipes mit wenigen Federstrichen gemacht. Ist die Bedingungsgleichung $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$ gegeben, so sagt der nämliche von Herrn Lindt angeführte Satz aus, daß man in der Gleichung $f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = m\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} + n\sqrt{(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2} - g = 0$ die Konstanten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, m, n, g$ immer so bestimmen kann, daß für bestimmte Werte $x_0 y_0 z_0 \xi_0 \eta_0 \zeta_0$ der Variabeln die Funktionen F und f, sowie deren erste partielle Ableitungen übereinstimmen. Der Gleichung $f = 0$ entspricht nun ein bestimmtes Flaschenzugsystem, bei welchem sich die an den Punkten xyz und $\xi\eta\zeta$ angreifenden Kräfte, P und Π, ihrer Intensität nach wie $m : n$ verhalten. Wenn nun $f = 0$ die Bedingungsgleichung ist, und gefragt wird, welche Kräfte auf die beiden Punkte wirken dürfen, wenn die Punkte in Ruhe bleiben sollen, so haben wir bereits oben die Richtungen derselben festgestellt. Bezeichnen wir mit X, Y, Z und Ξ, H, Z die Komponenten dieser Kräfte, so hat man $X = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x}$, $Y = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y}$, $Z = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z}$ und $\Xi = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \xi}$, $H = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \eta}$, $Z = \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \zeta}$. Nimmt man nun an, daß die Intensitäten sich wie $m : n$ verhalten müssen, nämlich genau wie bei dem Flaschenzugsysteme, welches der Gleichung $f = 0$ entspricht, so hat man sofort $\lambda_1 = \lambda_2$; denn es wird

$$\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{\Xi^2 + H^2 + Z^2}} = \frac{\lambda_1 \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\lambda_2 \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^2}} = \frac{\lambda_1 m}{\lambda_2 n} = \frac{m}{n}.$$

Geht man von der Bedingungsgleichung $f = 0$ zu der allgemeineren $F = 0$ über, so schließt Lagrange, daß die Kräfte, welche diese Bedingung aufrecht erhalten, genau so wie bei $f = 0$ anzusetzen seien, weil die Beweglichkeit der Punkte im Infinitesimalen in erster Annäherung bei $F = 0$ dieselbe wie bei $f = 0$ ist.

Rezensent ist also der Meinung, daß ein ähnliches Raisonnement, wie dasjenige, was die Gleichung $\lambda_1 = \lambda_2$ ergab, in einem Berichte, der die hauptsächlichsten Punkte des Lagrangeschen Beweises zu geben ankündigte, hätte erwartet werden können.

Es sei mir gestattet, über die Lagrangeschen Begriffsbestimmungen und Annahmen noch einige Bemerkungen zu machen. Die erste Hypothese, die Lagrange macht, nämlich stillschweigend, wollen wir so formulieren: Wenn bei einem beliebigen Mechanismus die Beweglichkeit der Punkte im Infinitesimalen in erster Annäherung sich so verhält wie bei einem bestimmten Flaschenzugapparat, so besitzen die Kräfte, welche in dem Mechanismus die Beweglichkeit aufrecht erhalten, dieselbe Richtung und dieselbe Intensität wie bei dem entsprechenden Flaschenzugsysteme.

Ist die Beweglichkeit der Punkte auf Oberflächen eingeschränkt, so kann man zwar sagen, daß, welches auch immer der Mechanismus sei, der die Beweglichkeit so normiert, die Richtungen der Kräfte, welche die in Ruhe befindlichen Punkte nicht in Bewegung bringen, auf der Oberfläche senkrecht stehen müssen; zur Bestimmung der Intensitäten aber beruft sich Lagrange auf den Apparat.

Die andere Hypothese, die Lagrange macht und am Schlusse seines Beweises angibt, können wir mit etwas anderen Worten vielleicht so formulieren. Der Faden des Flaschenzugapparates muß in allen seinen Teilen gleichmäßig gespannt sein, wenn die Kräfte, die an den Punkten desselben wirken, entweder die Punkte in Ruhe lassen, oder die durch die Gleichung $f = 0$ normierte Beweglichkeit gerade aufrecht erhalten.

Unter den neueren Autoren ist es besonders Helmholtz, dessen Untersuchungen über das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten Herr Lindt seine Aufmerksamkeit zuwendet. Diese Untersuchung findet sich in den Helmholtzschen Vorlesungen über Physik und ist von Herrn Lindt in gewandter Weise kurz wiedergegeben worden. Nur über den wesentlichsten Zweck der interessanten Helmholtzschen Betrachtungen hat Rezensent eine andere Auffassung. Es handelt sich um folgendes. Ist die Beweglichkeit eines Systems von Punkten durch Bedingungsgleichungen zwischen den Koordinaten der Punkte definiert, so wird in jedem wirklichen, d. h. in der Natur vorkommenden Falle, dann, wenn wir an den Punkten des Systems Kräfte angreifen lassen, die Lage der Punkte so geändert werden, daß die Koordinaten der Punkte den Bedingungsgleichungen nicht mehr genügen. Es hat dies bei einer großen Gruppe von Mechanismen darin seinen Grund, daß es keine absolut starren Verbindungen gibt. Wir wollen daher den hier definierten Fall kurz als den Fall absolut starrer Verbindungen bezeichnen.

Das Lagrangesche Prinzip setzt nun absolut starre Verbindungen voraus, oder, was auf dasselbe hinauskommt, es setzt voraus, daß die Bedingungsgleichungen stets streng erfüllt sind. Unter dieser Voraussetzung

ist das Prinzip tatsächlich streng beweisbar. Es ist dann nämlich, wie F. Lindemann gezeigt hat, wenn man den Newtonschen Kraftbegriff und das Prinzip von der Zusammensetzung der Kräfte zuläßt, nichts weiter als eine Definition, beruhend auf der vollständigen Analyse unserer Vorstellung von starren Verbindungen durch den Kraftbegriff.

Auch Helmholtz beweist das Prinzip unter der Voraussetzung absolut starrer Verbindungen. Das Interessante der Arbeit des großen Physikers ist aber besonders dies, daß er die Zulässigkeit dieser Voraussetzung als eines besonderen Beweises bedürftig erkennt und diese Zulässigkeit auf eine sehr sinnreiche Methode konstatiert. Es handelt sich nach Helmholtz um einen theoretischen Nachweis, daß das Lagrangesche Prinzip annähernd richtige Resultate ergibt. An die Notwendigkeit eines solchen Nachweises hatte man früher gar nicht gedacht. Ja, selbst unter der Voraussetzung absolut starrer Verbindungen waren die Beweise logisch anfechtbar, bis Helmholtz den Beweis führte und Lindemann erkannte, daß es sich um eine bloße Definition handelt.

Wenn also Helmholtz eine Gleichgewichtsbedingung aufstellt, welche sowohl absolut starre wie auch annähernd starre Verbindungen umfaßt, so sieht Rezensent hierin hauptsächlich einen theoretischen Ansatz, aus welchem durch einen Grenzprozeß die Lagrangesche Form hervorgeht, der aber für die Anwendung nicht geschaffen ist. Rezensent möchte daher auch nicht soweit gehen, wie Herr Lindt es tut, und die Helmholtzsche Gleichgewichtsbedingung ebenso hoch über das Lagrangesche Prinzip stellen, als man die Newtonschen Gesetze der Planetenbewegung über die Keplerschen stellen kann. Wir sehen vielmehr die Hauptbedeutung der Helmholtzschen Arbeit in der angegebenen doppelten Stützung des Lagrangeschen Prinzips.

Wir kommen nun auf eine Betrachtung, die dem Verfasser der hier zu besprechenden Arbeit ganz eigen ist, die sich auf die Form des Prinzipes bezieht und vom didaktischen Standpunkte für die Darstellung der Mechanik gewiß nützlich ist.

Versteht man unter Gleichgewicht eines Systemes von Punkten den Zustand der Ruhe oder der bei allen Punkten gleichförmigen Geschwindigkeit, so ist der Satz von dem Prinzipe, in der Form, wie Lagrange ihn ausspricht, nicht umkehrbar.

Wir wollen die Lindtschen Betrachtungen möglichst in analytischer Form entwickeln und untersuchen. Wir setzen den Fall absolut starrer Verbindungen voraus und verstehen demgemäß unter virtuellen Verschiebungen solche, welche den Bedingungsgleichungen gemäß sind. Unter Voraussetzung der Definition des Gleichgewichtes eines Massensystems, daß alle Punkte in Ruhe oder im Zustande gleichförmiger Geschwindigkeit sich befinden, kann man aussagen, daß die Summe der virtuellen Arbeiten der an den einzelnen Punkten wirkenden Kräfte gleich Null sein muß. Diese Aussage ist aber identisch mit folgendem Gleichungssysteme

$$(1)\quad 0 = X_i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=m} \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial x_i}, \qquad 0 = Y_i + \sum_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_i}, \qquad 0 = Z_i + \sum_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial z_i}.$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Diese $3n$ Gleichungen (1) sind aber keineswegs gleichwertig den $3n$ folgenden:

$$(2)\qquad m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=0,\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=0,\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=0.$$

Es sind vielmehr die Gleichungen (1) nur eine Definition für die äußeren gegebenen Kräfte; diese sollen gleich und entgegengesetzt den Bedingungskräften sein. Der Bewegungszustand des Systems wird also ein solcher sein, daß die Bewegungsrichtung jeweils auf der Richtung der Kräfte X_i, Y_i, Z_i oder, was dasselbe ist, der Kräfte $\sum_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial x_i}$, $\sum_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_i}$, $\sum_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial z_i}$ senkrecht steht. Demnach ist die Bewegung gegeben durch die Gleichungen:

$$(3)\qquad m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=\sum \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial x_i},\quad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}=\sum \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_i},\quad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}=\sum_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial z_i}.$$

Indem man diese Gleichungen (3) in bekannter Weise kombiniert, erhält man:

$$(4)\qquad \tfrac{1}{2}\sum m_i v_i^2-\tfrac{1}{2}\sum m_i v_{i0}^2$$
$$=\int_{t_0}^{t}\Big(\sum_i\sum_\varrho \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial x_i}x_i'+\sum\sum \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial y_i}y_i'+\sum\sum \lambda_\varrho \frac{\partial f_\varrho}{\partial z_i}z_i'\Big)dt=0,$$

vermöge der m Bedingungsgleichungen, wo die Geschwindigkeiten v_i und v_{i0} den Zeiten t und t_0 entsprechen. Man sieht, daß im allgemeinen $v_i \neq v_{i0}$ sein wird, wenn die rechte Seite der Gleichung (4) verschwindet. Man kann also nicht sagen, daß Ruhe oder überall gleichförmige Bewegung herrscht, wenn die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte verschwindet, oder wenn, was dasselbe ist, die Gleichungen (1) existieren.

Die Sonderstellung, welche der starre Körper bei den Lindtschen Betrachtungen einzunehmen scheint, dürfte durch folgende analytische Entwicklungen schwinden. Das Lagrangesche Prinzip für den starren Körper lautet:

$$(5)\qquad \begin{cases}\int X\,dm=0,\quad \int Y\,dm=0,\quad \int Z\,dm=0,\\ \int (Xy-Yx)\,dm=0,\quad \int (Xz-Zx)\,dm=0,\quad \int (Yz-Zy)\,dm=0,\end{cases}$$

wo der starre Körper als völlig frei vorausgesetzt ist, und die Integralzeichen bestimmte über den ganzen Körper ausgedehnte Integrale bezeichnen. Nun betrachten wir einen Fall eines Punktsystemes, das Lagrange in seiner Mechanik selbst behandelt. Seien drei Punkte gegeben, die konstante Entfernungen f_{12}, f_{13}, f_{23} von einander besitzen, so hat man, wenn auf die Punkte $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$ Kräfte bezw. mit den Komponenten $X_1\,Y_1\,Z_1$, $X_2\,Y_2\,Z_2$, $X_3\,Y_3\,Z_3$ wirken, nach dem Prinzip die Definitionsgleichungen:

$$
(6) \qquad \begin{cases}
0 = X_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial f_{12}}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_{13}}{\partial x_1} \\[2ex]
0 = Y_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial f_{12}}{\partial y_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_{13}}{\partial y_1} \\[2ex]
0 = Z_1 + \lambda_1 \dfrac{\partial f_{12}}{\partial z_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_{13}}{\partial z_1} \\[2ex]
0 = X_2 + \lambda_1 \dfrac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial f_{23}}{\partial x_2} \text{ etc.,}
\end{cases}
$$

wozu in leicht verständlicher Fortsetzung noch fünf Gleichungen hinzutreten. Nach Elimination der Unbestimmten λ erhält man das Gleichungssystem:

$$
(7) \qquad \begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{i=3} X_i = 0, \quad \sum\limits_i Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0, \\
\sum (X_i y_i - Y_i x_i) = 0, \quad \sum (X_i z_i - Z_i x_i) = 0, \quad \sum (Z_i y_i - Y_i z_i) = 0.
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen entsprechen vollkommen den obigen Gleichungen (5), und die Gleichungen (7) sind ein äquivalenter Ausdruck des Prinzipes mit den Gleichungen (6), nur daß in letzteren die Bedingungskräfte auftreten. Da aber, wie vorhin ausgeführt, die Gleichungen (6) nicht äquivalent sind mit den Gleichungen $m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0$, $m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = 0$, $m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, so sind die letzteren ebensowenig gleichwertig der aus (6) entstandenen Kombination (7). Folglich werden auch die obigen Gleichungen (5) die Bewegung, wie bekannt, als eine im allgemeinen beschleunigte bestimmen.

Rezensent faßt nun nach diesen Stichproben sein Urteil über die ganze Arbeit dahin zusammen, daß die Darstellung und Sprache der Arbeit eine gewandte, und daß die Betrachtungen, wenn auch elementar und daher nicht immer ausreichend, doch vom didaktischen Standpunkte aus von Interesse und Nutzen sind.

München, November 1905. CARL SIGISMUND HILBERT.

A. G. Webster. The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, being lectures on mathematical physics. (A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Band XI.) XII u. 588 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner. ℳ 14.—.

Der Verfasser wendet sich mit seinem neuen Lehrbuch der Dynamik ausdrücklich an Studierende der Physik und hat dementsprechend auch Inhalt und Umfang desselben gewählt und abgegrenzt. In diesem Sinne konnte er sich mit einigen wenigen Sätzen der Statik begnügen, welche an geeigneter Stelle angefügt sind, und in betreff der Kinematik war es naheliegend, die notwendigen Entwickelungen unmittelbar in Verbindung mit den betrachteten materiellen Systemen zu bringen.

Die Auswahl und Darstellung des Stoffes macht einen außerordentlich erfreulichen Eindruck. Wenn auch nach des Verfassers Versicherung nirgends theoretische Betrachtungen und Probleme aufgenommen sind, deren Durchführung vorwiegend auf die rein mathematische Ausbildung des

Studierenden hinzielt, so sind doch andererseits auch nicht diejenigen Partien der Mechanik, welche ihrer Natur nach weitergehende mathematische Hilfsmittel verlangen, unzureichend behandelt oder gar ausgeschaltet. Hierhin gehören die zyklischen Bewegungen, das Rollen bei nicht holonomen Bedingungen, das St. Venantsche Problem und einige Fragen der Potentialtheorie. In diese Gebiete wird der Anfänger auf eine so gründliche und methodisch durchsichtige Weise eingeführt, daß man wohl vergeblich nach einem modernen Lehrbuch der Mechanik von gleichem Umfange und Niveau suchen wird, welches die Schwierigkeiten des Gegenstandes so geschickt überwindet.

Überhaupt liegen die Bedenken, welche den Anfänger nur zu oft abhalten, die wichtigsten und interessantesten Probleme der modernen Mechanik ernsthaft durchzuarbeiten und sich ihren wesentlichen Inhalt als ein wertvolles Eigentum zu erwerben, gar nicht so sehr in unzureichenden mathematischen Vorkenntnissen begründet, als vielmehr in einer noch mangelhaft entwickelten Fähigkeit, auf einmal eine große Anzahl neuer mechanischer Begriffe fest und sicher aufzunehmen, wie es ihre praktische Verwertung verlangt. Gerade diese Schwierigkeit wird im vorliegenden Lehrbuche durch sorgfältig durchgearbeitete Beispiele wesentlich gemindert, die in einer sehr konzisen Form die wichtigsten Methoden der Dynamik gründlich einzuprägen vermögen.

Lange Jahre hindurch war der englischen Schule die scharfe Trennung der Mechanik des starren Systems von der Mechanik der stetig veränderlichen Systeme eine stereotype Gewohnheit geworden, und der Studierende hatte zwei scheinbar auseinander liegende Gebiete nacheinander zu bewältigen, oder hielt es auch oft für zulässig, sich auf den ersten Teil zu beschränken. Wir sehen in dem Bestreben des Verfassers, einer möglichst allgemeinen Systemauffassung gerecht zu werden, und die bei Studierenden so häufig vorkommende irrige Meinung zu beseitigen, die Mechanik der deformierbaren Systeme enthalte ganz besondere Schwierigkeiten für den Anfänger, eine wirksame Bekämpfung schädigender Vorurteile und empfehlen gerade aus diesem Gesichtspunkt das Studium des Werkes auch dem Mathematiker, welcher einseitigen Auffassungen in dieser Richtung weit leichter unterliegt als der Physiker oder Techniker, dem sich die veränderlichen Systeme in den Anwendungen der Mechanik schon beim ersten Studium spontan aufdrängen.

Karlsruhe i. B. HEUN.

M. Doll † und P. Nestle. Lehrbuch der praktischen Geometrie, bearbeitet für den Unterricht an den Hoch- und Tiefbauabteilungen der Baugewerkschulen und technischen Mittelschulen, sowie für den Gebrauch in der Praxis. 2., erweiterte und umgearbeitete Auflage. Mit 145 Figuren im Text. VII u. 164 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. ℳ 3.80.

In der vorliegenden zweiten Auflage ist der elementare Teil eines großen Gebietes in praktischer Zusammenfassung behandelt. Mit Geschick und weiser Beschränkung sind diejenigen Abschnitte der allgemeinen Vermessungskunde, welche als Lehrstoff an den Baugewerkschulen und technischen Mittelschulen dienen sollen, neubearbeitet worden, sodaß sie für die Ausbildung in der praktischen Geometrie von Technikern des mittleren Bahn- und tiefbautechnischen Dienstes für Staat, Gemeinde und private Unternehmungen vorzüglich geeignet erscheinen. Zu dem bisherigen Inhalte der

ersten Auflage sind für die die Baugewerkschule verlassenden Tiefbautechniker, welche sich dem staatlichen oder privaten Eisenbahnbau widmen wollen, weitere Teile neu hinzugekommen, welche die verschiedenen Verfahren zur Absteckung von Kreisbogen, einschließlich der Übergangsbogen, die Stationierung und Ausrundung der Neigungswinkel der Eisenbahnen und Straßen, und schließlich die Lattenprofile und Schnurgerüste ausführlich behandeln.

Dem Wunsche des Verfassers entsprechend, erwähnen wir im folgenden diejenigen Punkte, welche bei einer etwaigen Neuauflage zu berücksichtigen wären: Bei der Kreuzscheibe, dem Winkelspiegel und dem Rechtwinkelprisma ist die Angabe und Begründung der Genauigkeit von 2 bis 4 Minuten in den abgegebenen Winkeln erwünscht. — Wenn, S. 17, der Winkel a größer wird als 45^0, dann schneiden sich die beiden Strahlen in der Verlängerung von sP, welcher Vorgang bei dem Winkelspiegel der älteren Konstruktion ausgenützt wurde. — Die S. 52 im Text und in der Figur erwähnte Glasart der Fernrohrlinsen heißt Kronglas (engl. crown), nicht Kromglas, ferner müßte in Fig. 70, auch wenn diese nur schematisch aufzufassen ist, die Flintglaslinse nicht bikonkav, sondern plankonkav erscheinen, damit die brechende Wirkung der Bikonvexlinse nur zum Teil aufgehoben wird. — Der S. 55 erwähnte Name Limbus bezieht sich nur auf den die Gradteilung tragenden Rand des Haupt- oder Horizontalkreises, demnach ist bei dem einfachen Theodolit nicht der Limbus, sondern der Hauptkreis mit dem Fußgestell fest verbunden. Ferner hat ein jeder Theodolit, auch der einfache, die Einrichtung zum Repetieren der Winkel, aber die Möglichkeit zum Multiplizieren der Winkel wird erst durch die Drehbarkeit des Hauptkreises herbeigeführt, hierin liegt der Unterschied gegen den einfachen Theodolit. — S. 56. Als Mikrometerschrauben sollten nur noch diejenigen Schrauben bezeichnet werden, welche dem Namen entsprechend Kleinmessungen am Rande einer Trommel vornehmen lassen, während die Schrauben Lm und Am besser Feinstellschrauben genannt werden. — Die S. 59 und 71 angewendete praktische Regel über Erzeugung und Ausscheidung des doppelten Fehlers ist so wichtig, daß eine Bezugnahme auf den S. 46 angedeuteten geometrischen Beweis erwünscht erscheint. — S. 62. Da der Meeresspiegel nicht als wagerechte Ebene definiert werden darf, so müßte im dritten Absatz nach den Worten „gemeinsame wagerechte Ebene“ das Wort „bezw.“ eingeschaltet werden.

Das gut ausgestattete Werkchen wird nicht nur als Lehrbuch, sondern auch für den Gebrauch in der Praxis ausgezeichnete Dienste leisten.

Berlin. A. Schneider.

F. Auerbach. Das Zeifswerk und die Carl-Zeifs-Stiftung in Jena. Ihre wissenschaftliche, technische und soziale Bedeutung, für weitere Kreise dargestellt. Mit 78 Abbildungen im Text. VI u. 124 S. Jena 1903, Gustav Fischer. ℳ 2.—.

Es war eine dankenswerte Aufgabe, die Entwickelung und Bedeutung eines in seiner Art einzig dastehenden Unternehmens, wie es das Zeißwerk in Jena ist, in einer Monographie zur Darstellung zu bringen. Der Verfasser hat sich dieser Aufgabe mit schönstem Erfolge unterzogen und entwirft uns ein anschauliches Bild von dem Werdegang, den Leistungen und

der Organisation der Zeißschen Anstalten, wobei die überragenden Verdienste ihres seit dem Erscheinen des Buches leider dahingeschiedenen langjährigen Leiters Ernst Abbe in das rechte Licht gerückt werden. Die Lektüre der Auerbachschen Schrift kann jedem aufs wärmste empfohlen werden. Abgesehen von den übrigen Ausführungen des Verfassers muß die eingehende Schilderung der sozialen Verhältnisse, unter denen die Jenaer optischen Werkstätten seit der Begründung der von Abbe ins Leben gerufenen „Carl-Zeiß-Stiftung" arbeiten, auch für weiteste Kreise von Interesse sein.

Berlin. E. ASCHKINASS.

Fr. Kohlrausch. Lehrbuch der praktischen Physik. 10., vermehrte Auflage des Leitfadens der praktischen Physik. Mit zahlreichen Figuren im Text. XXVIII u. 656 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. ℳ 9.—.

Die neueste, zehnte Auflage des bekannten Buches schließt sich würdig ihren Vorgängerinnen an. Zahlreiche Ergänzungen sind wieder hinzugekommen, einzelne Paragraphen neu eingefügt worden. Die weitere Ausgestaltung dieses dem Experimentator unentbehrlich gewordenen Hilfsmittels gibt sich schon äußerlich dadurch zu erkennen, daß der Umfang des Buches gegenüber der vorigen Auflage um 46 Seiten gewachsen ist.

Berlin. E. ASCHKINASS.

Ph. Erményi. Dr. Josef Petzvals Leben und Verdienste. 2., wesentlich vermehrte Ausgabe mit 11 Bildern und 2 Figuren. VIII u. 86 S. Halle a. S. 1903, Wilhelm Knapp. ℳ 2.40.

Ein mit großer Liebe geschriebenes Lebensbild des Mannes, der wohl in erster Linie als Erfinder des lichtstarken photographischen Objektivs seinen Namen der Nachwelt hinterlassen hat. Wir erfahren hier aber, wie vielseitig das Genie Petzvals (geb. 1807, gest. 1891) sich auch auf zahlreichen anderen Gebieten der Wissenschaft und Technik betätigt hat und lernen aus diesen Blättern eine eigenartige Persönlichkeit näher kennen.

Berlin. E. ASCHKINASS.

G. C. Schmidt. Die Kathodenstrahlen. Die Wissenschaft, Sammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien, Heft 2. Mit 50 Abbildungen. VII u. 120 S. Braunschweig 1904, Friedrich Vieweg und Sohn. ℳ 3.60.

Eine im ganzen recht hübsch geschriebene Darstellung der wichtigsten Untersuchungen auf dem Gebiete der Kathodenstrahlen und mit ihnen im Zusammenhang stehenden Erscheinungen. Besonders sei rühmlichst hervorgehoben das fünfte Kapitel, in welchem die geschichtliche Entwickelung der einschlägigen Probleme geschildert wird. Das Buch ist auch für solche Leser berechnet, die nicht über eingehende physikalische Kenntnisse verfügen. Daher sind mathematische Entwickelungen möglichst vermieden worden.

Berlin. E. ASCHKINASS.

H. Mayer. Blondlots N-Strahlen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet und im Zusammenhange dargestellt. 39 S. Mährisch-Ostrau 1904, R. Papauschek. ℳ 1.—.

Die sogenannten N-Strahlen gehören zu der großen Zahl jener Erscheinungen, die sich dadurch auszeichnen, daß sie — nicht existieren. Das hat aber nicht gehindert, daß nahezu 100 Abhandlungen über dieses „interessante Phänomen" veröffentlicht wurden, und daß der Verfasser der vorliegenden Schrift es nicht für überflüssig hielt, eine — wie es im Vorwort heißt — „zusammenfassende Darstellung der gegenwärtigen physikalischen Forschungsresultate über N-Strahlen zu geben, umsomehr, als es die Einfachheit der Versuchsanordnungen jedem Physiker gestattet, Blondlots Experimente zu wiederholen". Ja, wenn es mit der Einfachheit der Versuchsanordnung getan wäre!

Berlin. E. Aschkinass.

F. Bremer. Leitfaden der Physik für die oberen Klassen der Realanstalten mit besonderer Berücksichtigung von Aufgaben und Laboratoriumsübungen. Mit 386 Figuren im Text. VIII u. 294 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner. ℳ 3.20.

Das vorliegende Buch ist eine sehr beachtenswerte Erscheinung unter den neu erschienenen Physikbüchern. Daß es unmittelbar aus dem praktischen Unterricht in den oberen Klassen hervorgegangen ist, spürt jeder Physiklehrer sofort. Die Fassung und experimentelle Begründung der Gesetze ist kurz und präzis. Viele Kapitel sind meisterhaft durchgearbeitet, und man merkt ihnen an, daß bewährte Fachlehrer hier das Resultat jahrelanger Mühe niedergelegt haben. Die Aufgaben, welche am Schlusse eines jeden Paragraphen zur Lösung gestellt werden, sind nicht immer ganz leicht. Was dem Buche sein charakteristisches Gepräge verleiht und es vor den übrigen mir bekannten Lehrbüchern auszeichnet, sind die Übungen. Die Ausführung ist nicht nur kurz angegeben, wie in anderen Büchern, sondern, nachdem erwähnt, was zur Übung gebraucht wird, wird dieselbe mit den Zahlen durchgeführt, die Schüler bei den Übungen an der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule mit den dort vorhandenen Apparaten erhalten haben, indem dann meist noch das Resultat auf seine Übereinstimmung mit der berechneten Zahl hin geprüft wird. Wo solche Schülerübungen in der Prima noch nicht bestehen, wird das Buch bei ihrer Einführung eine nicht zu unterschätzende Hilfe bieten, indem die Schüler ähnliche quantitative Bestimmungen, wie sie im Buche angeführt sind, an der Hand des Buches leicht werden ausführen können.

Diejenigen Gebiete der Physik, welche von den Schülern nur rezeptiv verarbeitet werden, welche also weder anregende Aufgaben liefern noch durch Laboratoriumsübungen den Schülern näher gebracht werden können, von denen aber einige notwendig in ein Lehrbuch hineingehören, sind ausgeschlossen worden. So fehlen die Meteorologie, einige Kapitel der Mechanik und die Elektrostatik. Wenn der Verfasser meint, daß der Behandlung der letzteren die zuviel Zeit beanspruchende genaue Besprechung der elektrostatischen Einheiten im Wege ständen, so glaube ich betonen zu sollen, daß diese allerdings viel Mühe verursachende Einführung doch nachher

reichlich gerechtfertigt wird durch das bessere Verständnis, das die Schüler den späteren Kapiteln der Elektrizitätslehre entgegenbringen. Ich glaube, daß das Fehlen gerade dieses Teiles der Physik einer Einführung des Lehrbuches an vielen Anstalten hindernd im Wege stehen wird. Überhaupt zeigt sich, daß bei der Bearbeitung des Buches vorhandene Notizen den Verfasser wohl oft bestimmt haben, nicht alle Teile der Physik, die in den oberen Klassen durchgenommen werden müssen, gleichmäßig zu berücksichtigen, sondern einige Lieblingsthemata vor anderen zu bevorzugen. Wer die interessanten Daten der ersten Seiten der Wärmelehre gelesen hat, wird diesem Urteil zustimmen; wer jedoch in einem physikalischen Lehrbuch das gesamte physikalische Wissen finden will, wird dies tadeln. In der vorliegenden Fassung ist es ein Buch, das viele Kapitel der Physik vorzüglich darstellt, das auch als Hilfsbuch für Schülerübungen nicht bloß den Schülern der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule gute Dienste leisten wird, das aber bedeutend an Wert gewinnen würde, wenn in der zweiten Auflage eine kurz gefaßte Behandlung der fehlenden Kapitel eingeschoben würde.

Berlin. A. Blümel.

E. Riecke. Beiträge zur Frage des Unterrichts in Physik und Astronomie an den höheren Schulen. Von O. Behrendsen, E. Bose, E. Riecke, J. Stark und K. Schwarzschild. Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik. Göttingen Ostern 1904. Gesammelt und herausgegeben von E. Riecke. IV u. 108 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner. ℳ 2.—.

Das interessante Heft enthält in der ersten Hälfte eine Abhandlung von Riecke: die Grundlagen der Elektrizitätslehre mit Beziehung auf die neueste Entwickelung. Nach einer kurzen Charakterisierung der ältesten Anschauungen und des Verhältnisses der verschiedenen Theorien zu einander wird die pädagogische Brauchbarkeit der Theorien besprochen und der Weg, welcher der historischen Entwickelung folgt, auch auf dem Gebiete der Elektrizitätslehre als der für den Unterricht beste hingestellt. Nach der Besprechung der Ionen in Elektrolyten, in der atmosphärischen Luft und in Flammen folgt die Herleitung der Ladung und Masse der Ionen, eine Besprechung der Kathodenstrahlen, der Elektronen und der elektromagnetischen Masse. Es folgt die Bestimmung des Durchmessers der Elektronen, die Ionisierung durch Kathodenstrahlen, die Kanalstrahlen, Becquerelstrahlen und Radiumstrahlen.

Der zweite Teil des Heftes gibt kurze Aufsätze über einige den Unterricht in der Physik an höheren Schulen betreffende Fragen; so verlangt O. Behrendsen für das Gymnasium mehr Physikstunden und eine andere Verteilung des Stoffes. Er sagt: „Soll der physikalische Unterricht in einer dem Standpunkt moderner Anschauungen entsprechenden Weise gegeben werden, so daß er für den Schüler und dessen spätere Bedürfnisse direkt nutzbar werden kann, so muß er auf die Energetik aufgebaut werden; zu diesem Zwecke muß die Mechanik vorangeschickt, also schon in der Obersekunda erledigt werden“. Wenn man hier auch anderer Ansicht sein kann, so muß man unbedingt dem Gedanken Starks beipflichten, die er in einem Aufsatz über die Physik in der Schule ausspricht. „Die Grundbedingung

dafür, daß die Physik zu einem Bildungsmittel wird und dadurch überhaupt die Berechtigung zu einem Unterrichtsgegenstand erlangt, besteht darin, daß der physikalische Lehrstoff verringert wird, damit er nicht zu einem praktisch unberechtigten, geistig schädigenden Memorierstoff herabsinkt." Ein Aufsatz über Kurse in physikalischer Handfertigkeit von E. Bose und astronomische Beobachtungen mit elementaren Hilfsmitteln von K. Schwarzschild schließen den Inhalt des interessanten Heftes.

Berlin. A. Blümel.

Th. Newest. Einige Weltprobleme. II. Teil: **Gegen die Wahnvorstellung vom heißen Erdinnern.** 91 S. Wien 1906, Karl Konegen. ℳ 1.50.

Der Verfasser glaubt, eine Anzahl von Gründen, die gegen das feurigflüssige Erdinnere sprechen, gefunden zu haben — Gründe, denen wir nicht folgen können, obschon auch uns die durchgehends große Hitze des Erdkernes keineswegs bewiesen erscheint, und die Flüssigkeit desselben kaum heute noch einen ernsten Verfechter findet. Freilich aus andern Gründen, als sie der Verfasser zur Verfügung hat, denn die Größe der Präzession der Erde einerseits, der Mangel einer Flut der „Erdkruste" andererseits haben (vgl. u. a. Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels S. 685 ff.) Arrhenius zu der Vorstellung des gasförmigen Erdkernes geführt, welche der Verfasser nicht versteht, und Lord Kelvin zu der Konzeption eines im allgemeinen „effektiv festen" Erdkerns mit einer festen Schale geführt, welche der Verfasser nicht kennt. Wir glauben damit dem Buche genug Beachtung geschenkt zu haben, besonders wenn wir uns erlauben, wenigstens den Worten des Verfassers S. 22 „daß jede Gründlichkeit zumeist Langeweile zum Gefolge hat", beizupflichten.

Charlottenburg. H. Samter.

H. Danneel. Elektrochemie I. Theoretische Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Figuren. 197 S. Leipzig 1905, G. J. Göschen. ℳ —.80.

Dieses Werkchen kommt dem dringenden Bedürfnisse aller derjenigen entgegen, die sich in das moderne Grenzgebiet zwischen der Physik und der Chemie schnell einarbeiten möchten, und denen die meisten Lehrbücher dieser Wissenschaften Genügendes nicht bieten können. Es ist im ganzen auf drei Teile berechnet, von denen der zweite die experimentellen Resultate enthalten, der dritte der Anwendung in der Technik gewidmet sein soll. Dem Physiklehrer wird der erste Teil genügen können, der bis zur Theorie der galvanischen Elemente sowie der Elektrolyse geht — nur der Akkumulator soll im 2. und 3. Bande ausführlicher besprochen werden. Zuletzt wird das an sich klare Bild durch die Brille der Elektronentheorie betrachtet. Einige Druckfehler:

S. 25, Z. 4 u. 3 von unten sind die Brüche umzukehren, der Partialdruck des atmosphärischen Stickstoffes ist $760 \cdot \frac{79,2}{100}$, der des Sauerstoffs $760 \cdot \frac{20,8}{100}$ vom Hg. S. 92 Der Temperatur-Koeffizient des Widerstandes fast

sämtlicher flüssiger Leiter ist negativ (statt positiv). S. 127, Z. 5 von unten muß es heißen: Man kann die Kraft berechnen, die einem g-Ion (statt Ion) eine bestimmte Geschwindigkeit erteilt. S. 134, Z. 16 von unten Reibungselektrizität (statt Berührungsel.). S. 137, Z. 3 der Anm. HNO_3 (statt HNO_6). S. 179 muß es heißen: Die Stromstärke muß 96540 Sek. lang 1 Amp. betragen (statt die St. beträgt 96540 Amp.-Sek., denn dieses Maß kommt nicht einem Strom, sondern einer El.-Menge zu). 4 Zeilen tiefer muß das sinnentstellende Komma hinter Ampere fort; S. 180, letzte Zeile muß es im Werte der niedergeschlagenen g-Cupro pro Ampere-Stunde eine Stelle nach rechts geschoben werden.

Sonst ist das Buch korrekt, das beigegebene Register vollständig, und wir stehen nicht an, das Werk als erste Einführung in die physikalische Chemie bestens zu empfehlen.

Charlottenburg. H. Samter.

H. Keferstein. Strahlengang und Vergrößerung in optischen Instrumenten. (Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaft. Herausgegeben von Poske, Höfler und Grimsehl. Heft 5.) Mit 19 Figuren. 42 S. Berlin 1905, Julius Springer. ℳ 1.60.

Arbeiten, die wegen ihres Umfangs sich nicht zur Aufnahme in die Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht eignen, sollen in dieser Sammlung erscheinen. Das vorliegende Heft bietet eine sehr dankenswerte Ergänzung der üblichen Schulbücher der Physik, indem es wichtige Fragen der praktischen Optik behandelt, an denen der Unterricht bisher achtlos vorübergegangen ist. Der Physiklehrer konnte sich darüber bisher nur durch die umfangreichen Darstellungen von Czapski in Winckelmanns Handbuch und in dem von Lummer herausgegebenen Bande von Müller-Pouillets Physik informieren. Die klare Einführung in den Begriff der Pupillen und den neuerdings zuerst von v. Rohr benutzten Begriff der Luken optischer Instrumente wird daher allen Physiklehrern willkommen sein, besonders denjenigen, die längst die in den üblichen Entwickelungen, insbesondere des Galileischen Fernrohrs verbleibenden Lücken kannten. Die von dem Verfasser für das absolute Vergrößerungsvermögen jedes optischen Instrumentes zugrunde gelegte Erklärung als des Konvergenzverhältnisses in seinen Pupillen erscheint dem Referenten einwandsfrei. Dagegen hätte er überall gern Bündel statt Büschel gelesen, da es sich nicht um ebene Gebilde handelt.

Charlottenburg. H. Samter

E. Moors. Le système des poids, mesures et monnaies des Israélites d'après la Bible. 62 S., dazu Figurentafeln und Zahlentabellen Paris 1904, A. Hermann. Fr. 4.—.

Der Hauptteil des Werkchens gilt der Beantwortung der Frage, ob die Juden zur Zeit des Königs Salomo einen bessern Wert für die Zahl π gekannt haben, als 3. Bisher hat dieser Wert als der den Juden selbst in den ersten nachchristlichen Jahrhunderten allein bekannte gegolten. Der Verfasser sucht aus der Form des im Salomonischen Tempel aufgestellten „ehernen Meeres" zu beweisen, daß vielmehr der den Juden um 1000 v. Chr.

bekannte Wert von π ein sehr genauer gewesen sein müsse. Jenes große Metallbecken hat von jeher die Grundlage für diejenigen gebildet, welche die mathematischen Kenntnisse der Hebräer feststellen wollten. Andererseits hat es scharfen Bibelkritikern (vgl. z. B. schon Spinoza, tr. theol.-pol. c. 2, S. 181) in ihren Angriffen gegen die Autorität der Bibel eine Handhabe geboten. Es steht ja auch fest, daß die betreffende Stelle im 1. Buche der Könige erst während der babylonischen Gefangenschaft im 6. Jahrhundert, die Parallelstelle der Chronik noch später verfaßt ist. Der Verfasser aber konstruiert sich das „Meer" im Gegensatze zu andern Kommentatoren in seiner Weise, nimmt ferner an, daß das Bath, die Einheit, von der gerade 2000 in dem „Meere" enthalten gewesen sein sollen, gerade den 6. Teil der Kubikelle darstellte und leitet dann allerdings einen recht genauen Wert von π her. Uns hat er freilich weder durch diese Deduktion noch durch die Anknüpfung an den Aufenthalt der Juden in Ägypten davon überzeugen können, daß diese eine genauere Kenntnis als $\pi = 3$ gehabt haben müßten. Denn dieser Aufenthalt, auf den der Verfasser so viel Gewicht legt, ist doch nur für denjenigen verbürgt, der an den Wortlaut der Bibel glaubt, und hält vor einer scharfen Kritik (vgl. z. B. Stade, Gesch. d. Volkes Israel) nicht Stand, ebensowenig wie der Zug der Juden durch die Wüste usw. Der Verfasser aber scheint in allem sich an den Wortlaut der Bibel zu halten, datiert Moses von 1571—1451 und sogar Jakob von 1838—1689. Die Schrift bedeutet keine Bereicherung unserer bisherigen Kenntnisse über die theoretischen und praktischen Kenntnisse der Juden zur Zeit der Entstehung der biblischen Bücher.

Charlottenburg. H. Samter.

M. Dietrich. Die gebräuchlichsten Dampfturbinensysteme für Land- und Schiffszwecke nach Konstruktion und Wirkungsweise. Mit 151 Abbildungen. VII u. 314 S. Rostock i. M., 1906. C. J. E. Volckmann. geh. ℳ 8.—, geb. ℳ 9.—.

Das Werk ist entstanden aus einer Reihe kleinerer Schriften, welche der Verfasser über die einzelnen Dampfturbinenarten in demselben Verlage veröffentlicht hat. Der Hauptwert des Buches liegt in den zum teil recht ausführlichen Angaben über die bauliche Ausführung der einzelnen Turbinenarten und ihrer Teile, sowie in den fesselnden Schilderungen praktischer Versuchsergebnisse, namentlich bezüglich der Anwendung einzelner Turbinenarten für Schiffszwecke. Wie fast in allen Werken über Dampfturbinen scheint mir auch hier der Riedler-Stumpf-Turbine eine im Verhältnis zu ihrer Bedeutung für die Praxis allzu umfangreiche Behandlung zuteil geworden zu sein. Noch mehr gilt dies aber von der Dampfturbine von Schulz, welche in dem Buche die eingehendste Behandlung von allen Dampfturbinenarten erfahren hat, trotzdem von praktischen Versuchen mit dieser Turbine bisher so gut wie nichts bekannt geworden ist. Auch Verfasser „wünscht nur, daß diese Turbine recht bald mit anderen Konstruktionen in Wettbewerb treten möchte, der Erfolg für die Schulz-Turbine wird dann (wie Verfasser meint) sicher nicht ausbleiben".

Im theoretischen Teil (Kapitel 1—3) finden sich mancherlei Ungenauigkeiten und selbst Unrichtigkeiten. Den trocken gesättigten Wasserdampf

als ideelles Gas anzusehen, welches das Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz befolgt (S. 16), ist unter allen Umständen unzulässig. Druck und Ausstattung des Buches sind recht gut, die zahlreichen Abbildungen durchweg klar und lehrreich.

Grunewald. R. Vater.

M. L. Marchis. Physique industrielle thermodynamique, II: Introduction à l'Etude des Machines thermiques. Grenoble und Paris 1905. Fr. 5.—.

Während der vor etwa Jahresfrist erschienene erste Teil des Werkes die Fundamentalsätze der Thermodynamik, sowie umkehrbare und nicht umkehrbare Zustandsänderungen im allgemeinen behandelte, soll der vorliegende zweite Teil des Werkes eine Art Einführung in das Studium der Theorie von Gasmaschinen, Dampfmaschinen und Kältemaschinen darstellen und behandelt daher in ausführlicher Weise die umkehrbaren Zustandsänderungen der Gase und Dämpfe. Hieraus ergibt sich die bekannte Einteilung in zwei größere Abschnitte, von denen der erste die Eigenschaften der Gase, der zweite die der gesättigten Dämpfe behandelt. Dabei behält der Verfasser aber den Zusammenhang dieser beiden Teile dadurch im Auge, daß er stets die Änderungen in Betracht zieht, welche die aufgestellten Gesetze in dem Falle erleiden, wo sich Gase und Dämpfe dem kritischen Punkte nähern. Für das Studium des Werkes dürfte die Klarheit der Sprache bei großer Übersichtlichkeit in der Anordnung des Stoffes sehr förderlich sein, während anderseits freilich für den deutschen Leser die ungewöhnliche Form der einzelnen Gesetze etwas unbequem ist, da die Wahl der Einheiten und die Bezeichnung der Konstanten von der bei uns in derartigen Werken üblichen in vielen Fällen abweicht. Recht wertvoll ist die große Zahl ausführlicher Tabellen, die namentlich für den praktischen Gebrauch bei Untersuchung von Maschinen willkommen sein werden. Die hübsche Ausstattung, der übersichtliche Druck und nicht zu vergessen der niedrige Preis (5 frs.) könnte vielen deutschen ähnlichen Büchern als nachahmenswertes Muster dienen.

Grunewald. R. Vater.

K. Jessen und M. Girndt. Leitfaden der Baustofflehre für Baugewerkschulen. Mit 36 Figuren im Text. IV u. 84 S. Leipzig 1905, B. G. Teubner. *M* 1.50.

Das Buch ist zwar, wie der Titel besagt, lediglich ein Leitfaden, d. h. eine Art Skelett, dem der Lehrer erst durch seinen Vortrag, durch Abbildungen, Vorführungen und Ausflüge Fleisch und Leben zu verleihen hat; trotzdem wird es bei seinem reichen Inhalte nicht bloß Schülern, sondern auch vielen, welche mitten in der Praxis stehen, ein willkommenes Nachschlagebuch auf dem umfangreichen Gebiete der Baustofflehre sein, wozu namentlich die Übersichtlichkeit in der Anordnung des Stoffes wesentlich beitragen dürfte. Eine größere Anzahl einfacher, aber lehrreicher Abbildungen, z. B. von Öfen, Mischvorrichtungen, Feuerschutzummantelungen usw. ist für das Verständnis an vielen Stellen recht wertvoll.

Grunewald. R. Vater.

W. v. Dyck. Über die Errichtung eines Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München. Festrede zur Übernahme des ersten Wahlrektorates bei der Jahresfeier der Technischen Hochschule zu München, gehalten am 12. Dezember 1903 vom derzeitigen Rektor. III u. 40 S. 4⁰. Leipzig 1905, B. G. Teubner. *M* 2.—.

Die Rede behandelt in fesselnder Weise die Aufgaben, welche das Museum zu erfüllen hat und die Erwartungen, die sich an das Museum knüpfen, dessen Zweck bekanntlich der sein soll, die historische Entwickelung der naturwissenschaftlichen Forschung, der Technik und der Industrie in ihrer Wechselwirkung darzustellen und ihre wichtigsten Stufen durch hervorragende typische Meisterwerke zu veranschaulichen.

Grunewald. R. VATER.

E. Leher. Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe. Mit 15 Abbildungen. 124 S. Leipzig 1905, G. J. Göschen. *M* —.80.

Das kleine Buch enthält wirklich so ziemlich alles, was man überhaupt vom Wasser zu wissen wünschen mag. In knapper, aber fesselnder und übersichtlicher Darstellungsweise werden zunächst die verschiedenen chemischen und physikalischen Eigenschaften des Wassers, sowie seine Verwendung in allen möglichen Zweigen der Technik erläutert. Ein weiterer Abschnitt behandelt die heutzutage so wichtige Frage der Trinkwasserversorgung und Reinigung der Abwässer, während in einem Schlußabschnitte das Wichtigste über natürliche und künstliche Mineralwässer, sowie über Natur- und Kunsteis nebst den verschiedenen Herstellungsweisen gesagt ist. Nur ein Satz darf nicht unwidersprochen bleiben. Bei der Erwähnung der Gefahr des Kesselsteins in Dampfkesseln S. 71 sagt der Verfasser: „. . Springt nun eine solche Kruste (nämlich Kesselstein) ab, so kommt das Wasser mit der glühenden Stelle direkt in Berührung, es erfolgt eine plötzliche furchtbare Erhitzung und Dampfentwickelung, der Druck steigert sich momentan ins Unendliche, der Kessel wird zersprengt und explodiert.“ Es ist nicht recht ersichtlich, wie ein kleines Stück rotglühenden Eisens in einem Dampfkessel von mehreren cbm Wasserinhalt eine so „furchtbare“ Dampfentwickelung verursachen kann, daß der Druck „momentan ins Unendliche“ gesteigert wird. Die Gefahr liegt vielmehr darin, daß rotglühendes Eisen einen erheblichen Teil seiner Festigkeit einbüßt und dadurch infolge des Dampfdruckes ein Bruch an der glühend gewordenen Stelle eintritt.

Das kleine Buch kann sonst allen, die sich über den behandelten Gegenstand unterrichten wollen, warm empfohlen werden.

Grunewald. R. VATER.

Die Neubauten der Kgl. Sächsischen Technischen Hochschule zu Dresden. Dresden 1905.

Sonderabdrücke aus der Deutschen Bauzeitung (Baubeschreibung), der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure (Innere Einrichtung) und dem Zentralblatt der Bauverwaltung (Versuchsanstalt in Übigau), mit vielen photographischen Abbildungen, Grundrissen und Konstruktionszeichnungen.

Grunewald. R. VATER.

C. Dietzschold. Die Hemmungen der Uhren, ihre Entwicklung, Konstruktion, Reparatur und Behandlung vor der Reglage, nebst zugehörigen Tabellen, zahlreichen Abbildungen und 6 Porträts. X u. 234 S. Krems a. Donau, Nied.-Österr. 1905, D. Dietzscholds Verlag. ℳ 4.50.

Ein nützliches Lehr- und Nachschlagebuch für Uhrmacher und solche Laien, welche dieser Gegenstand fesselt. Auch die vielen geschichtlichen Rückblicke, sowie Angaben über den Lebenslauf der um die hohe Entwicklung der Uhrmacherkunst verdienten Männer dürften für viele wertvoll sein.

Grunewald. R. Vater.

N. Herz. Geodäsie, eine Darstellung der Methoden für die Terrainaufnahme, Landesvermessung und Erdmessung. Mit 3 Steindrucktafeln und 280 Figuren im Text. IX u. 418 S. Wien 1905, Franz Deuticke. ℳ 14.—.

In dem Sammelwerk: Die Erdkunde von Maximilian Klar bildet das vorliegende Buch den XXIII. Teil. Es ist mit einem Anhang versehen: Anleitung zu astronomischen, geodätischen und kartographischen Arbeiten auf Forschungsreisen. Ursprünglich war der Universitätsprofessor und Oberst a. D. Dr. Heinrich Hartl mit der Abfassung des Buches betraut; nach dem Tode dieses Autors ging der Auftrag auf den Verfasser über, welcher nur die bereits veröffentlichten Arbeiten Hartls benutzen konnte. Das vorliegende Werk ist in erster Linie für die Geographen bestimmt, deshalb gibt es nur das Wichtigste aus der niederen und höheren Geodäsie in gedrängter Form. Um aber jene Sätze, deren Begründung nur durch mathematische Rechnung erfolgen kann, nicht ohne Beweis zu lassen, sind die zugehörigen Ausführungen in Anmerkungen zugefügt, sodaß sie von dem Geographen eventuell überschlagen werden können. Die notwendige Beschränkung ist auch die Ursache, daß die Ausgleichungsrechnung weggelassen worden ist. Nur die Aufstellung der Bedingungsgleichungen ist aufgenommen worden, um erkennen zu lassen, in welcher Art sich der Einfluß der Netzbedingungsgleichungen auf die Beobachtungen äußert.

Die Einteilung des Stoffes in die drei Hauptabschnitte Instrumentenkunde, niedere Geodäsie, höhere Geodäsie ist sachgemäß, und es können aus dem reichen Inhalt des 417 Seiten umfassenden Buches die Probleme der vier, sechs und acht Punkte, die Distanzmessung, das barometrische Höhenmessen, die Tachymetrie, die Photogrammetrie, das Legendresche Theorem, die Gradmessungen, die theoretischen Untersuchungen über die Figur der Erde, Bestimmung der Erddimensionen, die Lotabweichungen und ihr Einfluß auf Breiten, Längen und Azimute, sowie die Pohlhöhenschwankungen hervorgehoben werden. In dem Anhang sind Anleitungen über Ausrüstung zu Forschungsreisen, die anzustellenden Beobachtungen und die Verwertung derselben gegeben.

Der strebsame Verfasser, von welchem vor kurzem auch ein Lehrbuch der mathematischen Geographie erschienen ist, bietet in dem vorliegenden Werke viel gut Gelungenes und Schönes, die folgenden Stellen aber bedürfen der Rektifikation: S. 44 und 45, die Bedingungsgleichungen für beide Nonienarten setzen voraus, daß $n-1$ oder $n+1$ Teile der Hauptteilung in n Teile

des Nonius geteilt werden, n bezeichnet immer die Anzahl der Nonienteile und muß eine praktikable Zahl sein, da sie stets als Faktor in der dritten Gleichung des Nonius vorkommt. Auch Bauernfeind, den der Verfasser oft anzieht, hat in seinen Ausführungen über den Nonius dies nicht genügend beachtet. Ferner bleibt S. 45 der Widerspruch zwischen Zeile 4 und Zeile 13 v. o. zu beseitigen, auch ist in Fig. 46 der Nonius zwölfteilig gezeichnet, aber als zehnteiliger beziffert. — Die Aufhängung des Doppelsenkels, Fig. 55a, macht einen scherzhaften Eindruck; der das Lot L tragende Faden muß durch die zentrale Bohrung des Gegengewichtes M durchgeführt werden. Das in Fig. 55b abgebildete Lot ist seiner Ungenauigkeit wegen unbrauchbar. Gänzlich mißverstanden ist die S. 55 abgebildete Vorrichtung. Der Schmidtsche Lotteller dient dazu, beim Loten in tiefen Schächten den Ruhepunkt der langsam schwingenden langen Lote aus Ablesungen der Rückkehrpunkte an den beiden vorhandenen Skalen zu ermitteln; der Lotkörper hängt nicht an einem dünnen Drahtseil, sondern an einem dünnen Messingdraht, die Trommel befindet sich am Tage, der Lotteller in der Tiefe des Schachtes. Der durch vier Schrauben verschiebbare prismatische Körper wird erst eingesetzt, wenn der Ruhepunkt des freischwingenden Lotes ermittelt ist und dient zum Fixieren des Lotdrahtes im Seigerpunkte. — Die S. 63, Abs. 32 beschriebenen Libellen sind nicht nach Kreisen, sondern nach Rotationskörpern angeschliffene Röhren (Fig. 63); nur durch Biegen gekrümmte Röhrenlibellen (S. 61) werden in der Geodäsie nicht mehr verwendet. Aus diesem Grunde ist auch die in Fig. 73 S. 68 dargestellte Libelle ganz unmöglich. — S. 94 ist der sichtbare oder natürliche Horizont mit dem scheinbaren und der scheinbare mit dem wahren Horizont verwechselt. Der letztere darf nicht anders definiert werden als die gekrümmte Erdoberfläche selbst, wenn nicht in die Lehre vom Nivellieren die größte Verwirrung hineingetragen werden soll. — In ähnlicher Weise ist die S. 95 gegebene Definition des magnetischen Meridians zu berichtigen. Nicht die Vertikalebene, in welcher die Magnetnadel zum Stillstand kommt, ist der magnetische Meridian, sondern die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Erdoberfläche. Auch dürfte die gegenwärtige Größe der magnetischen Deklination für Wien näher an 8^0 als an 9^0 liegen. — Die S. 215 für die Meßtischaufnahme (Fig. 230) gegebene Fehlerausgleichung ist verfehlt, was sich sofort ergibt, wenn man in die Proportion S. 216 die Größen für den Punkt 4 oder den Punkt 2 einsetzt. — In Fig. 246 kann die Angabe des Punktes C' an der jetzigen Stelle zu Irrtümern führen, da unter Berücksichtigung des Gaußschen Koeffizienten die Größe CC' nur 0,1306 von BC ist, C' also viel dichter an C herangerückt werden muß.

Der rühmlichst bekannte Verlag hat dem Buch eine vorzügliche Ausstattung zu teil werden lassen.

Berlin. A. Schneider.

Abhandlungen der Fries'schen Schule. Neue Folge. Herausgegeben von Gerhard Hessenberg, Karl Kaiser und Leonard Nelson. Drittes Heft. Göttingen 1906, Vandenhoeck & Ruprecht. ℳ 2.40, Subskriptionspreis ℳ 2.—.

Das Heft enthält auf S. 393—430 den zweiten (abschließenden) Teil der „Bemerkungen über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung

der mathematischen Gewißheit“ von Leonard Nelson, auf S. 431—440 „vier Briefe von Gauß und Wilhelm Weber an Fries“ und auf S. 441—478 einen Vortrag von M. T. Djuvara über „wissenschaftliche und religiöse Weltansicht“.

Nelson untersucht in dem jetzt vorliegenden Teil seiner Arbeit die Frage nach der Erkenntnisquelle der Geometrie und setzt sich dabei mit Lobatschewsky, Riemann, Helmholtz, Mill, Mach, Felix Klein und Poincaré auseinander; weitschauend betrachtet der Verfasser seine Frage im Zusammenhang der mathematischen Erkenntnis überhaupt, indem er zugleich die Arithmetisierbarkeit der Mathematik, die Quelle auch der arithmetischen Axiome und die durchgängige Lösbarkeit mathematischer Fragen untersucht. Der Kern der Nelsonschen Beweisführung ist: Da die Logik zu mehreren gleichberechtigten Geometrien führt, so kann sie nicht die hinreichende Quelle der gültigen Geometrie sein; da andererseits die geometrischen Urteile das Merkmal der Allgemeingültigkeit tragen, so können sie nicht aus der Erfahrung stammen; also entspringt die gültige, nämlich euklidische Geometrie einer dritten Erkenntnisquelle, der von Kant entdeckten „reinen Anschauung“, welche die synthetischen Urteile a priori der Geometrie möglich mache. Nelsons Ausführungen sind ungemein scharfsinnig, von durchsichtigem Sprachgewand und zweifellos fesselnd und wichtig für jeden, der dem Gegenstand seine Teilnahme schenkt. Ob die heikle Frage nun endgültig gelöst ist, wage ich nicht zu beurteilen. Das nach erkenntniskritischem Verfahren gewonnene Ergebnis deckt sich mit dem, welches 1899 Julius Schultz in seiner „Psychologie der Axiome“ auf genetisch-psychologischem Wege gefunden hat. — Die Briefe werfen ein hübsches Licht auf das zwischen den Absendern und dem Empfänger bestehende Verhältnis der Freundschaft und Verehrung; mathematisches Interesse bietet die Darlegung eines Fehlers, den Gauß in einer Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbetrachtung über die Lage der Kometenbahnebenen entdeckt hat. — Djuvara weist durch Darstellung der Kantischen Lehre vom Wissen und Glauben nach, daß Wissenschaft und Religion als Gegner unmöglich seien, da sie völlig getrennten Gebieten angehören; aber Kant habe den eigentlichen Ursprung der Religiosität nicht entdeckt; erst Fries habe ihre Quelle in der „Ahndung“ aufgefunden, der aus einem lebendigen Gefühl erwachsenden Überzeugung nämlich, daß die jenseitige Welt des Glaubens und die diesseitige des Wissens im Grunde eins seien. Djuvaras Ausführungen sind ausgezeichnet klar; seine Sprache entfernt sich weit von Kants Ausdrucksweise und beweist dadurch, daß der Verfasser seinen Gegenstand vollkommen durchdrungen hat.

Papier und Druck sind vorzüglich.

Berlin. P. Johannesson.

B. Schmid. Philosophisches Lesebuch zum Gebrauch an höheren Schulen und zum Selbststudium. VIII u. 166 S. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 2.60.

Der Verfasser hat den eigenartigen Gedanken, Abschnitte aus philosophischen Schriften zu einem Lesebuche zu vereinen, sehr glücklich durchgeführt. Das Buch enthält auf 166 Seiten 40 Lesestücke, in denen Grund-

fragen mannigfachster Art, nämlich metaphysischen, erkenntniskritischen, naturphilosophischen, psychologischen, logischen, ethischen und ästhetischen Inhalts zur Verhandlung kommen, und die eine Übersicht über die brennendsten philosophischen Fragen der Gegenwart liefern. Unter den älteren Meistern sind Descartes, Locke, Hume, Kant und de la Mettrie berücksichtigt; die anderen Verfasser gehören der neueren und neuesten Zeit an und sind zwar überwiegend berühmtere philosophische Schriftsteller unserer Tage, aber doch auch Männer, die ihr Ansehen in erster Linie ihren naturwissenschaftlichen Leistungen verdanken, wie Darwin, Häckel, Ratzel, Ostwald und Poincaré. Gegenüber dem möglichen Einwande, daß bei der Kürze der einzelnen Stücke der Leser in den daselbst vorgetragenen Gedankenreihen nicht recht heimisch werden könne, behauptet sich das Buch durch die erstaunliche Vielseitigkeit der in ihm gegebenen Anregungen. Dabei reihen sich die ausgewählten Abschnitte durch innere Verwandtschaft aneinander oder sind durch sehr klare Übergangserörterungen des Herausgebers zu einem geordneten Ganzen verschmolzen. Über die getroffene Auswahl mit dem Herausgeber zu rechten, wäre zwecklos, da hierin der persönliche Geschmack entscheidet; wenn aber auch — jedenfalls aus wohlerwogenen Gründen — so glänzende Schriftsteller wie Fechner, Lotze, Helmholtz und Mach entweder garnicht oder nur in kurzer Anführung zu Worte kommen, so wird doch jeder Leser an den gebotenen Perlen der philosophischen Literatur seine Freude haben. Primanern, die für den Gegenstand Neigung haben oder gewinnen sollen, kann das Buch unbedenklich in die Hand gegeben werden.

Berlin. P. Johannesson.

O. Frölich. Die Entwicklung der elektrischen Messungen. Mit 124 Abbildungen. XI u. 192 S. Braunschweig 1905, Friedr. Vieweg u. Sohn. ℳ 6.80.

Das vorliegende Bändchen, Heft 5 der Sammlung naturwissenschaftlicher und mathematischer Monographien, ist eine erfreuliche Erscheinung auf dem Gebiete der elektrischen Meßkunde.

Es ist nicht eines der vielen Bilderbücher, deren es ja Legion gibt, sondern es will die historische Entwicklung auf diesem Gebiete verfolgen, ein Gegenstand, der allerdings dem eingefleischten Berufstechniker, welcher nur nach Neuerungen lechzt, wenig Interesse abgewinnen dürfte, dessen Behandlung aber in unserer an Idealen so armen Zeit von jedem auf der Höhe seines Faches stehenden Fachmanne freudig begrüßt werden dürfte. Durch solche Schriften wird, wie der Verf. recht treffend bemerkt, nicht nur die Überschätzung unterdrückt, die der moderne Fachmann den modernen Arbeiten so leicht den älteren gegenüber angedeihen läßt, sondern es wird auch oft die Wiederholung eines Gedankenganges vermieden, welcher schon früher durchgearbeitet wurde.

Es dürfte kaum einen berufeneren Mann zur Behandlung dieser Aufgabe geben, als den Verfasser, welcher das Glück hatte, den Werdegang der Elektrotechnik im Verein mit ihrem ersten Fachmann an der Spitze einer Weltfirma durchzumachen.

Das Werk gibt in gedrängter Kürze den Entwicklungsgang der elektrischen Meßtechnik von Oerstedt bis auf die heutige Zeit, geht weniger auf die Details der Konstruktionen ein, als vielmehr auf die Prinzipien der

Wirkungsweise unter verständiger Beschränkung auf das Notwendigste, wobei die gefällige und ansprechende Schreibweise des Verfassers kaum den Gedanken aufkommen läßt, als habe man es mit einer exakten Materie zu tun; man folgt dem Verfasser gern in seinem Gedankengange und ist am Ende erstaunt, welche Fülle von geistiger Forschung in wenigen Kapiteln bewältigt wurde, ohne daß man eine Lücke dabei wahrnehmen kann.

Manchmal allerdings artet diese Knappheit in lakonische Kürze aus, so z. B. in dem Kapitel über Kondensatoren, wo Hr. Frölich gut getan hätte, etwas mehr von seiner Erfahrung zum Besten zu geben; ferner in den Kapiteln über Selbstinduktionsspulen und über Apparate zu magnetischen Messungen. Auch das Kapitel über Wärmemesser hätte bei dem immer mehr wachsenden Interesse für diese Art der Temperaturbestimmung wohl etwas eingehender behandelt werden können. Ebenso ist das Kapitel „Zähler" etwas stiefmütterlich weggekommen. Apparate zur Wellenmessung, Dämpfung etc. sind überhaupt nicht erwähnt, was bei dem hohen Interesse, welches solche Messungen heute mit Recht beanspruchen, bedauerlich erscheinen muß.

Sehr instruktiv sind die Meßmethoden behandelt, deren Wichtigkeit bei der heutigen Vollkommenheit der Meßinstrumente leider immer mehr in den Hintergrund tritt, trotzdem sie es doch gerade sind, welche zu neuen Gedanken anregen und zu wirklichen Fortschritten verhelfen, und es muß rühmend hervorgehoben werden, daß der Verf. gerade diesem Gebiete, dem Titel des Werkes entsprechend, seine besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat; nur hätten die Methoden der Wechselstrommessung dabei nicht zu kurz kommen sollen.

Wenn der Verf. zum Schluß das Bild vom Stammbaum der Geschlechter heranzieht, so hätte sich hieran, trotzdem das Werk nicht den Stempel eines Nachschlagebuches an der Stirn trägt, doch ein Namenregister der Autoren würdiger angeschlossen als ein alphabetisches Verzeichnis der Inserenten, die ohnehin bei dem geringen Umfange des Appendix leicht zu finden sind. Das Reklamebedürfnis des Verlegers wäre dann nicht so kraß zum Ausdruck gekommen, wie beim Fehlen eines solchen Namenregisters. Trotz der erwähnten Mängel dürfte die Lektüre dieses Bändchens das bieten, was gewöhnliche Lehrbücher selten bieten, d. h. Befriedigung.

Charlottenburg. A. Koepsel.

Atti del Congresso internazionale di scienze storiche (Roma, 1—9 Aprile 1903). Volume XII. Atti della Sezione VIII: Storia delle scienze fisiche, matematiche, naturali e mediche. XXIV u. 330 S. Roma 1904. Tipografia della R. Accademia dei Lincei.

Auf dem großen internationalen Kongresse der historischen Wissenschaften, der in Rom während der Tage vom 1. bis 9. April 1903 abgehalten wurde, war die Geschichte der physikalischen, der mathematischen, der naturhistorischen und der medizinischen Wissenschaften in die achte Sektion gelegt worden, und dank den rührigen Vertretern dieser Wissenschaften in Italien, unter denen Herr Loria in erster Linie zu nennen ist, entfaltete sich ein reges Leben in den gut besuchten Sitzungen, welche in den hierfür recht geeigneten Sälen des sehr bequem gelegenen Collegio

Romano stattfanden. Die den Italienern angeborene Lebhaftigkeit und Liebenswürdigkeit trugen in hohem Grade dazu bei, jene Tage für alle Gäste zu wahren Festtagen zu machen, deren Andenken als werter Schatz in ihrem Geiste bewahrt bleiben wird. Der vorliegende Band, der den Teilnehmern der achten Sektion als Gastgeschenk nach mehr als Jahresfrist zugegangen ist, enthält zunächst die Protokolle der Sitzungen, von denen im ganzen neun stattfanden. Dann folgen die zur Diskussion gestellten fünf Thesen. Endlich sind die gehaltenen Vorträge nebst einigen eingesandten Aufsätzen solcher Teilnehmer abgedruckt, die am persönlichen Erscheinen verhindert waren. Wir setzen die Titel der die Mathematik und die Physik betreffenden Vorträge her:

M. Cantor. Hieronymus Cardanus. Ein wissenschaftliches Lebensbild aus dem XVI. Jahrhunderte. S. 31—43.
M. Darvai. Vita di Giovanni Bolyai. S. 45—49.
G. Vacca. Sulla storia della numerazione binaria. S. 63—67.
E. Lebon. Plan d'une bibliographie analytique des écrits contemporains sur l'historie de l'astronomie. S. 81—95.
E. Lampe. Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Rückblick und Ausblick. S. 97—104.
Felix Müller. Über mathematische Zeitschriften. S. 105—113.
J. Guareschi. Lavoisier accusato di essersi appropriato i lavori scientifici di altri. È fondata quest'accusa? S. 115—150.
R. Almagià. Sulla dottrina della marea nell' antichità classica e nel medio evo, S. 151—164.
M. Baratta. Sulla storia degli apparecchi sismici in Italia. S. 165—166.
A. Mori. Per una bibliografia geodetica italiana. S. 167—169.
S. Günther. Lo sviluppo del celebre strumento astronomico geodetico nominato Jacobsstab, ovvero Radius astronomicus. S. 187—189.
G. Uzielli. Sulle misure e sul corpo di Cristo come campione di misura nel medio evo in Italia. S. 191—201.
A. Mori. Il carteggio scientifico di Leonardo Ximenes. S. 211—213.
G. Eneström. Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik. Comunicazione del prof. G. Loria. S. 215—217.
P. Tannery. Sur l'histoire des mots analyse et synthèse en mathématique. S. 219—229.
C. Somigliana. Notizie sulla letteratura Voltiana. S. 231—243.
G. Vailati. La dimostrazione del principio della leva data da Archimede nel libro primo sull' equilibrio delle figure piane. S. 243—249.
G. Pittarelli. Intorno al libro „De prospectiva pingendi“ di Pier dei Franceschi. S. 251—266.
D. Diamilla-Muller. Erronea credenza popolare sull' invenzione della bussola. S. 267—270.
A. von Braunmühl. Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung. S. 271—284.
U. Pagani. Vicissitudes de quelques échantillons météoriques à travers les siècles. S. 285—291.
V. Tonni-Bazza. Frammenti di nuove ricerche intorno a Nicolò Tartaglia. S. 293—307. (Mit Bildnis u. Facsimile zweier Manuskriptseiten.)

Dieser großen Zahl einzelner Artikel gegenüber muß Referent darauf verzichten, auf den Inhalt der Mitteilungen näher einzugehen. Die bloße Ansicht der Titel zeigt, daß der Band eine Menge interessanten Stoffes enthält, und daß eine weite Verbreitung dem Buche zu wünschen ist.

Berlin. E. Lampe.

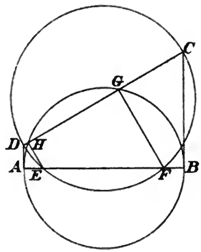
Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

162. Von dem folgenden planimetrischen Satze wird ein einfacher geometrischer Beweis gewünscht:

Steht in einem gewöhnlichen oder überschlagenen Trapeze der eine Schenkel auf den Grundseiten senkrecht, und beschreibt man um beide Schenkel als Durchmesser Kreise, so bilden ihre zwei Paare Schnittpunkte mit den Gegenschenkeln wieder ein Trapez, in dem der eine Schenkel auf den Grundseiten senkrecht steht.



Berlin. P. Schafheitlin.

---

163. Es ist zu beweisen, daß die Resultante von $f_1 = x^m + a$, $f_2 = x^n + x + b$ eine *irreduzible* rationale ganze Funktion der Unbestimmten a und b ist.

Budapest. Josef Kürschák.

---

164. Bei der Diskriminante der Gleichung

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

welche sich bekanntlich als eine rationale ganze Funktion der Konstanten dieser Gleichung $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ darstellen läßt, ist 1) die Summe aller Zahlenkoeffizienten $= \pm (n+1)^{n-1}$, 2) der Koeffizient von $A_n^{n-1} = \pm n^n$.

Diese Sätze sind zu beweisen, und die Vorzeichen $\pm$ zu präzisieren.

Königsberg i. Pr. L. Saalschütz.

---

165. Satz. Alle Ebenen, die aus zwei festen Kugeln Kreise von gleichem Radius ausschneiden, umhüllen ein Rotationsparaboloid, das die Potenzebene der beiden Kugeln zur Scheiteltangentialebene und die Mitte der Zentrale zum Hauptbrennpunkt hat.

Breslau. stud. math. F. Schlegel.

---

166. Gegeben eine zum Koordinatenanfangspunkte symmetrisch liegende *Astroïde* mit dem Parameter a, deren Spitzen durch Bögen von Kreisen, die um die Punkte $x = \pm a$, $y = \pm a$ mit dem Radius a geschlagen sind, verbunden sind. Wie groß ist die Maximalentfernung zwischen Kreis- und Astroïdenbogen?

Potsdam, am 11. März 1906. OTTO MEISSNER.

---

167. Die neun Größen a_{mn} bilden in der folgenden Darstellung, wo ϑu, $\vartheta_2 u$, $\vartheta_3 u$ die geraden elliptischen Thetas, u_1, u_2 beliebige Argumente bedeuten, ein Orthogonalsystem:

$$A(a_{11} + i a_{21}) = \vartheta_3^2 u_1 + \vartheta^2 u_1, \quad A(a_{11} - i a_{21}) = \vartheta_3^2 u_2 + \vartheta^2 u_2$$

$$A(a_{12} + i a_{22}) = -2i\, \vartheta u_1 \vartheta_3 u_1, \quad A(a_{12} - i a_{22}) = -2i\, \vartheta u_2 \vartheta_3 u_2$$

$$A(a_{13} + i a_{23}) = -i(\vartheta_3^2 u_1 - \vartheta^2 u_1), \quad A(a_{13} - i a_{23}) = -i(\vartheta_3^2 u_2 - \vartheta^2 u_2)$$

$$A a_{31} = -i(\vartheta u_1 \vartheta u_2 + \vartheta_3 u_1 \vartheta_3 u_2)$$

$$A a_{32} = -(\vartheta u_1 \vartheta_3 u_2 + \vartheta_3 u_1 \vartheta u_2)$$

$$A a_{33} = -(\vartheta_3 u_1 \vartheta_3 u_2 - \vartheta u_1 \vartheta u_2),$$

wo
$$A = \vartheta u_1 \vartheta_3 u_2 - \vartheta_3 u_1 \vartheta u_2.$$

Wie stellen sich hiernach die zugehörigen sechs Differentialgrößen p_1, p_2, p_3; v_1, v_2, v_3 dar? Und welchen Differentialgleichungen genügen sie, wenn ich voraussetze, daß die Argumente u_1, u_2 Funktionen einer einzigen Variablen t sind?

Berlin. E. JAHNKE.

---

168. Zu der bekannten Integralformel

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

hat Cauchy (Journ. de l'Ecole Polyt. cah. 28) noch folgende aufgestellt:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}(t - x) t^{x-1} \log t \, dt.$$

Beide Formeln sind spezielle Fälle der folgenden:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\log t)^n T_n(t, x)\, dt,$$

worin n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, und die ganze rationale Funktion T_n der Funktionalgleichung:

$$T_{n+1} = (t - x) T_n - t \frac{\partial T_n}{\partial t} \quad \text{nebst} \quad T_0 = 1$$

genügt. Es findet sich der Reihe nach:

$$T_0 = 1,$$
$$T_1 = t - x,$$
$$T_2 = (t-x)^2 - t,$$
$$T_3 = (t-x)^3 - 3t(t-x) + t,$$
$$T_4 = (t-x)^4 - 6t(t-x)^2 + 4t(t-x) + 3t^2 - t,$$
. . . .

und es ist stets auch $\frac{\partial T_n}{\partial x} = -nT_{n-1}$.

Aussig (Böhmen). A. Krug.

---

169. Im Scheitel eines beliebigen Kegelschnitts wird der Oskulationskreis gezeichnet. Von einem beliebigen Punkte Q des Kegelschnitts werden an den Oskulationskreis die beiden Tangenten gezogen; die eine tangiert den Oskulationskreis in A und trifft den Kegelschnitt zum zweitenmale in P, die andere Tangente berührt den Oskulationskreis in B und trifft den Kegelschnitt zum zweitenmale in R. Zwischen den Tangentenabschnitten $QA = QB = t_Q$, $PA = t_P$ und $RB = t_R$ besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{t_P} - \frac{2}{t_Q} + \frac{1}{t_R} = \frac{4\varepsilon}{p},$$

worin ε die numerische Exzentrizität und p den halben Parameter des Kegelschnittes bedeutet. — Für die Hyperbel ist noch zu bemerken, daß ein Tangentenabschnitt, welcher seinen Endpunkt im andern Hyperbelast hat, negativ zu rechnen ist.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

---

170. Die Zentralkraft $F(r)$, welche eine Bewegung längs der ebenen Kurve veranlaßt, deren Gleichung in homogenen rechtwinkligen Koordinaten $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ lautet, ist, wenn die Masse des bewegten materiellen Punktes $= 1$ gesetzt wird, gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{F(r)}{r} = -C \cdot \frac{x_3^3 \cdot \Delta}{f_3^3},$$

worin $\Delta = |f_{ki}|$ die Hessesche Kovariante für die homogene Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$, C eine Konstante und r die jeweilige Entfernung vom Attraktionszentrum, welches als Ursprung des Koordinatensystems angenommen ist, bedeutet.

Aussig (Böhmen). stud. math. Josef Krug.

---

171. Nach Pappus wird ein Rotationskegel durch eine gewöhnliche Schraubenfläche, deren Achse mit der Kegelachse zusammenfällt, in einer Kurve geschnitten, deren Projektion auf eine zur gemeinsamen Achse senkrechte Ebene eine Archimedische Spirale ist. Was entsteht nun aus der Raumkurve bei Abwickelung des Kegels in eine Ebene?

Speyer. H. Wieleitner.

---

172. Gegeben eine Bernoullische Lemniskate. Man ziehe das System der Parallelen zur Hauptachse der Kurve und lege die Kreise durch den Mittelpunkt und je zwei nicht aufeinanderfolgende Schnittpunkte einer Parallelen. Was ist der Ort der Mittelpunkte dieser Kreise? — Aus dem Ergebnis ist eine einfache Konstruktion der Lemniskate herzuleiten.

Speyer. H. Wieleitner.

---

173. Werden die Ecken eines Dreiecks mit einem vierten Punkte seiner Ebene verbunden, so liegen die drei Punkte, in denen die harmonisch zugeordneten Eckenstrahlen die gegenüberliegenden Seiten schneiden, in der dem willkürlichen Punkte harmonisch zugeordneten Transversale. Welche Enveloppe hat in der Ebene eines Kegelschnittes diejenige Transversale eines Polardreiecks, deren harmonisch zugeordneter Punkt den Kegelschnitt beschreibt? Welcher Punkt der Ebene beschreibt dieselbe?

Holzminden. G. Kober.

---

174. Nach Tschebyscheff (Mém. Petersburg (6) 7 (1859) = Oeuvres t. I, p. 295) hat unter allen ganzen Funktionen $n$ten Grades der Form:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1} x + p_n$$

die Funktion

$$F_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n}$$

die Eigenschaft, sich zwischen den Grenzen $x = -h$ und $x = +h$ am wenigsten von Null zu entfernen, und zwar beträgt die Abweichung höchstens $L = h^n : 2^{n-1}$. Hieraus folgt, daß unter allen ganzen Funktionen, deren Grad gleich $n - 1$ oder kleiner ist, die Funktion

$$F_n(x) - x^n$$

sich in den Grenzen $(-h \cdots + h)$ am wenigsten von der Funktion x^n entfernt. Im besonderen ergibt sich für x^4 der Näherungsausdruck:

$$G_4(x) = h^2 x^2 - \tfrac{1}{8} h^4,$$

dessen Abweichung von x^4 höchstens $h^4 : 8$ beträgt.

Bei Benutzung des Näherungsausdruckes $G_4(x)$ für x^4 erhält man für die ganze Funktion vierten Grades:

$$R(x) = Ax^4 + Bx^2 + Cx + D$$

als Näherungsausdruck eine ganze Funktion zweiten Grades und daher für das elliptische Integral erster Gattung

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

als Näherungswert ein Integral, das sich durch elementare Funktionen ausführen läßt; dabei ist h in geeigneter Weise zu wählen.

Es sollen Grenzen für die Abweichung zwischen dem elliptischen Integral und dem so gewonnenen Näherungswerte ermittelt und im besonderen untersucht werden, wie sich die Annäherung gestaltet, wenn man

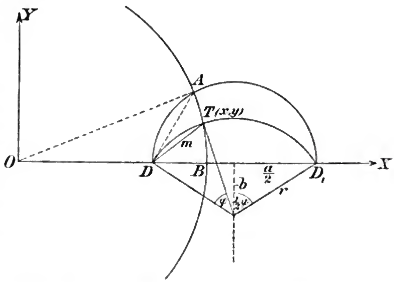
$$R(x) = (h^2 - x^2)(k^2 + x^2)$$

nimmt, wo k eine Konstante bedeutet.

Hannover. P. Stäckel.

B. Lösungen.

Zu **31** (Bd. II, S. 213) (E. Lampe). — Eine vermeintliche Lösung der Trisektion eines beliebigen Winkels geht folgendermaßen vor. Über einer beliebigen Geraden DD_1 als Durchmesser wird ein Halbkreis gezeichnet; man teile sowohl DD_1 als auch den Halbkreis in drei gleiche Teile. Ist B der Teilpunkt von DD_1 nächst D und A der des Halbkreises nächst D, so beschreibe man durch A und B denjenigen Kreis, dessen Zentrum auf DD_1 liegt. Nun wird behauptet, daß dieser neue Kreis jeden anderen Kreisbogen, der durch D und D_1 geht, in einem solchen Punkte T schneidet, daß Bogen DT gleich $\frac{1}{3} DTD_1$ ist. Welche Annäherung gibt diese Konstruktion?



Wählt man die Gerade DD_1 als X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des durch A und B gehenden Kreises sein möge, und bezeichnet die Koordinaten von D mit $(x', 0)$, die Gerade DD_1 mit a, so folgt (s. Fig.) wegen $DB = \frac{a}{3}$, $DA = \frac{a}{2}$ und $\sphericalangle ODA = \frac{2}{3}\pi$ aus dem Dreieck ODA nach dem Kosinussatze: $\left(x' + \frac{a}{3}\right)^2 = x'^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{ax'}{2}$, woraus sich $x' = \frac{5}{6}a$ ergibt. Demnach lautet die Gleichung des festen, durch A und B gehenden Kreises, wenn x und y die Koordinaten von T sind: $x^2 + y^2 = \frac{49}{36}a^2$, die des variablen, durch D und D_1 beschriebenen Kreises

$$(\tfrac{4}{3}a - x)^2 + (y - b)^2 = r^2 = b^2 + \frac{a^2}{4},$$

wo $-b$ die Ordinate des Mittelpunktes ist.

Durch Elimination von y aus beiden Gleichungen ergibt sich für die Abszisse des Schnittpunktes T der beiden Kreise folgende quadratische Gleichung:

$$x^2 - \frac{104}{3}\frac{a^3}{16a^2 + 9b^2}x = \left(\frac{49}{36} - \frac{169}{81}\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{9a^2b^2}{16a^2 + 9b^2},$$

woraus

$$x = \frac{a}{16a^2 + 9b^2}\left(\tfrac{52}{3}a^2 \pm \tfrac{3}{2}b\sqrt{12a^2 + 49b^2}\right).$$

Der zum Bogen DTD_1 gehörige Winkel sei ψ, dann ist $b = -\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\psi$; durch Einsetzen wird mithin:

$$x = \frac{a}{9\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\psi + 64}\left(\tfrac{208}{3} \mp \tfrac{3}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\psi\sqrt{49\operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}\psi + 48}\right).$$

Da für den Punkt A wegen $\psi = \pi$, $x = \frac{13}{12}a$ ist, also $\frac{13}{12}a \leqq x \leqq \frac{14}{12}a$ und x mit abnehmendem ψ wächst, so ist nur das positive Vorzeichen zu brauchen.

Man schreibe x in der Form:

$$x = \frac{a}{9 + 64\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\psi}\left(\tfrac{208}{3}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi + \tfrac{3}{2}\sqrt{49 + 48\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi}\right)$$

und entwickle $\sqrt{49 + 48\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\psi}$ in eine Reihe:

$$\sqrt{49 + 48\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi} = 7\left(1 + \tfrac{48}{49}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi\right)^{\frac{1}{2}} = 7\left(1 + \tfrac{24}{49}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi \mp \cdots\right).$$

Daher wird

$$x = a \cdot \frac{\frac{208}{3}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\psi + \frac{21}{2}\left(1 + \frac{24}{49}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\psi \mp \cdots\right)}{9 + 64\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\psi}.$$

Nun ist

$$DT = m = \sqrt{(x - \tfrac{5}{6}a)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \tfrac{25}{36}a^2 - \tfrac{5}{3}ax} = \sqrt{\tfrac{37}{18}a^2 - \tfrac{5}{3}ax}.$$

Ersetzt man hierin x durch obigen Ausdruck, so geht m nach einigen Vereinfachungen über in:

$$m = \frac{a}{3}\sqrt{\frac{9 + \frac{468}{7}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\psi \pm \cdots}{9 + 64\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\psi}}$$

oder nach ausgeführter Division in:

$$m = \frac{a}{3}\left[1 + \tfrac{20}{63}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi \mp \cdots\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{3}\left[1 + \tfrac{10}{63}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\psi \mp \cdots\right].$$

Durch Einsetzung von $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi = \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{3}\left(\frac{\psi}{2}\right)^3 + \cdots$ erhält man weiter

$$m = \frac{a}{3}\left[1 + \tfrac{5}{126}\psi^2 \cdots\right].$$

Wird der zum Bogen DT gehörige Winkel mit φ bezeichnet, so ist $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{m}{2r}$ oder da $2r = \frac{a}{\sin\frac{1}{2}\psi}$: $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{m}{a}\sin\frac{1}{2}\psi$ und somit $\frac{\varphi}{2} = \arcsin\left(\frac{m}{a}\sin\frac{1}{2}\psi\right)$. Unter Anwendung der Reihenentwickelung für $\arcsin\left(\frac{m}{a}\sin\frac{1}{2}\psi\right)$ und Einsetzen des Wertes für m folgt:

$$\varphi = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{5}{126}\psi^2 \cdots\right]\left[\psi - \frac{\psi^3}{2^3 \cdot 3!} \pm \cdots\right] + \frac{1}{3^4}\left[1 \cdots\right]^3 \cdot \left[\frac{1}{2}\psi \mp \cdots\right]^3,$$

wo noch $\sin\frac{1}{2}\psi$ durch die Reihe ersetzt worden ist.

Nach ausgeführter Multiplikation ergibt sich:

$$\begin{aligned}\varphi &= \tfrac{1}{3}\psi + \frac{5}{63\cdot 2\cdot 3}\,\psi^3\cdots\\ &\qquad - \frac{1}{2^3\cdot 3^2}\,\psi^3\cdots\\ &\qquad + \frac{1}{2^3\cdot 3^4}\,\psi^3\cdots\\ \hline \varphi &= \tfrac{1}{3}\psi + \frac{1}{1134}\,\psi^3 \pm\cdots\end{aligned}$$

Die Konstruktion ist, wie unmittelbar ersichtlich, genau für $\psi = 0$ und $\psi = 180^0$. Zwischen diesen Werten finden Abweichungen statt. Der Fehler, der dadurch entsteht, daß der durch A und B gehende trisezierende Hyperbelast in der vorliegenden Konstruktion durch den durch diese Punkte gehenden Kreis ersetzt ist, wird durch nachfolgende Tabelle gegeben, in der δ den nach der ursprünglichen Formel

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\psi}{2}\sqrt{\tfrac{37}{18} - \tfrac{5}{3}\cdot\frac{1}{9\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\psi + 64}\left(\tfrac{208}{3} + \tfrac{3}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\psi\sqrt{49\operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}\psi + 48}\right)},$$

δ_1 den mittels des Gliedes $\frac{1}{1134}\psi^3$ berechneten Fehler bezeichnet.

ψ	20^0	30^0	40^0	50^0	
φ	$6^0 40'$	10^0	$13^0 20'$	$16^0 40'$	
δ	$7{,}776''$	$26''$	$1'$	$1'54''$	
δ_1	$7{,}737''$	$26{,}1''$	$1'1{,}5''$	$2'0{,}9''$	
ψ	60^0	70^0	80^0	90^0	
φ	20^0	$23^0 20'$	$26^0 40''$	30^0	
δ	$3'8''$	$4'50''$	$6'34''$	$9'10''$	
δ_1	$3'29''$	$5'13{,}5''$	$8'15''$	$11'45''$	
ψ	100^0	110^0	120^0	130^0	
φ	$33^0 20'$	$36^0 40''$	40^0	$43^0 20'$	
δ	$11'36''$	$14'16''$	$16'42''$	$18'8''$	
δ_1			$27'51''$		
ψ	136^0	138^0	140^0	142^0	
φ	$45^0 20'$	46^0	$46^0 40'$	$47^0 20'$	
δ	$19'14''$	$19'18''$	$19'24''$	$19'22''$	
δ_1					
ψ	146^0	150^0	160^0	170^0	176^0
φ	$48^0 40'$	50^0	$53^0 20'$	$56^0 40'$	$58^0 40'$
δ	$19'14''$	$18'46''$	$15'52''$	$10'$	$4'38''$
δ_1		$54'24''$			

Eine Vergleichung der Werte von δ_1 mit denen von δ läßt erkennen, daß das Glied $\frac{1}{1134}\psi^3$ den Fehler bis zu 30^0 angenähert wiedergibt. Ferner

zeigt die Tabelle, daß der Fehler erst bei $\psi = 40^0$ den Betrag einer Minute erreicht. Das Maximum der Abweichung des Winkels φ von $\frac{1}{3}\psi$ liegt bei 140^0 und beträgt $19'24''$.

Berlin, den 23. April 1906. stud. math. WERNER GAEDECKE.

Zu **34** (Bd. II, S. 213) (E. N. Barisien). — Le folium qui a pour équation en coordonnées rectangulaires

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2$$

a un périmètre équivalent à celui d'une ellipse de demi-axes de longueur a et $2a$.

Das Bogendifferential ds hat die Form: $ds = d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$, mithin für unsere Kurve $ds = d\varphi \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + 4a^2 \sin^2 2\varphi}$, woraus für den achten Teil des Umfangs:

$$\frac{s}{8} = \frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + 3\sin^2 2\varphi}\, d(2\varphi),$$

mithin für den ganzen Umfang: $s = 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + 3\sin^2 2\varphi}\, d(2\varphi)$. Andrerseits lautet die Parameterdarstellung der Ellipse, welche die Halbachsen a und $2a$ hat: $x = 2a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, also wird

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{4\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

oder $ds = a\sqrt{1 + 3\sin^2\varphi}\, d\varphi$. Für den Bogen der Ellipse wird daher $s = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2\varphi}\, d\varphi$. Nun ist leicht zu sehen, daß die beiden Bogenintegrale übereinstimmen; d. h. „die vorgelegte Kurve hat mit einer Ellipse mit den Halbachsen a und $2a$ gleichen Umfang."

Ich füge noch die Bemerkung hinzu, daß auch die Flächeninhalte der beiden Kurven untereinander in einfacher Beziehung stehen.

Bezeichnet nämlich F den Flächeninhalt der Kurve, so ist $dF = \frac{1}{2}r^2\, d\varphi$, mithin $F = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2\pi}{2}$. Der Inhalt unserer Ellipse ist $2a^2\pi$, d. h. „der Inhalt der vorgelegten Kurve ist gleich dem vierten Teil des Inhaltes einer Ellipse mit den Halbachsen a und $2a$."

Berlin. stud. math. WERNER GAEDECKE.

Zu **41** (Bd. II, 357) (E. Lampe). — Von der Spitze O einer Kardioide ziehe man den Radius OP nach einem beliebigen Punkte P derselben und beschreibe über OP als Durchmesser in der zur Ebene der Kurve senkrechten Ebene einen Kreis. Welches ist die Gleichung der krummen Oberfläche, die durch alle so konstruierten Kreise erzeugt wird? Welches ist das Volumen dieser Oberfläche?

Es sei (1) $r = f(\theta)$ die Gleichung einer Kurve in ebenen Polarkoordinaten r, θ mit dem Ursprung O, wo $f(\theta)$ eine stetige und eindeutige Funktion des Arguments bedeuten möge. Über jedem Radiusvektor r als Durchmesser errichten wir den Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der Koordinatenebene steht; diese Kreise bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine krumme Fläche, deren Gleichung wir zunächst aufstellen wollen. Ist Q ein variabler Punkt dieser Oberfläche und schließt $OQ = \varrho$ mit der Koordinatenebene den Winkel ω ein, so ist bekanntlich (2) $\varrho = r \cdot \cos\omega$. Daher ist die Gleichung der Oberfläche (3) $\varrho = f(\theta) \cdot \cos\omega$ in räumlichen Polarkoordinaten ϱ, θ, ω. Wenn die ursprüngliche Ebene die xy-Ebene war, so ist der Übergang zu rechtwinkligen Koordinaten gegeben durch die Gleichungen

$$x = \varrho\cos\omega\cos\theta, \quad y = \varrho\cos\omega\sin\theta, \quad z = \varrho\sin\omega.$$

Die Kurve (1) möge die Grundkurve und die erwähnten Kreise die erzeugenden Kreise der Fläche (3) genannt werden.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Oberfläche Ω und das Volumen V der Fläche (3) zu berechnen.

Nimmt man auf der Grundkurve (1) zwei unendlich benachbarte Punkte P und P' an, so ist $PP' = ds$ ein Bogenelement von (1), und die beiden Radienvektoren $OP = r$ und $OP' = r + dr$ bilden mit einander den infinitesimalen Winkel $d\theta$; denselben Winkel $d\theta$ schließen auch die Ebenen der beiden durch OP und OP' gehenden erzeugenden Kreise ein, welche auf der Fläche (3) ein unendlich schmales sichelförmiges Oberflächenelement $d\Omega$ und ein unendlich dünnes keilförmiges Volumelement dV begrenzen. Legt man jetzt durch die drei Punkte O, P und P' in der xy-Ebene den Kreis (1_1) $r = 2c\cos(\theta - \gamma)$, dessen Mittelpunkt die Polarkoordinaten c, γ hat, und betrachtet diesen Kreis als Grundkurve, so ist die erzeugte Fläche die Kugel (3_1) $\varrho = 2c\cos(\theta - \gamma)\cos\omega$ oder $x^2 + y^2 + z^2 = 2c(x\cos\gamma + y\sin\gamma)$, auf welcher die beiden durch OP und OP' gelegten erzeugenden Kreise das Oberflächenelement $d\Omega_1$ und das Volumelement dV_1 begrenzen. Diese Kugel (3_1) berührt die Fläche (3) längs des durch OP gelegten erzeugenden Kreises. PP' als Bogenelement des Kreises (1_1) möge mit ds_1 bezeichnet werden. Dann ist bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung nicht nur $ds = ds_1$, sondern auch (4) $d\Omega = d\Omega_1$, $dV = dV_1$. Ist nun Ω_1 der sichelförmige Ausschnitt der Kugeloberfläche (3_1), der begrenzt ist von den erzeugenden Kreisen $\theta = \gamma$ und $\theta = \theta$, so ist bekanntlich $\Omega_1 = 2c^2\pi\sin(\theta - \gamma)$, daher $d\Omega_1 = 2c^2\pi\cos(\theta - \gamma)\,d\theta$, oder einfach, weil nach (1_1) $2c\cos(\theta - \gamma) = r$ und $2c\,d\theta = ds_1 = ds$ ist, $d\Omega_1 = \frac{\pi}{2} \cdot r\,ds$, also nach (4)

$$d\Omega = \tfrac{1}{2}\pi r\,ds. \tag{5}$$

Ist andrerseits V_1 der keilförmige Ausschnitt des Kugelvolumens (3_1), begrenzt von den erzeugenden Kreisen $\theta = \gamma$ und $\theta = \theta$, so ist, wie bekannt,

$V_1 = \pi c^3 \sin(\theta - \gamma)[1 - \frac{1}{3}\sin^2(\theta - \gamma)]$, daher $dV_1 = \pi c^3 \cos^3(\theta - \gamma)\,d\theta$, und nach (1_1) $dV_1 = \frac{1}{8}\pi r^3 d\theta$, demnach wegen (4)

$$dV = \frac{1}{8}\pi r^3 d\theta. \tag{6}$$

(Vgl. die Bemerkung des Herrn E. Lampe zu der von Herrn W. Stegemann gegebenen Lösung Band VII, 173.)

Die Formeln (5) und (6), in denen nur die Koordinaten r und θ der Grundkurve (1) vorkommen, können leicht integriert werden. Ist etwa θ die Unabhängige, so seien die Grenzen θ_0 und θ_1, dann ist unmittelbar

$$(7)\quad \Omega = \frac{\pi}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r \cdot \frac{ds}{d\theta} \cdot d\theta, \qquad (8)\quad V = \frac{\pi}{8}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^3 \cdot d\theta.$$

Diese Formeln lassen sich auch aus den gewöhnlichen Doppelintegralen herleiten, welche für die Oberfläche und das Volumen der Fläche (3) aufgestellt werden können.

Beispiele: A) Die Grundkurve sei die Kardioide $r = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$. Hier ist $ds = 2a\cos\frac{\theta}{2} \cdot d\theta$; daher wird $d\Omega = 2\pi a^2 \cos^3\frac{\theta}{2} \cdot d\theta$, $dV = \pi a^3 \cos^6\frac{\theta}{2} \cdot d\theta$ das Oberflächen- bez. Volumelement des Körpers $\varrho = 2a\cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \cos\omega$.

Integriert man von $\theta = 0$ bis $\theta = \pi$, so erhält man als halbe Oberfläche bez. halbes Volumen:

$$\Omega = 2\pi a^2 \int_0^\pi \cos^3\frac{\theta}{2} \cdot d\theta = \frac{8}{3}\pi a^2,$$

$$V = \pi a^3 \int_0^\pi \cos^6\frac{\theta}{2} \cdot d\theta = \frac{5}{16}\pi^2 a^3.$$

B) Die Lemniskate $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ als Grundkurve liefert $ds = \frac{a\,d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$. Für die betreffende Fläche hat man $d\Omega = \frac{1}{2}\pi a^2 d\theta$, $dV = \frac{1}{8}\pi a^3 \cos^{\frac{3}{2}} 2\theta \cdot d\theta$. Durch Integration von $\theta = 0$ bis $\theta = \frac{\pi}{4}$ findet man als vierten Teil der Gesamtoberfläche $\Omega = \frac{1}{8}\pi^2 a^2$, während der vierte Teil des Gesamtvolumens

$$V = \frac{1}{8}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{\frac{3}{2}} 2\theta \cdot d\theta$$

ist. Nun ist identisch:

$$d(\sin 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}) = \left(3\cos^{\frac{3}{2}} 2\theta - \frac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right) \cdot d\theta,$$

daher umgekehrt:

$$\int \cos^{\frac{3}{2}} 2\theta \cdot d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + \frac{1}{3}\sin 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}$$

und durch Einführung der Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$V = \tfrac{1}{24}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$

Substituiert man noch $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\varphi$, so wird:

$$V = \frac{1}{24\sqrt{2}}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{24\sqrt{2}}\pi a^3 \cdot F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

welches also den vierten Teil des Gesamtvolumens darstellt.

C) Zum Schluß wollen wir noch die $2n$-blättrige Rosette, die in Polarkoordinaten durch die Gleichung $r^2 = a^2\cos^2 n\theta$ gegeben ist, zur Grundkurve wählen. Beschränken wir uns auf ein Blatt, indem wir etwa θ zwischen den Grenzen $\pm\frac{\pi}{2n}$ nehmen, so ist

$$r = a\cos n\theta, \quad ds = a\sqrt{\cos^2 n\theta + n^2\sin^2 n\theta} \cdot d\theta,$$

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} \cos n\theta \sqrt{\cos^2 n\theta + n^2\sin^2 n\theta} \cdot d\theta,$$

$$V = \tfrac{1}{8}\pi a^3 \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{+\frac{\pi}{2n}} \cos^3 n\theta \cdot d\theta.$$

Halbieren wir das Integrationsintervall und multiplizieren wir dafür das Integral mit 2, so kommt, wenn man noch $\theta = \frac{\varphi}{n}$ einführt,

$$\Omega = \frac{\pi a^2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sqrt{\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi} \cdot d\varphi,$$

$$V = \frac{\pi a^3}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \cdot d\varphi = \frac{\pi a^3}{6n}.$$

In Ω setzen wir $\sin\varphi = x$ und erhalten dann:

$$\Omega = \frac{\pi a^2}{n} \int_0^1 \sqrt{1 + (n^2 - 1)x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}\left[1 + \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}} \log\left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right)\right].$$

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

Zu **125** (Bd. IX, S. 91) (E. Jahnke). — Mit Benutzung der Graßmannschen Methoden läßt sich jede Gerade (als gebundener Vektor aufgefaßt) durch die Kanten des Bezugstetraeders $E_1 E_2 E_3 E_4$ darstellen, wobei die Koeffizienten die bekannte Plückersche Bedingung erfüllen. Sind also

$$P_2 = \pi_{21} E_1 + \pi_{22} E_2 + \pi_{23} E_3 + \pi_{24} E_4, \quad \Sigma \pi_{2i} = 1,$$
$$P_3 = \pi_{31} E_1 + \pi_{32} E_2 + \pi_{33} E_3 + \pi_{34} E_4, \quad \Sigma \pi_{3i} = 1$$

zwei beliebige Punkte, so stellt das äußere Produkt

$$[P_2 P_3] = a_{11}[E_2 E_3] + a_{12}[E_3 E_1] + \cdots + a_{16}[E_3 E_4]$$

eine beliebige Gerade (gebundenen Vektor) dar. Dabei bedeuten die a_{1i} die sechs Unterdeterminanten der Matrix $\left\| \begin{matrix} \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} \end{matrix} \right\|$. Ebenso bilde ich die äußeren Produkte $[P_3 P_1], \ldots [P_3 P_4]$ und erhalte die vektoriellen Darstellungen der Kanten des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$. Löse ich diese Gleichungen nach den Kanten des Bezugstetraeders auf und nenne α_{ik} die zu a_{ik} gehörigen Unterdeterminanten, so ist z. B.

$$|a_{ik}|[E_2 E_3] = \alpha_{11}[P_2 P_3] + \alpha_{12}[P_3 P_1] + \cdots + \alpha_{16}[P_3 P_4].$$

Da nun die rechte Seite eine Gerade darstellen soll, muß sein

$$\alpha_{i1}\alpha_{i4} + \alpha_{i2}\alpha_{i5} + \alpha_{i3}\alpha_{i6} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

Berlin. E. Jahnke.

Zu **130** (Bd. IX, 303) (A. Krug). — *Es soll die Anzahl der Schnittpunkte der Diagonalen eines konvexen n-Ecks im Innern und außerhalb des n-Ecks bestimmt werden.*

1. Zunächst mögen alle Schnittpunkte als voneinander verschieden angenommen werden. Wir betrachten die von einer Ecke, etwa A_1, des Polygons $A_1 \ldots A_n$ ausgehenden $n-3$ Diagonalen. Dann findet man leicht, daß die Diagonale $A_1 A_\nu$ gerade $(\nu - 2)(n - \nu)$ Schnittpunkte innerhalb des n-Ecks enthält. Z. B. liegen auf $A_1 A_5$ $3(n-5)$ Schnittpunkte. Von den $3(n-3)$ Diagonalen, die von den Ecken A_2, A_3 und A_4 ausgehen, kommen nämlich in Abgang: aus der Ecke A_2 die Diagonalen $A_2 A_4$ und $A_2 A_5$, von $A_3 : A_3 A_1$ und $A_3 A_5$, von A_4: $A_4 A_2$ und $A_4 A_5$; und so liefern allgemein *die* $(\nu - 2)(\nu - 3)$ Diagonalen $A_r A_s$, für die $r < s \leqq \nu$ ist, *keine* zu zählenden Schnittpunkte. Die Anzahl S aller Schnittpunkte, die auf den $n-3$ von A_1 ausgehenden Diagonalen liegen, ist demnach:

$$(1) \qquad \begin{cases} S = 1 \cdot (n-3) + 2 \cdot (n-4) + \cdots + (n-3) \cdot 1. \\ \quad = \sum_{\nu=1}^{n-3} \nu (n - 2 - \nu). \end{cases}$$

Diese Summe zerlegen wir in zwei: $S = S_1 - S_2$, wo:

$$(2) \qquad S_1 = 1 \cdot n + 2 \cdot n + \cdots + (n-3) n,$$

$$(3) \qquad S_2 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + (n-3)(n-1)$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{n-3} \lambda(\lambda + 2) = \sum_{\lambda=1}^{n-3} \lambda^2 + 2 \sum_{\lambda=1}^{n-3} \lambda.$$

Nach bekannten Sätzen der Kombinatorik wird:

$$(4)\quad S_1 = n\,\frac{(n-3)(n-2)}{2}$$

$$(5)\quad S_2 = \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} + 2\,\frac{(n-3)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n-3)(2n+1)}{6},$$

also

$$(6)\qquad S = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3}.$$

Wenn wir nun S mit n, der Anzahl der Ecken, multiplizieren, so erhalten wir das *Vierfache* der Anzahl der Schnittpunkte, denn z. B. wird der Schnittpunkt der Diagonale A_1A_5 und A_2A_4 bei den vier Punkten A_1, A_2, A_4, A_5 jedesmal neu gezählt. Also ist $\frac{n}{4}S = \binom{n}{4}$ die Anzahl der im Innern des n-Ecks liegenden Diagonalschnittpunkte.

2. Es können mehrere Schnittpunkte in einen einzigen zusammenfallen. Gehen durch einen Schnittpunkt k Diagonalen, so ist er $\binom{k}{2}$ mal zu zählen, weil sich ja „im allgemeinen Falle", der bei der Abzählung im § 1 zugrunde gelegt wurde, k Gerade $\binom{k}{2}$ mal zu je zweien schneiden.

3. Nunmehr wollen wir feststellen, wie groß die Anzahl der *außerhalb* des n-Ecks gelegenen Diagonalschnittpunkte ist. Diese ist offenbar gleich der Zahl *aller* Schnittpunkte, vermindert um die Anzahl der Schnittpunkte im Innern *und* um die der Eckpunkte; es fragt sich nun, wievielfach jeder Eckpunkt A_ν des n-Ecks zu rechnen ist. Es schneiden sich $n-3$ Diagonalen in ihm, also ist *jeder* Eckpunkt $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ mal zu zu zählen. Die Anzahl *aller* Schnittpunkte der $\frac{n}{2}(n-3)$ Diagonalen aber ist

$$\frac{n^2}{8}(n-3)^2 - \frac{n}{4}(n-3),$$

folglich ist die Anzahl $\mathfrak{S}$ der außerhalb liegenden Schnittpunkte

$$(7)\qquad \mathfrak{S} = \frac{n^2}{8}(n-3)^2 - \frac{n}{4}(n-3) - \binom{n}{4} - n\,\frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

Eine leicht zu verifizierende Rechnung ergibt:

$$\mathfrak{S} = \tfrac{1}{24}\{2n^4 - 24n^3 + 114n^2 - 120n\}$$

oder

$$(8)\qquad \mathfrak{S} = \frac{n}{2}\binom{n-3}{3}.$$

Potsdam, den 19. August 1905. Otto Meissner.

Zu den Ausführungen des Herrn O. Meißner möchte ich mir zwei kurze Bemerkungen gestatten:

Nach Formel (1) könnte, wie folgt, fortgesetzt werden:

$$= (n-2)\sum_{\nu=1}^{n-3}\nu - \sum_{\nu=1}^{n-3}\nu^2,$$

nach bekannten Formeln für $\sum \nu$ und $\sum \nu^2$

$$= (n-2)\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)(2n-5)}{6} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6},$$

womit gleich die Formel (6) gewonnen ist.

Die Anzahl der im Innern gelegenen Diagonalschnittpunkte läßt sich unmittelbar angeben, wenn man bedenkt, daß je vier Eckpunkte *einen* und *nur einen* im Innern gelegenen Diagonalschnittpunkt des konvexen n-Eckes bestimmen. Ihre Anzahl ist also gleich der Anzahl der Kombinationen von n Elementen (den n Ecken) der vierten Klasse ohne Wiederholung $= \binom{n}{4}$.

Aussig, Böhmen. A. Krug.

Zu **132** (Bd. IX, 303) (M. Peche). — Erste Lösung: Der Mittelpunkt des Grundkreises der Kreisevolvente sei M; die Normale PN berühre den Grundkreis in Q; durch Q lege man die zu NT senkrechte Gerade, die NT in P' trifft, und von M aus fälle man auf QP' das Lot MQ'; außerdem setze man $MQ = r$, $MQ' = r'$. Dann sind die Dreiecke PNT, $P'NQ$, $Q'QM$ ähnlich; daher hat man

$$\frac{QQ'}{NP} = \frac{MQ'}{TP}, \qquad \frac{QP'}{QN} = \frac{MQ'}{MQ};$$

mithin, da $TP = MQ$ ist,

$$\frac{QQ' + QP'}{NP + QN} = \frac{MQ'}{MQ} \quad \text{oder} \quad \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{MQ'}{MQ} = \frac{r'}{r}.$$

Weil $\sphericalangle P'Q'M = PQM = 90^0$, so ist $\triangle P'Q'M \sim PQM$, und weil QP Tangente des Kreises (M, r) und P ein Punkt der Evolvente dieses Kreises ist, so ist auch $Q'P'$ Tangente für den Kreis (M, r') und P' ein Punkt der zugehörigen Evolvente, und da außerdem noch $\sphericalangle Q'P'T = 90^0$ ist, so ist die Gerade $P'T$ oder NT Tangente dieser Evolvente. Letztere wird also von der Geraden NP eingehüllt. Der Radius r' ihres Grundkreises ist gleich der Projektion von PT auf NT; denn wenn man von P aus auf NT das Lot PR fällt, so ist $\triangle QQ'M \cong PRT$, mithin $MQ' = RT$.

Prenzlau. W. Stegemann.

Zweite Lösung. — O sei der Mittelpunkt des Grundkreises mit dem Radius r und P ein Punkt der Kreisevolvente, welche ihre Spitze in S auf der Peripherie des Kreises hat. Durch P ziehen wir die Normale, welche den Grundkreis in M tangiert, und die Tangente, auf welcher wir $PT = MO$ abtragen. Der Winkel MOS sei α; folglich ist $PM = TO = r\alpha$, d. i. die Entfernung der Tangente vom festen Kreismittelpunkte. Bewegt sich nun der Punkt M auf der Kreisperipherie um den Zentriwinkel $\Delta\alpha$ weiter, so erleidet gleichzeitig die in P an die Kreisevolvente gelegte Tangente, da sie mit dem Radius OM stets parallel ist, eine Richtungsverschiebung um $\Delta\alpha$ und eine Entfernungsvergrößerung von O um $r\Delta\alpha$. — Wir können umgekehrt auch behaupten: „Wenn sich eine Gerade PT in der Ebene so bewegt, daß jeder Richtungsänderung um den Winkel $\Delta\alpha$ eine Entfernungsvergrößerung von einem festen Punkte O um

$r\Delta\alpha$ entspricht, wobei r ein konstanter Proportionalitätsfaktor ist, so umhüllt diese Gerade eine Kreisevolvente, deren Grundkreis O zum Mittelpunkt und r zum Radius hat."

Wenn wir nun auf der Geraden MP das konstante Stück PN abtragen und den Punkt N mit T verbinden, so läßt sich auf die Gerade TN der eben aufgestellte Satz anwenden. Nämlich: Das rechtwinkelige Dreieck TPN bleibt bei seinem Fortrücken mit sich selbst kongruent. Jeder Richtungsänderung von PT um $\Delta\alpha$ entspricht dieselbe Änderung bei TN. Die Entfernung der Geraden TN von O ist gleich der Höhe des Parallelogramms $TNN'O$, dessen Grundlinie TN parallel mit ON' ist. Dieses Parallelogramm ist flächengleich mit dem Rechtecke $OTPM = r \cdot r\alpha$. Daher ist jene Höhe $= \frac{r^2}{TN} \cdot \alpha$, und die Entfernungsänderung der Geraden TN von O bei der Drehung um den Winkel $\Delta\alpha$ beträgt $\frac{r^2}{TN} \cdot \Delta\alpha$. Daher hüllt die Gerade TN eine Kreisevolvente ein, deren Grundkreis O zum Mittelpunkt und $\frac{r^2}{TN}$ zum Radius hat. — Zieht man in dem rechtwinkligen Dreiecke TPN die Hypotenusenhöhe PR, so folgt aus der Proportion $TR:PT = PT:TN$, daß $\frac{r^2}{TN} = TR$ ist. — Die Spitze S' der neuen Kreisevolvente liegt so, daß $\sphericalangle SOS' = \sphericalangle PTN$.

Aussig, Böhmen. stud. math. Josef Krug.

Zu **133** (Bd. IX, 377) (E. Jahnke). — Ist O der Mittelpunkt des Inkreises, so ist im Teildreiecke BCO die Seite $BC = a$ Sehne des Umkreises und der dazugehörige Peripheriewinkel $= \pi - \frac{\beta + \gamma}{2}$, daher

$$a = 2r_a \cos\frac{\alpha}{2}, \text{ also } r_a = \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

wenn r_a der Umkreisradius von BCO ist, und entsprechend r_b, r_c, woraus die angegebene Proportion folgt:

$$r_a : r_b : r_c = a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} : b\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2} : c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Andrerseits ist aber auch a Sehne des zu ABC gehörigen Umkreises, dessen Radius R sei, daher bekanntlich $a = 2R\sin\alpha$, demnach $r_a = 2R\sin\frac{1}{2}\alpha$, und hieraus ergibt sich $r_a : r_b : r_c = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}$.

Ähnliche Formeln lassen sich auch für die Umkreisradien jener Teildreiecke aufstellen, die ihre Spitzen in den Zentren der angeschriebenen Kreise haben.

Aussig, Böhmen. A. Krug.

Gleiche Lösungen sind auch von den Herren R. Güntsche, H. Wieleitner, stud. math. Baruch (Berlin) und F. A. Müller (Aschaffenburg) eingelaufen. Red.

Die Aufgabe war als Übung zu den Graßmannschen Methoden gedacht; eine vektorielle Lösung wäre erwünscht. E. Jahnke.

Zu **134** (Bd. IX, 377) (E. Cesàro). — Die Liouvillesche Formel für die geodätische Krümmung lautet (Enc. d. math. Wiss. III D 3, Nr. 12):

$$(1)\qquad \frac{1}{R} = -\frac{di}{ds} + \frac{\cos i}{K_2} + \frac{\sin i}{K_1}.$$

Hierbei bedeuten K_1 und K_2 die geodätischen Krümmungshalbmesser der rechtwinkligen Parameterkurven und i den Winkel zwischen der Flächenkurve und derjenigen Parameterkurve, zu der K_2 gehört. Bei einer Rotationsfläche ist für die Meridiane als die eine Schar der Parameterkurven $1/K_2 = 0$ zu setzen. Da für die Loxodrome i konstant ist, so folgt:

$$(2)\qquad \frac{1}{R} = \frac{\sin i}{K_1}.$$

Der geodätische Krümmungsradius K_1 des Parallelkreises einer Rotationsfläche ist gleich dem Abschnitt der zugehörigen Meridiantangente, der zwischen Kurvenpunkt und Achse liegt. Nun ist für die Evolute einer Ribaucourschen Kurve der zwischen Kurvenpunkt und Direktrix gelegene Abschnitt der Tangente proportional dem Krümmungsradius ϱ der Ribaucourschen Kurve; denn letztere ist eben dadurch definiert, daß der Abschnitt ihrer Normale, der zwischen Kurvenpunkt und Direktrix liegt, proportional ϱ ist. Wir können daher $K_1 = n\varrho$ setzen, sodaß

$$(3)\qquad \frac{1}{R} = \frac{\sin i}{n\varrho}$$

ist.

Nun ist das Linienelement ds' der Evolute $= d\varrho$. Ferner ist, da $i = \sphericalangle(ds, ds')$ ist, $ds \cdot \cos i = ds' = d\varrho$. Man hat also (bei geeigneter Wahl des Anfangspunktes von s) $\varrho = s \cdot \cos i$, und endlich

$$(4)\qquad R = n \cdot \operatorname{cotg} i \cdot s.$$

Stuttgart, 16. November 1905. E. Rath.

Zu **135** (Bd. X, S. 97) (E. Jahnke). — Erster Beweis: Vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 einer Ebene sind durch die Relation

$$[A_2A_3A_4]A_1 - [A_3A_4A_1]A_2 + [A_4A_1A_2]A_3 - [A_1A_2A_3]A_4 = 0$$

verknüpft, wobei $[A_2A_3A_4] - [A_3A_4A_1] + [A_4A_1A_2] - [A_1A_2A_3] = 0$ ist (vgl. Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung, Nr. 24). Nun ist $[A_iA_kA_l]$ gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks $A_iA_kA_l$, also gleich $a_{ik} \cdot a_{kl} \cdot \sin\alpha_k$, wobei a_{ik} den Abstand A_iA_k und α_k den Winkel bei A_k bedeutet. Liegen die 4 Punkte auf einem Kreise, so gilt außerdem

$$\frac{\sin\alpha_1}{a_{24}} = \frac{\sin\alpha_2}{a_{31}} = \frac{\sin\alpha_3}{a_{42}} = \frac{\sin\alpha_4}{a_{13}}.$$

Die erste Gleichung nimmt daher die Form an:

$$a_{23}a_{34}a_{24} \cdot A_1 - a_{34}a_{41}a_{31} \cdot A_2 + a_{41}a_{12}a_{42} \cdot A_3 + a_{12}a_{23}a_{13} \cdot A_4 = 0,$$

wobei die Summe der Koeffizienten der vier Punkte gleich Null ist.

Stuttgart. E. Rath.

Zweiter Beweis: Sei $A_1A_2A_3A_4$ ein beliebiges Viereck ohne einspringende Winkel und A der Schnittpunkt der beiden Diagonalen A_1A_3 und A_2A_4. Setzen wir die (positiv gerechneten) Flächen der vier Dreiecke $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ und $A_1A_2A_3$ bezüglich gleich f_1, f_2, f_3 und f_4, so ist selbstverständlich

$$f_1 + f_3 = f_2 + f_4$$

oder

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 = 0. \tag{1}$$

Lassen wir bei horizontal liegendem Viereck in A_1 und A_3 parallele und vertikal nach *abwärts* gerichtete Kräfte von der Größe f_1, beziehungsweise f_3 angreifen, so ist bekanntlich ihre Resultierende $= f_1 + f_3$ ebenfalls vertikal nach abwärts gerichtet und greift in A an; greifen aber andrerseits in A_2 und A_4 parallele und vertikal nach *aufwärts* gerichtete Kräfte von der Größe f_2, beziehungsweise f_4 an, so ist ebenso deren Resultierende $= f_2 + f_4$ vertikal nach aufwärts gerichtet und greift auch in A an. Daher stehen die vier Kräfte f_1, f_2, f_3, f_4 im Gleichgewichte, was man im Sinne des baryzentrischen Kalkuls schreibt:

$$f_1 \cdot A_1 - f_2 \cdot A_2 + f_3 \cdot A_3 - f_4 \cdot A_4 = 0. \tag{2}$$

Ist das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ speziell ein Sehnenviereck, so haben die vier Dreiecke $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ und $A_1A_2A_3$ ein und denselben Umkreis vom Radius r; multipliziert man (1) und (2) gliedweise mit $4r$, so kann man jede Größe $4rf_i$ durch das Produkt der drei entsprechenden Dreiecksseiten ersetzen.

Aussig, Böhmen. Stud. math. Jos. Krug.

Zu **138** (Bd. X, S. 98) (O. Gutsche). — Die Seiten des größten der Kardioide $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ einbeschriebenen Rechteckes sind jedenfalls parallel zu den Koordinatenachsen. Sind P_i die vier Eckpunkte ($i = 1, 2, 3, 4$) mit den Koordinaten x_i, y_i oder r_i, φ_i, und sind P_1 und P_2 die zwei Eckpunkte, deren Ordinaten $y_1 = y_2$ positiv und deren Abszissen $x_1 > x_2$ sind, so ist die Fläche des Rechteckes

$$F = (r_1 \cos\varphi_1 - r_2 \cos\varphi_2)(r_1 \sin\varphi_1 + r_2 \sin\varphi_2) \tag{1}$$

zu einem Maximum zu machen, während die vier Variabeln r_1, φ_1, r_2, φ_2 den Gleichungen

$$r_1 = 2a(1 + \cos\varphi_1), \quad r_2 = 2a(1 + \cos\varphi_2), \quad r_1 \sin\varphi_1 = r_2 \sin\varphi_2 \tag{2}$$

genügen. Die Variabeln φ_1 und φ_2 lassen sich leicht fortschaffen, denn

$$\cos\varphi_i = \frac{r_i - 2a}{2a}, \quad \sin\varphi_i = \frac{\sqrt{r_i(4a - r_i)}}{2a}.$$

Statt (1) und (2) bekommt man also:

$$4a^2F = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2 - a)\left(r_1\sqrt{r_1(4a - r_1)} + r_2\sqrt{r_2(4a - r_2)}\right) \tag{1'}$$

$$r_1^3 + r_1^2r_2 + r_1r_2^2 + r_2^3 - 4a(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) = 0. \tag{2'}$$

Jetzt führt man statt r_1 und r_2 die beiden neuen Variabeln

$$s = r_1 + r_2, \quad t = r_1r_2 \tag{3}$$

ein, dann erhält man statt (2′)

$$s^3 - 4as^2 - 2st + 4at = 0$$

oder

$$(2'') \qquad t = \frac{s^3 - 4as^2}{2s - 4a}.$$

Aus (3) folgt aber wegen $r_1 > r_2$

$$r_1 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4t}}{2}, \quad r_2 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4t}}{2}$$

und mit Rücksicht auf (2″)

$$r_1 = \frac{s(\sqrt{s - 2a} + \sqrt{6a - s})}{2\sqrt{s - 2a}}, \quad r_2 = \frac{s(\sqrt{s - 2a} - \sqrt{6a - s})}{2\sqrt{s - 2a}}.$$

Setzt man diese Werte für r_1 und r_2 in (1′) ein, so kommt nach einer kurzen Zwischenrechnung:

$$(1'') \qquad 4a^2F = s^{\frac{5}{2}}(6a - s)^{\frac{1}{2}}(s - 4a)^{\frac{3}{2}}(s - 2a)^{-\frac{1}{2}},$$

also ist die Fläche des Rechtecks durch die einzige Variable $s = r_1 + r_2$ ausgedrückt. Für das Maximum von F hat man bekanntlich $dF = 0$. Mithin ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{5}{s} - \frac{1}{6a - s} + \frac{3}{s - 4a} - \frac{1}{s - 2a} = 0$$

oder

$$s^3 - 10as^2 + 30a^2s - 30a^3 = 0.$$

Die einzige reelle Wurzel dieser Gleichung berechnet man mit Hilfe der Cardanischen Formel und findet $s = \frac{a}{3}(10 + \sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{10})$.

Aussig, Böhmen. Stud. math. Jos. Krug.

Zu **139** (Bd. X, S. 98) (O. Meißner). — Auf ein horizontal liegendes, ebenes, aus rechteckigen Maschen mit den Seitenlängen a und b bestehendes Gitterwerk wird eine Nadel von der Länge c geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie auf dem Gitterwerk liegen bleibt?

Unter den angegebenen vereinfachenden Voraussetzungen ergibt sich, wenn $a > b > c$ ist, für die verlangte Wahrscheinlichkeit

$$w = \frac{c^2}{2ab\pi};$$

in allen andern Fällen gestaltet sich das Resultat viel verwickelter; z. B. wenn $a > c > b$ und gleichzeitig $c < 2b$ ist, dann ist

$$w = \frac{4bc - 2b^2 - c^2 + 4a\sqrt{c^2 - b^2} - 4ab \arccos\frac{b}{c}}{2ab\pi},$$

ist aber $a > c > b$ und gleichzeitig $c > 2b$, dann ist

$$w = \frac{b^2 + 2a(\sqrt{c^2 - b^2} - \sqrt{c^2 - 4b^2}) - 2ab\left(\arccos\frac{b}{c} - 2\arccos\frac{2b}{c}\right)}{ab\pi}.$$

In den übrigen Fällen, in denen $c > a$ ist, gestalten sich die Endformeln meist noch etwas länger. Die Herleitung dieser Formeln erfordert zwar einige Geduld bezüglich der erschöpfenden Aufsuchung der günstigen Fälle, bietet jedoch keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

Zusatz des Aufgabestellers: Für $a > b > c$ findet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit direkt bei Czuber, „Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte"; Leipzig 1884, auf S. 93; jedoch nur infolge eines Versehens des Verfassers. Nachdem er nämlich mit $q_{1,2}$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet hat, daß die Nadel überhaupt zwei Gitterlinien trifft, berechnet er die Wahrscheinlichkeit, daß der Mittelpunkt der Nadel dabei zwischen die beiden Treffpunkte fällt, d. h. die in meiner Aufgabe verlangte Wahrscheinlichkeit.

Gleich 1 wird die Wahrscheinlichkeit erst, wenn $c > 2\sqrt{a^2+b^2}$, nicht schon im Falle $\sqrt{a^2+b^2} < c < 2\sqrt{a^2+b^2}$.

Potsdam, 6. April 1906. Otto Meissner.

Zu **143** (Bd. X, S. 197) (J. Krug). — Es soll die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur $r$ten Klasse ohne Wiederholungen, wobei keine Komplexion zwei benachbarte Elemente enthalten darf, ermittelt werden.

Man bezeichne die Elemente durch die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ und die Anzahl derjenigen hier in Betracht kommenden Kombinationen zur $r$ten Klasse, die mit 1 beginnen, durch z_r. Ist zunächst $r = 2$, so hat man, mit 1 beginnend, die Amben $13, 14, 15, \ldots 1(n-1)$; es ist also $z_2 = n-3$. Geht man zu den Ternen über, und bezeichnet man jede Terne, die mit 1 beginnt und mit k endigt, durch III_k, so beginnt die Reihe der Ternen mit III_5 und schließt mit III_{n-1}. Es gibt nur eine Terne III_5, nämlich 135, zwei Ternen III_6, nämlich 136, 146, drei Ternen III_7, nämlich 137, 147, 157 usw. Die Ternengruppe III_{n-1} umfaßt die Ternen $13(n-1)$, $14(n-1) \ldots 1(n-3)(n-1)$; ihre Anzahl ist $n-5$. Demnach ist

$$z_3 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-5) = \frac{(n-5)(n-4)}{1\cdot 2} = F_{n-5}^{(2)},$$

wenn $F_q^{(p)}$ die $q$te figurierte Zahl $p$ter Ordnung bezeichnet. Die Reihe der Quaternen beginnt mit IV_7 und endigt mit IV_{n-1}. Es gibt nur eine Quaterne IV_7; sie wird aus der Terne III_5 gebildet. Die Quaternen der Gruppe IV_8 werden aus den Ternen III_5 und III_6 gebildet; ihre Anzahl ist $1 + 2 = 3$. Die Quaternen der Gruppe IV_9 entstehen aus den Ternen III_5, III_6, III_7, und es sind ihrer $1 + 2 + 3 = 6$. In gleicher Weise geht es weiter, und man findet

$$z_4 = 1 + 3 + 6 + \cdots + F_{n-7}^{(2)} = F_{n-7}^{(3)};$$

$$z_5 = 1 + 4 + 10 + \cdots + F_{n-9}^{(3)} = F_{n-9}^{(4)};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_r = 1 + F_2^{(r-2)} + F_3^{(r-2)} + \cdots + F_{n-2r+1}^{(r-2)} = F_{n-2r+1}^{(r-1)}$$

$$= \frac{(n-2r+1)(n-2r+2)\cdots(n-r-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)} = \binom{n-r-1}{r-1}.$$

Aus diesen z_r Formen erhält man durch zyklische Vertauschung der n Elemente $n z_r$ Formen, von denen jedoch immer je r Formen in eine zusammenfallen. Es ergibt sich also

$$K_r'^n = \frac{n}{r}\binom{n-r-1}{r-1}.$$

Diese Zahl gibt an, wieviele verschiedene konvexe nicht sternförmige r-Ecke sich einem konvexen n-Eck so einbeschreiben lassen, daß die Seiten des r-Ecks zugleich Diagonalen des n-Ecks sind.

Prenzlau. W. STEGEMANN.

Zu **144** (Bd. X, S. 197) (E. Cesàro). — Die geodätische Krümmung $1/R$ einer Flächenkurve läßt sich nach Liouville (Enc. d. math. Wiss. III D 3, Nr. 12) mit Hilfe der geodätischen Krümmungen $1/K_1$ und $1/K_2$ der rechtwinkligen Parameterkurven $v =$ const. und $u =$ const. ausdrücken:

$$\frac{1}{R} = -\frac{di}{ds} + \frac{\sin i}{K_1} + \frac{\cos i}{K_2}.$$

i ist der Winkel zwischen der Flächenkurve und der Kurve $u =$ const. Wählt man auf der Rotationsfläche die Meridiane als die Kurven $v =$ const., so ist für sie $1/K_1 = 0$, während für die Parallelkreise $K_2 = r/\sin\varphi$ ist, wobei r der Halbmesser des Parallelkreises und φ der Winkel zwischen Achse und Meridiantangente ist. Ist S der Schnittpunkt der zum Punkt M gehörigen Meridiantangente mit der Achse, so ist $SM = K_2$. Nun soll das von S auf die Tangente MT der Flächenkurve gefällte Lot ST gleich der Konstanten a sein. Es ist also

$$a = SM \cdot \cos i = K_2 \cos i = \frac{r \cos i}{\sin\varphi}.$$

Durch Differentiation folgt:

$$-\frac{di}{ds} = \frac{1}{\sin i}\left(\frac{a\cos\varphi}{r} \cdot \frac{d\varphi}{ds} - \frac{a\sin\varphi}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds}\right).$$

Nun ist $ds \cdot \sin i$ gleich dem Linienelement ds_1 des Meridians. Ferner ist $d\varphi/ds_1$ gleich der Krümmung $1/R_1$ des Meridians; R_1 ist zugleich der eine Hauptkrümmungsradius der Fläche. $1/r \cdot \cos\varphi$ ist gleich der zweiten Hauptkrümmung $1/R_2$, und dr/ds_1 ist gleich $\sin\varphi$. Man hat also:

$$-\frac{di}{ds} = \frac{a}{R_1 R_2} - \frac{a \sin^2\varphi}{r^2}.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für $1/R$ ein, so ist

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{R_1 R_2} - \frac{a\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\cos i}{K_2},$$

oder da $\frac{\cos i}{K_2} - \frac{a\sin^2\varphi}{r^2} = 0$ ist,

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{R_1 R_2},$$

d. h. die geodätische Krümmung ist gleich dem Krümmungsmaß der Fläche, multipliziert mit a.

Stuttgart. E. RATH.

Zu **145** (Bd. X, S. 197) (Paul Epstein). — Alle Geraden, die aus zwei festen Kreisen Sehnen von gleicher Länge ausschneiden, umhüllen eine Parabel, die die Potenzlinie der beiden Kreise zur Scheiteltangente und die Mitte der Zentrale zum Brennpunkt hat.

Erste Lösung. — Eine Gerade g, die aus 2 festen Kreisen mit den Mittelpunkten K und K' Sehnen von gleicher Länge ausschneidet, treffe den ersten Kreis K in den Punkten M und N, den zweiten K' in den Punkten M' und N', so daß $MN = M'N'$ ist. Die Halbierungspunkte der Sehnen MN und $M'N'$ seien bezüglich P und P', der Halbierungspunkt der Strecke PP' sei Q. Der Punkt Q muß auf der Potenzlinie liegen, da $QM \cdot QN = QM' \cdot QN'$ ist. Die im Punkte Q auf g errichtete Normale trifft die Zentrale KK' im Halbierungspunkte F, da QF parallel zu den Strecken PK und $P'K'$ ist. Erinnert man sich nun an den bekannten Satz, daß der Fußpunkt der vom Brennpunkte einer Parabel auf eine Parabeltangente gefällten Normale in der Scheiteltangente liegt, und faßt man die Potenzlinie der beiden gegebenen Kreise als Scheiteltangente einer Parabel auf, welche ihren Brennpunkt in F hat, so muß die Gerade g diese Parabel berühren. Da nun die Potenzlinie und der Punkt F von der Lage der Geraden g unabhängig sind, so muß auch jede andre Gerade g, wenn sie nur aus den beiden gegebenen Kreisen Sehnen von gleicher Länge ausschneidet, die Parabel berühren, oder mit andern Worten: Die Geraden g umhüllen eine Parabel, welche die Potenzlinie der beiden Kreise zur Scheiteltangente und die Mitte der Zentrale zum Brennpunkt hat.

Aussig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

Mit dieser Lösung stimmen im wesentlichen diejenigen überein, welche von den Herren W. Stegemann (Prenzlau) und O. Gutsche (Breslau) eingelaufen sind. Red.

Zweite Lösung. — Die beiden Kreise mögen die Gleichungen haben

$$\mathfrak{K}_1 \equiv x^2 + y^2 - 2ax - c^2 = 0,$$
$$\mathfrak{K}_2 \equiv x^2 + y^2 - 2bx - c^2 = 0,$$

sodaß $x = 0$ die Potenzlinie ist, während der Mittelpunkt der Zentrale die Koordinaten $\frac{1}{2}(a+b)$, 0 hat. $\mathfrak{K}_1$ werde von einer Geraden

$$\mathfrak{G} \equiv ux + vy + w = 0$$

geschnitten. Eliminiert man y zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{G}$, so ergibt sich für die Abszissen x_1, x_1' der beiden Schnittpunkte die Gleichung

$$x^2(u^2 + v^2) + 2x(uw - av^2) + w^2 - c^2v^2 = 0.$$

Dann ist aber

$$x_1 - x_1' = \theta\sqrt{(uw - av^2)^2 - (u^2 + v^2)(w^2 - c^2v^2)}$$

und ebenso für die Abszissen x_2, x_2' der Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{G}$

$$x_2 - x_2' = \theta\sqrt{(uw - bv^2)^2 - (u^2 + v^2)(w^2 - c^2v^2)}.$$

Durch Gleichsetzen beider Differenzen ergibt sich ohne weiteres die Gleichung der gewünschten Parabel in Linienkoordinaten

$(a + b)v^2 = 2uw$ oder in Punktkoordinaten $y^2 = 2(a+b)x$.

Speyer. H. Wieleitner.

Dritte Lösung. — Jede Gerade, die aus den beiden festen Kreisen K_1 und K_2 zwei Sehnen AB und CD von gleicher Länge ausschneidet, steht senkrecht auf PM, der Verbindungslinie der Mitte M der Zentrale mit ihrem Schnittpunkt P mit der Potenzlinie p.

Da nämlich P ein Punkt der Potenzlinie ist, so gilt $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Sind nun die inneren Abschnitte einander gleich ($AB = CD$), so müssen es auch die äußeren sein ($BP = PC$), und daher ist auch $M_1 P = PM_2$, wenn M_1 und M_2 die Mitten der Sehnen sind. Da nun weiter $K_1 M = MK_2$, so ist MP als Mittellinie des Trapezes $K_1 K_2 M_2 M_1$ parallel $K_1 M_1$ und $K_2 M_2$ und steht also senkrecht auf $M_1 M_2$. Umgekehrt ist ersichtlich, daß jede Senkrechte in einem Punkte P der Potenzlinie auf PM die beiden Kreise in gleichen Sehnen schneidet. Durchläuft somit der Punkt P die Gerade p, so ergeben die auf $PM = s$ in P errichteten Senkrechten alle Geraden, die aus beiden Kreisen gleiche Sehnen ausschneiden. Infolge dieser Erzeugungsweise sind nun diese Geraden die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektiver Punktreihen, nämlich der Punktreihe, die der Strahlenbüschel (M, s) auf p und der Punktreihe, die der zu ihm kongruente Strahlenbüschel (M, s') der je zu s senkrechten Strahlen s' auf der unendlich fernen Geraden einschneidet, und bilden demnach den Tangentenbüschel einer Parabel. Als Symmetriegerade der ganzen Figur ist die Zentrale auch Achse dieser Parabel und die auf ihr senkrechte Tangente p ist daher Scheiteltangente. Die von M an die Parabel gehenden Tangenten sind die Doppelstrahlen der um M von s und s' gebildeten rechtwinkligen Involution, d. h. die durch M gehenden isotropen Strahlen. Als Schnittpunkt zweier von den absoluten Punkten an die Parabel gehender Tangenten ist daher M Brennpunkt der Parabel.

Breslau, April 1906. stud. math. F. Schlegel.

Vierte Lösung. — Let the coordinates of the centres of the two circles be $(a, 0)$ and $(-a, 0)$ and their radii r and R respectively. If $y = mx + b$ is the equation of a straight line, the distances from the centres to this line are $\frac{b + am}{\sqrt{1 + m^2}}$ and $\frac{b - am}{\sqrt{1 + m^2}}$, and hence the lengths of the chords of the circles are

$$2\sqrt{r^2 - \frac{(b + am)^2}{1 + m^2}} \quad \text{and} \quad 2\sqrt{R^2 - \frac{(b - am)^2}{1 + m^2}}.$$

Equating these we get

$$b = -\frac{(R^2 - r^2)(1 + m^2)}{4am}$$

and hence

$$y = mx - \frac{(R^2 - r^2)(1 + m^2)}{4am}$$

Differentiating with respect to the parameter m we get

$$x = \frac{(R^2 - r^2)(m^2 - 1)}{4am^2}$$

and hence

$$y = -\frac{R^2 - r^2}{2am}$$

Eliminating m we obtain the equation of the envelope

$$y^2 = -\frac{R^2 - r^2}{a}\left(x - \frac{R^2 - r^2}{4a}\right)$$

which represents a parabola whose vertex is at the point where the radical axis of the two circles cuts the axis of x, and whose focus is half way between the centres of the circles.

La Fayette, Ind. JACOB WESTLUND.

Der Satz ist, wie ich zufällig bemerke, bereits von Steiner ausgesprochen worden; er findet sich in der Abhandlung „Neue Bestimmungsarten der Kurven zweiter Ordnung", Ges. Werke Bd. II, S. 455.

Straßburg i. E. PAUL EPSTEIN.

Zu **147** (Bd. X, S. 198) (H. Wieleitner). — Zu bestimmen ist der geometrische Ort für die Wendepunkte aller Konchoiden mit gemeinsamem Pol und gemeinsamer Basis.

Erste Lösung. — Die Gleichung der Konchoide in Polarkoordinaten lautet: $r = \frac{c}{\cos\varphi} \pm a$. Die Wendepunkte sind gegeben durch die Gleichung:

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0.$$

In unserm Falle ist also:

$$\frac{c^2}{\cos^2\varphi} \pm \frac{2ac}{\cos\varphi} + a^2 + \frac{2c^2\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} - \left(\frac{c}{\cos\varphi} \pm a\right)\left(\frac{c}{\cos\varphi} + \frac{2c\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\right) = 0$$

oder in reduzierter Form:

$$\pm a + \frac{c}{\cos\varphi} - \frac{2c\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} = 0.$$

Daraus ergibt sich für

$$\pm a = \frac{2c\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} - \frac{c}{\cos\varphi}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung der Konchoide ein, so ergibt sich, da a eliminiert ist, ohne weiteres als geometrischer Ort der Wendepunkte für alle Konchoiden mit demselben Pol und derselben Basis:

$$r = \frac{2c\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi},$$

d. i. in kartesischen Koordinaten die Gleichung der semikubischen Parabel:

$$x^3 = 2cy^2.$$

Aussig (Böhmen). stud. math. JOSEF KRUG.

Bemerkung. Der angegebene Ort wurde schon von La Hire aufgestellt (Mém. Ac. Royale des Sc. 1708 (Paris 1730), S. 59). Da er aber in keinem der bekannten neueren Bücher steht, durfte wohl wieder auf ihn hingewiesen werden. H. WIELEITNER.

Zweite Lösung. — Bezeichnet man die Entfernung des Pols P der Konchoide von ihrer Basis mit a, das veränderliche Zwischenstück mit u, so ist die Gleichung der Konchoide, bezogen auf die Basis als x-Achse,

$$x^2y^2 = (a + y)^2(u^2 - y^2).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{u^2y^3(y^3+3ay^2-2au^2)}{(y^3+au^2)^3}.$$

Für die Wendepunkte ist also $y^3+3ay^2-2au^2=0$ oder

$$u^2 = \frac{y^3+3ay^2}{2a}, \quad u^2-y^2 = \frac{(a+y)y^2}{2a}.$$

Setzt man dies in die Konchoidengleichung ein, so erhält man als Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte

$$x^2 = \frac{(a+y)^3}{2a}.$$

Die Wendepunkte der Konchoiden liegen also auf einer semikubischen Parabel, deren Spitze in P liegt und deren Achse mit der gemeinsamen Achse aller Konchoiden zusammenfällt.

Prenzlau. W. Stegemann.

Die gleiche Lösung ist noch von Herrn stud. math. Baruch eingelaufen. Red.

Dritte Lösung. — Aus der Parameterdarstellung

$$x = a\,\mathrm{cotg}\,\varphi + b\cos\varphi, \qquad y = a + b\sin\varphi$$

folgt, wenn man nach x differenziert,

$$1 = -\frac{(a+b\sin^3\varphi)}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = -b\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{b\cos\varphi\sin^2\varphi}{a+b\sin^3\varphi}.$$

Bildet man nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ und setzt man diesen Wert gleich Null, so ergibt sich

$$2a - 3a\sin^2\varphi - b\sin^3\varphi = 0,$$

so daß also für einen Wendepunkt

$$b = \frac{a(2-3\sin^2\varphi)}{\sin^3\varphi}$$

ist. Die Ordinate eines Punktes der Ortskurve für die Wendepunkte aller Konchoiden, die man für verschiedene Werte von b erhält, ist daher

$$y = a + b\sin\varphi = \frac{2a(1-\sin^2\varphi)}{\sin^2\varphi} = 2a\,\mathrm{cotg}^2\varphi.$$

Ferner ist

$$x = a\,\mathrm{cotg}\,\varphi + b\cos\varphi = a\,\mathrm{cotg}\,\varphi\left(1+\frac{2-3\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right) = 2a\,\mathrm{cotg}^3\varphi.$$

Die Ortsgleichung für die Wendepunkte lautet also in Parameterdarstellung

$$x = 2a\,\mathrm{cotg}^3\varphi, \qquad y = 2a\,\mathrm{cotg}^2\varphi,$$

mithin in rechtwinkligen Koordinaten $y^3 = 2ax^2$. Sie stellt also eine semikubische Parabel dar. (Vgl. übrigens G. Loria, Höhere Kurven, Leipzig, B. G. Teubner, S. 131.)

Breslau, 27. April 1906. O. Gutsche.

Zu **148** (Bd. X, S. 198) (E. Lemoine). — In der Ebene des Dreiecks ABC soll eine Richtung derart bestimmt werden, daß, wenn man die Dreiecksseiten auf diese Richtung projiziert, die Summe der Quadrate der Projektionen möglichst klein werde.

Erste Lösung. — Man konstruiert über der Seite AB des gegebenen Dreiecks ABC nach beiden Seiten je ein gleichseitiges Dreieck, nämlich ABC_1 und ABC_2. Die Halbierungsgeraden des Winkels C_1CC_2 und seines Nebenwinkels geben die Richtungen an, daß die Summe der Quadrate der Projektionen der Seiten des Dreiecks ABC auf dieselben ein Maximum bezw. Minimum ist.

Der Beweis werde geführt durch Behandlung der allgemeineren Aufgabe: Auf welche Gerade P muß man die Seiten eines Dreiecks ABC projizieren, damit die Summe der Quadrate der Projektionen

$$S_p = \overline{B'C'}^2 + \overline{C'A'}^2 + \overline{A'B'}^2$$

ein Maximum oder Minimum werde?

Im gleichseitigen Dreieck ist diese Summe für alle Richtungen konstant, wovon man sich leicht überzeugt. Es sei nun $A_0B_0C_0$ ein gleichseitiges Dreieck; seinen Schwerpunkt O wählen wir zum Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen X-Achse in beliebiger Richtung angenommen wird, und verkürzen die Ordinaten der drei Eckpunkte, alle im gleichen Verhältnisse. Dadurch erhält man ein Dreieck ABC, von dem die Summe der Quadrate der Seitenprojektionen auf die X-Achse, S_x, dieselbe ist, wie beim ursprünglichen gleichseitigen Dreieck $A_0B_0C_0$, während auf jede andere Gerade G aber S_g kleiner ausfällt und speziell S_y auf die Y-Achse am kleinsten ist. Bei jener Ordinatenverkürzung ist der dem gleichseitigen Dreieck $A_0B_0C_0$ umgeschriebene Kreis K_0 zu einer um ABC umgeschriebenen Ellipse K geworden, und zwar zu jener, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks ABC zusammenfällt. Diese Ellipse ist bekanntlich die kleinste unter allen Ellipsen, die man dem Dreieck ABC umschreiben kann und führt den Namen: Steinersche Ellipse. Abstrahieren wir jetzt vom Dreieck $A_0B_0C_0$, so haben wir hiermit folgenden Satz gewonnen: „Die Summe der Quadrate der Projektionen der Dreiecksseiten auf die Richtung der großen Achse der Steinerschen Ellipse ist ein Maximum, auf die der kleinen Achse ein Minimum.“ Hiernach ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Bestimmung der Achsenrichtungen der Steinerschen Ellipse. Diese werden folgendermaßen bestimmt:

1. Die Steinersche Ellipse schneidet den dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreis im Steinerschen Punkt R; daher bilden die vier Punkte A, B, C, R die Basispunkte eines Kegelschnittbüschels, dem ein Kreis angehört. Nach einem bekannten Satze sind dann die Achsenrichtungen sämtlicher Kegelschnitte des Büschels untereinander parallel. Man braucht also nur von einem der im Büschel enthaltenen Geradenpaare z. B. RA, BC die beiden Winkelhalbierenden zu konstruieren.

2. Man zieht durch den Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises und den Grebeschen (Lemoineschen) Punkt eine Gerade, welche den umgeschriebenen Kreis in K_1 und K_2 schneidet und bestimmt zu diesen Schnittpunkten die (im Unendlichen liegenden) Winkelgegenpunkte.

3. Konstruiert man über den Seiten des Dreieckes ABC nach *außen* gleichseitige Dreiecke BCA_1, CAB_1, ABC_1, so schneiden sich bekanntlich die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkte M, dessen wesentlichste Eigenschaft ist, daß die Summe seiner Abstände von den Ecken des Dreieckes ein Minimum ist; einen analogen Punkt M' bekommt man, wenn man über den Seiten des Dreieckes ABC nach *innen* gleichseitige Dreiecke BCA_2, CAB_2, ABC_2 errichtet und die Geraden AA_2, BB_2, CC_2 zieht. Ist O der Schwerpunkt des Dreieckes ABC, so halbiere man jetzt den Winkel MOM' und seinen Nebenwinkel. (Die Punkte M und M' liegen auf der Kiepertschen Hyperbel von ABC, deren Asymptoten mit den Achsenrichtungen der Steinerschen Ellipse parallel sind. Neuberg und Gob, *AFAS* Paris, 1889.)

4. Die einfachste Konstruktion ist folgende: Man konstruiert, wie unter 3., aber nur über einer Dreiecksseite, z. B. über BC die beiden gleichseitigen Dreiecke BCA_1 und BCA_1 und halbiert den Winkel A_1AA_2 und seinen Nebenwinkel.

Nimmt man das Dreieck mit den Seiten $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ als Koordinatendreieck für homogene baryzentrische Koordinaten x_1, x_2, x_3 an (Moebiussche Koordinaten), so ist bekanntlich die Gleichung der Steinerschen Ellipse:

$$x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0,$$

und die Gleichungen der (durch den Schwerpunkt gehenden) Achsen derselben sind:

$$\frac{a^2 \pm 2f\sqrt{\cot^2\omega - \frac{1}{3}}}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}x_1 + \frac{b^2 \pm 2f\sqrt{\cot^2\omega - \frac{1}{3}}}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}x_2 + \frac{c^2 \pm 2f\sqrt{\cot^2\omega - \frac{1}{3}}}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}x_3 = 0.$$

Hierin bedeutet f den Flächeninhalt und ω den Brocardschen Winkel des Dreieckes. Schließlich noch eine Bemerkung: Von allen durch den Schwerpunkt gezogenen Geraden ist die große (kleine) Achse der Steinerschen Ellipse diejenige, für welche die Summe der Quadrate der Abstände der Ecken von ihr ein Minimum (Maximum) ist.

Aussig, 1. April 1906. A. Krug.

Zweite Lösung. — Man lege durch das Dreieck die Transversale g so, daß die Seite BC in einem Punkte A' der Verlängerung über C hinaus, die Seiten CA und CB aber in den Punkten B' und C', die auf den Seiten selbst liegen, schneidet. Dann bildet g mit den Dreiecksseiten die Winkel

$$C'A'B = \varphi, \quad A'B'C = \gamma - \varphi, \quad B'C'A = \beta + \varphi.$$

Es ist demnach das Minimum der Funktion

$$f(\varphi) = a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2(\gamma - \varphi) + c^2\cos(\beta + \varphi)$$

zu bestimmen. Durch Differentiation ergibt sich

$$\text{(I)} \qquad \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = f' = -a^2\sin 2\varphi - b^2\sin 2(\varphi - \gamma) - c^2\sin 2(\varphi + \beta).$$

Setzt man dies gleich Null, löst die Klammern auf und dividiert durch $\sin 2\varphi$, so erhält man

$$-a^2 - b^2\cos 2\gamma + b^2\sin 2\gamma\cot 2\varphi - c^2\cos 2\beta - c^2\sin 2\beta\cot 2\varphi = 0,$$

mithin tritt für die Funktion $f(\varphi)$ das Minimum ein, wenn

$$\text{(II)} \qquad \cot 2\varphi = \frac{a^2 + b^2 \cos 2\gamma + c^2 \cos 2\beta}{b^2 \sin 2\gamma - c^2 \sin 2\beta}$$

ist. Diese Gleichung liefert zwei Werte φ und φ', deren Differenz 90^0 ist. Sind nun φ und φ' zwei beliebige Winkel, für welche die Beziehung $\varphi' - \varphi = 90^0$ besteht, so ist

$$f(\varphi') = a^2 \cos^2 \varphi' + b^2 \cos^2(\gamma - \varphi') + c^2 \cos^2(\beta + \varphi')$$
$$= a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2(\gamma - \varphi) + c^2 \sin^2(\beta + \varphi) = a^2 + b^2 + c^2 - f(\varphi).$$

Hieraus folgt, daß, wenn $f(\varphi)$ ein Minimum wird, $f(\varphi')$ gleichzeitig sein Maximum erreicht, daß also durch (II) die beiden Richtungen der Geraden g bestimmt werden, die die Funktion $f(\varphi)$ entweder zum Minimum oder zum Maximum machen.

Die Gleichung (II) kann man umformen. Bezeichnet man die von A aus auf BC gefällte Höhe AD mit h, die Höhenabschnitte DC und DB mit p und q, so ist

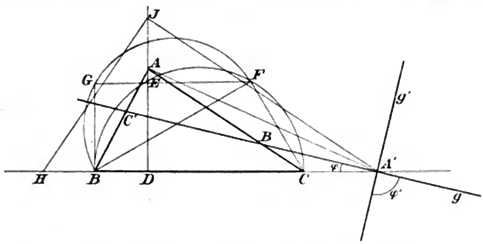
$$b \sin \gamma = c \sin \beta = h, \quad b \cos \gamma - c \cos \beta = p - q,$$
$$b^2 \cos^2 \gamma + c^2 \cos^2 \beta = (b \cos \gamma + c \cos \beta)^2 - 2bc \cos \beta \cos \gamma = a^2 - 2pq,$$

und es ergibt sich

$$\cot 2\varphi = \frac{a^2 + b^2 \cos^2 \gamma + c^2 \cos^2 \beta - b^2 \sin^2 \gamma - c^2 \sin^2 \beta}{2b^2 \sin \gamma \cos \gamma - 2c^2 \sin \beta \cos \beta} = \frac{a^2 - h^2 - pq}{h(p-q)}.$$

Hiernach läßt sich der Winkel 2φ konstruieren, und zwar, wenn man die Bezeichnung des Dreiecks so wählt, daß $BC > CA > AB$ ist, auf folgende Weise (s. Fig.):

Man errichte über BC als Durchmesser den Halbkreis, der AD in E trifft, trage in den Halbkreis $CF = h$ als Sehne ein, errichte auch über



BF den Halbkreis und trage in diesen $BG = DE$ als Sehne ein. Sodann trage man von D aus auf DB die Strecke $DH = p - q$ und auf DA die Strecke $DJ = FG$ ab, verbinde H mit J und ziehe durch J die Senkrechte zu HJ, die BC in A' trifft. Verbindet man noch A mit A', so ist $\sphericalangle AA'B = 2\varphi = 2(\varphi' - 90^0)$; mithin geben die beiden Halbierungslinien der von den Geraden BC und AA' gebildeten Winkel die gesuchten Richtungen an.

Beweis: Es ist

$$\cot AA'B = \frac{DA'}{AD} = \frac{DJ^2}{AD\cdot DH} = \frac{FG^2}{AD\cdot DH} = \frac{BF^2 - BG^2}{AD\cdot DH}$$
$$= \frac{BC^2 - CF^2 - DE^2}{AD\cdot DH} = \frac{BC^2 - AD^2 - DC\cdot DB}{AD\cdot DH} = \frac{a^2 - h^2 - pq}{h(p-q)}.$$

Nun ist noch zu ermitteln, welche der beiden gefundenen Richtungen dem Minimum und welche dem Maximum entspricht. Zu diesem Zwecke differenziere man Gleichung (I), und es ergibt sich

$$\frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} = f'' = -2a^2\cos 2\varphi - 2b^2\cos 2(\varphi-\gamma) - 2c^2\cos 2(\varphi+\beta)$$
$$= -2\cos 2\varphi\left(a^2 + b^2\cos 2\gamma + c^2\cos 2\beta + \operatorname{tg} 2\varphi\,[b^2\sin 2\gamma - c^2\sin 2\beta]\right).$$

Mit Rücksicht auf (II) erhält man hieraus für den Eintritt des Maximums oder Minimums

$$f'' = -\frac{2\cos 2\varphi}{a^2 + b^2\cos 2\gamma + c^2\cos 2\beta}\left([a^2 + b^2\cos 2\gamma + c^2\cos 2\beta]^2 + [b^2\sin 2\gamma - c^2\sin 2\beta]^2\right).$$

Hiernach ist das Vorzeichen von f'' abhängig von dem Vorzeichen des vor der Klammer stehenden Bruches. Nun erhält man durch die angegebene Konstruktion jederzeit einen spitzen Winkel $AA'B$; also sind Zähler und Nenner des Bruches, mithin auch der Bruch selbst, positiv. In diesem Falle wird f'' negativ; folglich entspricht die durch die Halbierungslinie des Winkels $AA'B$ bestimmte Richtung dem Maximum, dagegen die zu ihr senkrechte Richtung dem Minimum der Funktion $f(\varphi)$.

Prenzlau. W. Stegemann.

---

2. Anfragen und Antworten.

29. Ist eine Funktion

$$x = f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^\nu, \quad a_1 \neq 0,$$

gegeben, so setzt man, wie bekannt, um die Umkehrungsfunktion zu erhalten:

$$\frac{x - a_0}{a_1} = y, \quad y = t + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_\nu}{a_1} t^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu t^\nu.$$

Es sei nun

$$t = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu y^\nu$$

die Umkehrungsfunktion. Kann man die Abhängigkeit der c_ν von den b_ν im allgemeinen Falle durch eine Formel ausdrücken? In Runge, „Theorie und Praxis der Reihen“ sind nur die 4 ersten c_ν angegeben; gibt es Stellen in der Literatur, wo von den Koeffizienten c_ν eine größere Anzahl angegeben ist?

Potsdam, am 11. März 1906. Otto Meissner.

Zu **11** (Bd. VII, S. 179) (R. Güntsche). — Die Formel findet sich bei E. Study: Sphär. Trig. usw., Abh. d. Sächs. Ges. d. Wiss., math. Kl., XX, 137, 1893, § 4, Glchg. (3*). R. Güntsche.

Zu **17** (Bd. VIII, 267—268) (O. Meißner). — Die Umkehrung der Iteration — es sei einstweilen, um einen kurzen Ausdruck zu haben, das Wort Reïteration dafür gestattet, — ist *im allgemeinen nicht* möglich, sondern nur in besonderen Fällen, von denen nachstehend die auf die *rationalen* Funktionen bezüglichen kurz aufgeführt werden sollen.

1. *Potenzen von x.* — Sie besitzen *stets* Reïterierte beliebigen Grades (wenn $f(x) = \varphi[\varphi)(x)]$, ist $\varphi(x)$ die Reïterierte ersten Grades usw.). Die n-te Reïterierte von ax^m ist αx^μ, wo:

$$\mu = m^{\frac{1}{2^n}}, \qquad \alpha = a^{\frac{1}{\mu+\mu^2+\mu^4+\cdots+\mu^{2^{n-1}}+1}}$$

ist, dabei kann μ eine *beliebige* 2^n-te Wurzel sein, natürlich muß in dem Exponenten von α dann derselbe Wurzelwert stehen. Es gibt also 2^n Reïterierte n-ten Grades. Nur $f(x) = x$ hat unendlich viele $\frac{a}{x}$, wo a eine beliebige, von 0 verschiedene, komplexe Zahl bedeutet.

2. *Linear gebrochene Funktionen.* — Auch sie besitzen stets Reïterierte beliebigen Grades, wie aus der Theorie der linearen Substitutionen bekannt ist, weshalb hier nicht näher darauf eingegangen zu werden braucht. — Die n-te Reïterierte, bezw. eine der 2^n, von $ax + b$ ist $\alpha x + \beta$, worin:

$$\alpha = a^{\frac{1}{2^n}}, \qquad \beta = \frac{b}{(\alpha+1)(\alpha^2+1)\cdots(\alpha^{2^{n-1}}+1)}.$$

3. *Ganze rationale Funktionen.* — Damit von $f(x) = a_0 x^m + \cdots + a_m$ eine n-te Reïterierte existiere, ist notwendig, aber *nicht* hinreichend, daß $m = \mu^{2^n}$, $\mu > 1$. Außerdem müssen noch $\mu^{2^n} - \mu^{2^{n-1}}$ Bedingungen zwischen den Koeffizienten $a_0, \ldots a_m$ bestehen, die man auf Gleichungen der Form

$$a_{\mu+\varrho} = f_3(a_0, a_1, \ldots a_n) \qquad \varrho = 1, 2, \ldots$$

zurückführen kann.

Beispiel: Es ist

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = \varphi(\varphi(x))$$

stets und nur, falls:

$$d = \frac{b}{8a^2}(4ac - b^2),$$

$$e = \frac{(4ac - b^2)^2 - 4a\sqrt[3]{a}b^2 - 16a^2b + 8a\sqrt[3]{a}(4ac - b^2)}{64a^3};$$

dann ist:

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

worin:

$$\alpha = \sqrt[3]{a}, \qquad \beta = \frac{b}{2\sqrt[3]{a^2}} \qquad \gamma = \frac{4ac - b^2 - 2\sqrt[3]{a^2}b}{8a\sqrt[3]{a^2}}.$$

Im allgemeinen ist $f(x) = ax^4 + \cdots = \varphi(\varphi(x)) + Dx + E$; doch kann man durch eine geeignete Substitution $\bar{x} = \lambda x + \mu$ stets erreichen, daß $f(\bar{x}) = \varphi(\varphi(\bar{x}))$ wird.

4. *Gebrochene rationale Funktionen.* — Für sie gilt im wesentlichen das in § 3 Gesagte, nur ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen, die zwischen den Koeffizienten bestehen müssen, hier doppelt so groß als dort.

Potsdam, den 29. Dezember 1905. OTTO MEISSNER.

---

3. Kleinere Notizen.

On the addition theorem of a function.

1. As an illustration of the treatment of a functional equation, we find in many text-books or collections of exercises, such as Tisserand's Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal, the following question:

Find all the functions $f(u)$ satisfying the relation

$$f(u+v) = \frac{f(u) + f(v)}{1 - f(u)f(v)},$$

or

$$f(u+v) = f(u)\sqrt{1 - \{f(v)\}^2} + f(v)\sqrt{1 - \{f(u)\}^2}.$$

The usual way of solving this question is as follows:

Differentiating the addition-theorem with respect to u and v respectively, and then comparing the two results, we get

$$\frac{f'(u)}{1 + \{f(u)\}^2} = \text{const.}, \quad \text{or} \quad \frac{f'(u)}{\sqrt{1 - \{f(u)\}^2}} = \text{const.}$$

Then by integration, we get

$$f(u) = \tan(au + b), \quad \text{or } f(u) = \sin(au + b),$$

where a and b are constants. The latter constant b may be shown to be zero. And the final result is

$$f(u) = \tan au, \quad \text{or } f(u) = \sin au.$$

Many questions of the same kind may be proposed for the theta functions, the elliptic functions, etc.

2. Here I will prove the following more general theorem:

If a function $f(u)$ has the algebraical addition theorem

$$f(u+v) = F\{f(u), f(v)\},$$

all the functions having the same algebraical addition theorem must have the form $f(au)$, a being any constant.

This theorem may be proved by a similar way as I have shown before for $\tan u$, and $\sin u$. But I prefer the following very simple process in which we do not use differentiation and integration and in which on this account we will find something of interest.

Let $\Phi(u)$ be another function having the addition theorem

$$\Phi(u+v) = F\{\Phi(u),\ \Phi(v)\}.$$

Suppose that $\Phi(u)$ has the form $f\psi(u)$. This supposition does never restrict the form of Φ, because ψ may have any form whatever.

Then

$$f\psi(u+v) = F\{f\psi(u),\ f\psi(v)\}.$$

But

$$f(x+y) = F\{f(x),\ f(y)\}$$

and therefore

$$f\{\psi(u)+\psi(v)\} = F\{f\psi(u),\ f\psi(v)\}.$$

Hence

$$f\psi(u+v) = f\{\psi(u)+\psi(v)\}.$$

Since the function $f(u)$ has the algebraical addition theorem, the function $f(u)$ must be either algebraical, or simply periodic or doubly periodic, by the theorem of Weierstrass, which we find in Prof. H. A. Schwarz' Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen.

Hence we must have

$$\psi(u+v) = \psi(u) + \psi(v) + c,$$

where c is either zero or a multiple of the period or a sum of multiples of the two periods. Let $u = v$; then

$$\psi(2u) = 2\psi(u) + c.$$

Suppose that $\psi(u)$ has the form $u\theta(u) - c$. This supposition also does never restrict the form of ψ, because θ may have any form.

Then

$$2u\theta(2u) - c = 2u\theta(u) - 2c + c$$

and therefore

$$\theta(2u) = \theta(u).$$

Hence the function $\theta(u)$ must be constant, say a. Therefore

$$\Phi(u) = f\psi(u) = f\{u\theta(u) - c\} = f(au - c) = f(au). \quad \text{Q. E. D.}$$

Tokyo, 17. November, 1905. T. Hayashi.

Eine neue Formel für den Rest der Taylorschen Reihe.

Wenn man in der Gleichung

$$\frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{\Phi'(\xi)}{F'(\xi)},$$

$$\Phi(x) = f(x) - f(b) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

$$+ \frac{(b-x)^{p+q}}{(p+q)!}f^{(p+q)}(x),$$

$$F(x) = f(x) - f(b) + (b-x)f'(x) + \cdots + \frac{(b-x)^p}{p!}f^{(p)}(x)$$

einträgt, weiter $b = a + h$, und das zwischen a und b liegende $\xi = a + \vartheta h$ setzt, so folgt

$$\frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2!}f''(a) - \cdots - \frac{h^{p+q}}{(p+q)!}f^{(p+q)}(a)}{f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \cdots - \frac{h^p}{p!}f^{(p)}(a)}$$
$$= \frac{h^q(1-\vartheta)^q}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)} \cdot \frac{f^{(p+q+1)}(a+\vartheta h)}{f^{(p+1)}(a+\vartheta h)};$$

oder, wenn man den Rest der nach $n+1$ Gliedern abgebrochenen Taylorschen Reihe R_n setzt,

$$(1) \qquad \frac{R_{p+q}}{R_p} = \frac{h^q(1-\vartheta)^q}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)} \cdot \frac{f^{(p+q+1)}(a+\vartheta h)}{f^{(p+1)}(a+\vartheta h)},$$

wo die von p und q abhängende Zahl $\vartheta > 0$, aber < 1 ist (mit Ausschluß der Grenzen).

Für $q = 1$ folgt hieraus:

$$(2) \qquad \frac{R_{p+1}}{R_p} = \frac{h(1-\vartheta)}{p+1} \frac{f^{(p+2)}(a+\vartheta h)}{f^{(p+1)}(a+\vartheta h)}.$$

Da

$$R_{p+q} = R_p - \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(a) - \cdots - \frac{h^{p+q}}{(p+q)!}f^{(p+q)}(a)$$

ist, so ergibt sich aus (1) die Restform

$$(3) \qquad R_p = \frac{\sum_{\lambda=1}^{q} \frac{h^{p+\lambda}}{(p+\lambda)!} f^{(p+\lambda)}(a)}{1 - \frac{h^q(1-\vartheta)^q}{(p+1)\cdots(p+q)} \frac{f^{(p+q+1)}(a+\vartheta h)}{f^{(p+1)}(a+\vartheta h)}},$$

und, für $q = 1$, die spezielle

$$(4) \qquad R_p = \frac{\frac{h^{p+1}f^{(p+1)}(a)}{(p+1)!}}{1 - \frac{h(1-\vartheta)}{p+1} \frac{f^{(p+2)}(a+\vartheta h)}{f^{(p+1)}(a+\vartheta h)}}.$$

Die Formeln (3) und (4) stellen die neuen Restformeln dar, die vor den gebräuchlichen vielleicht den Vorzug haben, daß sie den Rest mit den vernachlässigten Gliedern der Taylorschen Reihe in Verbindung setzen.

So kann man aus (4) folgern, da $1 - \vartheta$ stets > 0 ist:

Ist die Bedingung

$$(5) \qquad \frac{hf^{(p+2)}(a+\vartheta h)}{f^{(p+1)}(a+\vartheta h)} < 0$$

für alle ϑ zwischen 0 und 1 erfüllt, so liegt R_p zwischen Null und dem ersten vernachlässigten Glied der Reihe.

Ist (5) von einer gewissen Stelle an für jedes p erfüllt, so zeigt (4), daß $\lim R_p = 0$ ist, wenn die Glieder der Taylorschen Reihe unendlich klein werden.

Ich gebe zwei Beispiele zu der Gleichung (4).

Sei erstens $f(x) = lx$, $a = 1$, so ergibt sich

$$R_p = (-1)^p \frac{h^{p+1}}{p+1} \cdot \frac{1+\vartheta h}{1+h},$$

so daß R_p zwischen $(-1)^p \frac{h^{p+1}}{p+1}$ und $(-1)^p \frac{h^{p+1}}{(p+1)(1+h)}$ liegt, wo natürlich $h > -1$ sein muß.

Zweitens berechnet sich für $f(x) = x^\alpha$, $a = 1$, wobei $h \geqq -1$ sein muß,

$$(6) \qquad R_p = \binom{\alpha}{p+1} h^{p+1} \cdot \frac{(p+1)(1+\vartheta h)}{(p+1)(1+h) - \alpha h(1-\vartheta)}.$$

Die Differentiation des von ϑ abhängenden Bruches zeigt, daß er sich, wenn ϑ von 0 bis 1 wächst, monoton von $\frac{p+1}{(p+1)(h+1) - \alpha h}$ bis 1 ändert. Man kann aber daraus nur dann eine Begrenzung der Werte dieses Bruches entnehmen, wenn er nicht unendlich wird. Dies wird verhindert durch die Annahme

$$(7) \qquad p + 1 > \frac{\alpha h}{1+h},$$

die für $\alpha h < 0$ keine Beschränkung für p liefert. Unter dieser Annahme für p liegt dann R_p zwischen den Grenzen

$$\binom{\alpha}{p+1} h^{p+1} \quad \text{und} \quad \binom{\alpha}{p+1} h^{p+1} \cdot \frac{p+1}{(p+1)(h+1) - \alpha h},$$

die beide das gleiche Zeichen haben. Da für gehörig große p die Bedingung (7) erfüllt ist, folgt weiter, daß $\lim R_p$ zwischen $\lim \binom{\alpha}{p+1} h^{p+1}$ und $\frac{1}{1+h} \lim \binom{\alpha}{p+1} h^{p+1}$ liegt und somit dann und nur dann verschwindet, wenn $\lim \binom{\alpha}{p+1} h^{p+1} = 0$ ist.

Die rechte Seite von (6) wird von ϑ unabhängig in den trivialen Fällen $h = 0$ oder $p + 1 = \alpha$, und wenn $h = -1$ ist. Nach einem Satze von Stolz[1]) darf man, wenn $\alpha > 0$ ist, die Taylorsche Reihe auch für $h = -1$ benutzen, wobei

$$R_p = (-1)^{p+1} \frac{p+1}{\alpha} \binom{\alpha}{p+1} = (-1)^{p+1} \binom{\alpha - 1}{p}$$

folgt, übereinstimmend mit der bekannten Gleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda \binom{\alpha}{\lambda} = (-1)^p \binom{\alpha-1}{p}.$$

Freiburg i. Br. im November 1905. J. Lüroth.

1) Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 1. Teil, S. 97.

Gleichung der Geraden der Höhenpunkte der vier von den Seiten eines ebenen Vierseits gebildeten Dreiecke.

Sind T_1, T_2, T_3, T_4 lineare Normalformen in rechtwinkligen Punktkoordinaten, und werden mit c_{ik} und s_{ik} der Kosinus und der Sinus des Winkels T_iT_k bezeichnet, so sind die Gleichungen der Höhen

$$(1)\qquad \begin{cases} H_{23,1} \equiv c_{13}T_2 - c_{12}T_3 = 0, & H_{24,1} \equiv c_{14}T_2 - c_{12}T_4 = 0, \\ H_{31,2} \equiv c_{12}T_3 - c_{23}T_1 = 0, & H_{41,2} \equiv c_{12}T_4 - c_{42}T_1 = 0; \end{cases}$$

hierbei bezeichnet $H_{ik,l}$ die Höhe des Dreiecks $T_iT_kT_l$, die auf T_l steht.

Für Zahlen m_1, m_2, n_1, n_2, deren Verhältnisse bestimmt sind, hat man, wenn $V = 0$ die gerade Verbindungslinie der Höhenpunkte der Dreiecke $T_1T_2T_3$ und $T_1T_2T_4$ ist,

$$V \equiv m_1H_{23,1} + m_2H_{31,2} \equiv n_1H_{24,1} + n_2H_{41,2} = 0,$$

oder mit Rücksicht auf (1)

$$(2)\qquad \begin{cases} V \equiv -m_2c_{23}T_1 + m_1c_{13}T_2 + (m_2 - m_1)c_{12}T_3 \\ \quad \equiv -n_2c_{24}T_1 + n_1c_{14}T_2 + (n_2 - n_1)c_{12}T_4 = 0. \end{cases}$$

Für bestimmte Zahlen a_1, a_2, a_3 ist

$$(3)\qquad T_4 \equiv a_1T_1 + a_2T_2 + a_3T_3;$$

wenn nun

$$T_i \equiv \alpha_i x + \beta_i y - \delta_i,$$

so folgt

$$(4)\qquad \alpha_4 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3, \qquad \beta_4 = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3.$$

Setzt man (3) in (2) ein, so erhält man für V zwei Ausdrücke, deren Identität zu den Gleichungen führt

$$(5)\qquad \begin{cases} \cdots - c_{23}m_2 + a_1c_{12}\,n_1 + (c_{24} - a_1c_{12})n_2 = 0, \\ c_{13}m_1 \cdots - (c_{14} - a_2c_{12})n_1 - a_2c_{12}\,n_2 = 0, \\ -m_1 + m_2 + a_3n_1 - a_3n_2 = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$m_1 : m_2$$

$$= \begin{vmatrix} -c_{23}, & a_1c_{12}, & c_{24} - a_1c_{12} \\ 0, & -c_{14} + a_2c_{12}, & -a_2c_{12} \\ 1, & a_3, & -a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1c_{12}, & c_{24} - a_1c_{12}, & 0 \\ -c_{14} + a_2c_{12}, & -a_2c_{12}, & -c_{13} \\ a_3, & -a_3, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -c_{23}, & c_{24}, & c_{24} - a_1c_{12} \\ 0, & -c_{14}, & -a_2c_{12} \\ 1, & 0, & -a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{24}, & c_{24} - a_1c_{12}, & 0 \\ -c_{14}, & -a_2c_{12}, & -c_{13} \\ 0, & -a_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Hiernach kann man nehmen

$$(6)\qquad \begin{cases} m_1 = -c_{23}c_{14}a_3 - c_{24}c_{12}a_2 - c_{14}c_{12}a_1 + c_{14}c_{24}, \\ m_2 = -c_{12}c_{24}a_2 - c_{13}c_{24}a_3 - c_{12}c_{14}a_1 + c_{14}c_{24}, \end{cases}$$

woraus folgt

(7) $$m_2 - m_1 = (c_{23}c_{14} - c_{13}c_{24})a_3.$$

Für vier beliebige Gerade f, g, h, p gilt die goniometrische Grundformel (vgl. u. a. Baltzers Elem. d. Math., 2. Bd., 6. Aufl., S. 302)

$$\sin gh \cos fp + \sin hf \cos gp + \sin fg \cos hp = 0;$$

ersetzt man hierin h durch eine Gerade, die zu h rechtwinklig ist, so erhält man

$$\sin (gh + 90^0) \cos fp + \sin (hf - 90^0) \cos gp + \sin fg \cos (hp - 90^0) = 0,$$

oder einfacher

$$\cos gh \cos fp - \cos hf \cos gp + \sin fg \sin hp = 0.$$

Ersetzt man hierin die Geraden f, g, h, p der Reihe nach durch T_1, T_2, T_3, T_4, so ergibt sich

(8) $$c_{23}c_{14} - c_{13}c_{24} + s_{12}s_{34} = 0.$$

Daher ist zunächst

(9) $$m_2 - m_1 = - s_{12}s_{34}a_3.$$

Aus

$$c_{ik} = \alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k$$

und aus (4) erhält man

(10) $$\begin{cases} c_{14} = a_1 \quad\;\, + a_2c_{12} + a_3c_{13}, \\ c_{24} = a_1c_{12} + a_2 \quad\;\, + a_3c_{23}, \\ c_{34} = a_1c_{13} + a_2c_{23} + a_3; \end{cases}$$

daher hat man

(11) $$c_{24} - a_1c_{12} - a_3c_{23} = a_2, \qquad c_{14} - a_2c_{12} - a_3c_{13} = a_1,$$

woraus sich in Rücksicht auf (6) ergibt

(12) $$m_1 = (c_{14} - c_{12}c_{24})a_2, \qquad m_2 = (c_{24} - c_{12}c_{14})a_1.$$

Da nun

$$c_{14} = c_{12}c_{24} - s_{12}s_{24}, \qquad c_{24} = c_{12}c_{14} - s_{21}s_{14},$$

so erhält man schließlich

(13) $$m_1 = - a_2s_{12}s_{24}, \quad m_2 = a_1s_{12}s_{14}.$$

Als Gleichung der vorgelegten Verbindungslinie erhält man hieraus

(14) $$a_1c_{23}s_{14}T_1 + a_2c_{31}s_{24}T_2 + a_3c_{12}s_{34}T_3 = 0.$$

Hieraus kann man die Gleichung der Geraden der Höhenpunkte der Dreiecke $T_3T_4T_1$ und $T_3T_4T_2$ ableiten, indem man die Zeiger 1, 2, 3, 4 der Reihe nach durch 3, 4, 1, 2 ersetzt, und an Stelle der Zeichen a andere Zeichen b verwendet, die der Identität genügen

$$T_2 \equiv b_3T_3 + b_4T_4 + b_1T_1;$$

der Vergleich mit (3) zeigt dabei, daß

$$b_3 = -\frac{a_3}{a_2}, \quad b_4 = \frac{1}{a_2}, \quad b_1 = -\frac{a_1}{a_2}.$$

Bezeichnet W die Verbindungslinie der genannten Höhenpunkte, so hat man mittels dieser Vertauschungen zunächst

$$W \equiv a_1 s_{12} c_{34} T_1 - a_3 s_{23} c_{41} T_3 + s_{24} c_{13} T_4 = 0. \tag{15}$$

Ersetzt man hier T_4 gemäß (3), so folgt

$$W \equiv (s_{12} c_{34} + s_{24} c_{13}) a_1 T_1 + a_2 c_{31} s_{24} T_2 + (s_{24} c_{13} - s_{23} c_{14}) T_3 = 0.$$

Nun ist nach den goniometrischen Grundformeln

$$s_{12} c_{43} + s_{24} c_{13} + s_{41} c_{23} = 0,$$

sowie

$$s_{24} c_{31} + s_{43} c_{21} + s_{32} c_{41} = 0,$$

also

$$s_{12} c_{34} + s_{24} c_{13} = s_{14} c_{23},$$

$$s_{24} c_{13} - s_{23} c_{14} = s_{34} c_{21};$$

folglich hat man

$$W \equiv a_1 c_{23} s_{14} T_1 + a_2 c_{31} s_{24} T_2 + a_3 c_{21} s_{34} T_3 = 0.$$

Die Identität von W und V zeigt, daß die vier Höhenpunkte auf einer Geraden liegen.

Dresden. R. HEGER.

Beitrag zur Inhaltsbestimmung der Fässer.[1]

Der genauen Ermittelung des Faßinhaltes stellen sich bekanntlich Schwierigkeiten entgegen, die in der, durch die Herstellungsweise der Fässer bedingten, der Rechnung schwer zugänglichen Form der Dauben begründet sind.

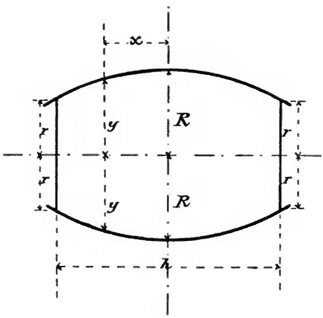


Fig. 1.

Hieraus erklärt es sich, daß die verschiedensten Formeln angegeben wurden, welche mehr oder weniger zutreffende Ergebnisse liefern; teils ist man auf grund theoretischer Untersuchungen zu solchen Formeln gelangt, teils hat man sich auch mit Näherungsformeln begnügt.

Im Gegensatz hierzu wollen wir uns die Aufgabe stellen, eine möglichst zutreffende Formel für den Faßinhalt an der Hand von *Messungen an ausgeführten Beispielen* zu bestimmen. Wir behandeln im folgenden lediglich Fässer mit kreisförmigem Querschnitt und setzen die Abmessungen der Höhe sowie des Boden- und Bauchdurchmessers als bekannt voraus. Zu-

1) Der Verfasser hat die Korrekturen seiner Notiz leider nicht mehr lesen können, da er inzwischen verstorben ist. Red.

nächst handelt es sich darum, eine brauchbare Form für die zu bestimmende Formel festzustellen, die den weiteren Untersuchungen zugrunde zu legen ist.

Bezeichnet man die Höhe des Fasses mit h, die beiden Halbmesser mit R und r (Fig. 1) und nimmt man an, daß die Dauben nach einer Linie geformt sind, deren Gleichung lautet:

$$y = R - (R - r)\left(\frac{2x}{h}\right)^p,$$

so findet sich der verlangte Rauminhalt nach bekannten Regeln zu:

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{h}{2}} \left\{R - (R - r)\left(\frac{2x}{h}\right)^p\right\}^2 dx$$

oder nach Ausführung des Integrals

$$(1) \qquad V = \pi h \frac{2p^2R^2 + 2pRr + (p+1)r^2}{(p+1)(2p+1)},$$

wofür man allgemein setzen kann:

$$(2) \qquad V = \pi h(aR^2 + bRr + cr^2).$$

Zu derselben Gleichung gelangt man auch bei anderen Annahmen, wenn man z. B., um der Faßform besser gerecht zu werden, die Faßdauben im mittleren Teil nach einer Parabel gebogen annimmt, welcher sich berührende Geraden anschließen, vgl. Fig. 2.

Wir entnehmen hieraus, daß die Formel (2) geeignet sein wird, den Inhalt der Fässer allgemein zum Ausdruck zu bringen.

Es ist nun unsere Aufgabe, die in (2) vorkommenden Unbekannten a, b und c möglichst zutreffend zu bestimmen. Wie leicht zu erkennen ist, sind diese Größen nicht unabhängig voneinander, vielmehr müssen dieselben der Gleichung

$$(3) \qquad a + b + c = 1$$

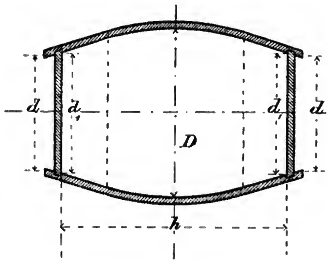


Fig. 2.

Genüge leisten, da für $R = r$ der Inhalt V zu $\pi h r^2$ gefunden werden muß; vgl. im übrigen auch die Koeffizienten in (1). Mit Hilfe von (3) könnte man nun eine der Größen a, b und c entfernen und erhielte z. B.

$$(4) \qquad V - \pi h r^2 = a(R^2 - r^2) + br(R - r);$$

wir wollen jedoch im folgenden von der Formel (3) gänzlich absehen, d. h. die Größen a, b und c so ermitteln, als wenn dieselben voneinander unabhängig wären; die Formel (3) soll uns dann dazu dienen, über die Zuverlässigkeit unserer Berechnungen ein Urteil zu fällen.

Zur Bestimmung obiger Unbekannten a, b und c, die durch theoretische Untersuchungen allein nicht mit Sicherheit festgelegt werden können, sollen uns, wie bereits eingangs erwähnt, die Messungen der Inhalte V und der Maße h, R und r an ausgeführten Beispielen dienen; es würde, da es sich um *drei* Unbekannte handelt, genügen, solche Messungen für *drei* Fässer anzustellen, so daß für die Unbekannten *drei* Gleichungen (2) zur Verfügung stehen. Es erscheint jedoch zweckmäßiger, eine größere Anzahl dieser Messungen in die Rechnung einzubeziehen; dadurch wird auch die Anzahl der Gleichungen (2) größer als diejenige der Unbekannten, zu deren eindeutiger Bestimmung eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen werden muß, welche gleichzeitig über die erzielte Genauigkeit zahlenmäßigen Aufschluß geben wird.

An Stelle der Gleichung (2) wählen wir für die nachstehenden Berechnungen die Formel

$$V = h(aD^2 + bDd + cd^2), \tag{5}$$

in welcher mit D und d (Fig. 2) die Durchmesser bezeichnet sind; für diese Gleichung wird die Beziehung nach (3) nunmehr lauten:

$$a + b + c = \frac{\pi}{4}. \tag{6}$$

In Tabelle 1 sind die gemessenen Werte V, h, D und d für 10 verschiedene Fässer zusammengestellt.

Tabelle 1.

Nr.	V Liter	h dm	D dm	d dm	V_1	$V_1 - V$
1	17,2	2,70	3,10	2,40	17,125	— 0,075
2	21,6	2,80	3,45	2,55	21,373	— 0,227
3	31,6	3,10	4,00	2,95	31,804	+ 0,204
4	38,0	3,90	3,90	2,95	38,599	+ 0,599
5	51,2	4,40	4,30	3,15	51,970	+ 0,770
6	65,0	4,60	4,70	3,50	65,526	+ 0,526
7	75,8	4,85	4,90	3,70	75,689	— 0,111
8	110,4	5,35	5,60	4,35	110,990	+ 0,590
9	118,2	5,10	5,90	4,65	118,413	+ 0,213
10	171,0	6,40	6,50	4,70	171,548	+ 0,548

Mit Hilfe der in dieser Tabelle angegebenen Zahlen können 10 Gleichungen von der Form (5) aufgestellt werden, nachdem die Werte hD^2, hDd und hd^2 ausgerechnet worden sind. Führt man in bekannter Weise vorab Näherungswerte für a, b und c ein, die zu $a = 0{,}37$, $b = 0{,}22$ und $c = 0{,}20$ angenommen werden können, so läßt sich statt (5) die Gleichung ansetzen

$$V = (0{,}37 + x)hD^2 + (0{,}22 + y)hDd + (0{,}20 + z)hd^2 \tag{7}$$

oder wenn $V_1 = 0{,}37\,hD^2 + 0{,}22\,hDd + 0{,}20\,hd^2$ eingeführt wird:

$$V = V_1 + xhD^2 + yhDd + zhd^2; \tag{8}$$

an Stelle dieser Gleichung schreiben wir noch

$$0 = V_1 - V + \frac{hD^2}{100}x_1 + \frac{hDd}{100}y_1 + \frac{hd^2}{100}z_1, \tag{9}$$

so daß $100x = x_1$, $100y = y_1$ und $100z = z_1$ ist.

Die Zahlen V_1 und $V_1 - V$ sind in obiger Tabelle 1 angegeben. Die Fehlergleichungen lauten nunmehr

$$(10)\quad \begin{cases} v = -0{,}08 + 0{,}26\,x_1 + 0{,}20\,y_1 + 0{,}16\,z_1, \\ v = -0{,}23 + 0{,}33\,x_1 + 0{,}25\,y_1 + 0{,}18\,z_1, \\ v = +0{,}20 + 0{,}50\,x_1 + 0{,}37\,y_1 + 0{,}27\,z_1, \\ v = +0{,}60 + 0{,}59\,x_1 + 0{,}45\,y_1 + 0{,}34\,z_1, \\ v = +0{,}79 + 0{,}81\,x_1 + 0{,}60\,y_1 + 0{,}44\,z_1, \\ v = +0{,}53 + 1{,}02\,x_1 + 0{,}76\,y_1 + 0{,}56\,z_1, \\ v = -0{,}11 + 1{,}16\,x_1 + 0{,}88\,y_1 + 0{,}66\,z_1, \\ v = +0{,}59 + 1{,}68\,x_1 + 1{,}30\,y_1 + 1{,}01\,z_1, \\ v = +0{,}21 + 1{,}78\,x_1 + 1{,}40\,y_1 + 1{,}10\,z_1, \\ v = +0{,}55 + 2{,}70\,x_1 + 1{,}96\,y_1 + 1{,}41\,z_1. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen sind die Werte x_1, y_1 und z_1 so zu ermitteln, daß die Summe $[vv]$ ein Minimum wird; diese Bedingung führt in bekannter Weise auf die drei Normalgleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} 17{,}10\,x_1 + 12{,}84\,y_1 + 9{,}59\,z_1 = -4{,}27, \\ 12{,}84\,x_1 + 9{,}65\,y_1 + 7{,}22\,z_1 = -3{,}20, \\ 9{,}59\,x_1 + 7{,}22\,y_1 + 5{,}41\,z_1 = -2{,}38, \end{cases}$$

deren Auflösung ergibt:

$$x_1 = -0{,}86; \quad y_1 = +0{,}85; \quad z_1 = -0{,}05;$$

folglich erhält man die verbesserten Koeffizientenwerte

$$a = 0{,}37 - 0{,}0086; \quad b = 0{,}22 + 0{,}0085; \quad c = 0{,}20 - 0{,}0005$$

oder auf zwei Dezimalstellen abgerundet

$$a = 0{,}36; \quad b = 0{,}23 \quad \text{und} \quad c = 0{,}20.$$

Die Formel für den Inhalt der Fässer lautet somit

$$(12)\quad V = h\,(0{,}36\,D^2 + 0{,}23\,Dd + 0{,}20\,d^2).$$

Nunmehr überzeugen wir uns, daß für die angenommenen Dezimalstellen die Koeffizienten a, b und c der Bedingung (6) nahezu genügen, und daß daher die vorgenommene Ausgleichung zu einem zutreffenden Ergebnis geführt hat.

Hinsichtlich der Maße h, D und d ist noch zu bemerken, daß h und D die *lichten* Abmessungen bedeuten, deren Ermittelung keine Schwierigkeit bietet; für den Durchmesser d ist jedoch das *äußere* Maß (siehe Fig. 2) genommen, welches jedenfalls bequemer und sicherer bestimmt werden kann, als der lichte Durchmesser d_1.

Zur Bestimmung des mittleren Fehlers der Formel (12) hat man die Summe $[vv]$ zu ermitteln und nach der Gleichung

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{10-3}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{7}}$$

zu rechnen; unter v sind hier die Fehler nach der Ausgleichung, also diejenigen von (12) zu verstehen. Nachstehende Tabelle 2 giebt diese Fehler v, die Zahlen vv und deren Summe.

Tabelle 2.

V	v	vv	V	v	vv
17,07	− 0,13	0,0169	65,27	+ 0,27	0,0729
21,29	− 0,31	0,0961	75,40	− 0,40	0,1600
31,67	+ 0,07	0,0049	110,62	+ 0,22	0,0484
38,46	+ 0,46	0,2116	118,04	− 0,16	0,0256
51,75	+ 0,55	0,3025	170,80	− 0,20	0,0400
				$[vv]$ =	0,9789.

Hiernach berechnet sich der mittlere Fehler unserer Formel (12) zu

$$m = \pm\sqrt{\frac{0{,}9789}{7}} = \pm\sqrt{0{,}1398} = \pm\, 0{,}37;$$

es folgt hieraus, daß der Formel (12) ein mittlerer Fehler von $\pm\, 0{,}37$ Liter anhaftet, ein Ergebnis, welches befriedigen wird, zumal eine genauere Bestimmung des Faßinhaltes schon wegen der bei Herstellung der Fässer nicht zu vermeidenden Unebenheiten im Innern derselben kaum zu erwarten sein wird.

Setzt man in (12) noch $\frac{D}{d} = n$, so entsteht

$$V = hd^2(0{,}36\, n^2 + 0{,}23\, n + 0{,}20) = qhd^2,$$

welche Formel nach Feststellung der Verhältniszahl n für die Inhaltsbestimmung nicht unbequem ist, sofern man zu diesem Zwecke nachstehende Tabelle 3 benutzt, deren Zahlenwerte man auch in einer Zeichnung vereinigen kann, indem man n als Abszisse und q als Ordinate aufträgt.

Tabelle 3.

n	q	n	q
1,00	0,7900	1,35	1,1666
1,05	0,8384	1,40	1,2276
1,10	0,8886	1,45	1,2904
1,15	0,9406	1,50	1,3550
1,20	0,9944	1,55	1,4214
1,25	1,0500	1,60	1,4896
1,30	1,1074	1,65	1,5596

Saarbrücken, den 4. August 1905. Ingenieur E. Puller.

Die numerische Auflösung kubischer Gleichungen.

Vorgelegt sei die kubische Gleichung

$$x_0^3 + a_0x_0^2 + b_0x_0 = c_0. \tag{0}$$

Man denke sich aus (0) sukzessive n weitere kubische Gleichungen

$$x_\nu^3 + a_\nu x_\nu^2 + b_\nu x_\nu = c_\nu \tag{ν}$$

gebildet, von denen jede folgende aus der ihr vorhergehenden mittels der Substitution

$$x_\nu = r_\nu + \frac{x_{\nu+1}}{10}$$

erhalten ist, wobei die r_ν gewisse positive ganze Zahlen sind.

Ist nun $\omega_{\nu+1}$ eine Wurzel von $(\nu+1)$, so ist $\omega_\nu = r_\nu + \frac{1}{10}\omega_{\nu+1}$ eine Wurzel von (ν).

Ist mithin ω_n eine Wurzel von (n), so ist

$$\omega_{n-1} = r_{n-1} + \tfrac{1}{10}\omega_n \quad \text{eine Wurzel von } (n-1),$$

und deshalb

$$\omega_{n-2} = r_{n-2} + \tfrac{1}{10}\omega_{n-1} \quad \text{,, \quad ,, \quad ,,} \quad (n-2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega_0 = r_0 \quad + \tfrac{1}{10}\omega_1 \quad \text{,, \quad ,, \quad ,,} \quad (0).$$

Aus diesen n Zeilen folgt

$$\omega_0 = r_0 + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^3} + \cdots + \frac{r_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{\omega_n}{10^n}.$$

Sind nun die Größen r Ziffern, liegt ferner ω_n zwischen 0 und 10, und ist r_n die größte ganze Zahl, die ω_n nicht übertrifft, so liegt die Wurzel ω_0 zwischen

$$r_0,\ r_1 r_2 r_3 \ldots r_{n-1} r_n$$

und

$$r_0,\ r_1 r_2 r_3 \ldots r_{n-1} r_n',$$

wo $r_n' = r_n + 1$ ist und die r_ν die Plätze von Dezimalstellen einnehmen.

Um die Bedingungen

$$0 \leqq r_\nu < 10, \quad \nu \neq 0$$
$$0 \leqq \omega_n < 10$$

zu realisieren, beschränke man sich auf positive Wurzeln und verfahre wie folgt.

Unter $g(\alpha)$ werde die größte ganze Zahl verstanden, die die positive Größe α nicht übertrifft.

Sei α_0 eine positive Wurzel von (0), von der man nur weiß, daß sie zwischen den beiden bekannten Zahlen $g(\alpha_0)$ und $g(\alpha_0)+1$ liegt. Man wähle

$$r_0 = g(\alpha_0);$$

dann folgt aus

$$x_1 = 10(x_0 - r_0),$$

daß (1) sicher eine Wurzel α_1 zwischen 0 und 10 besitzt. Man bestimme $g(\alpha_1)$ und wähle

$$r_1 = g(\alpha_1);$$

dann folgt aus

$$x_2 = 10(x_1 - r_1),$$

daß (2) sicher eine Wurzel α_2 zwischen 0 und 10 hat. Man wähle jetzt

$$r_2 = g(\alpha_2) \text{ usw.}$$

Schließlich kommt man zur Gleichung (n), die auch sicher eine Wurzel, etwa α_n, zwischen 0 und 10 besitzt. Endlich wähle man

$$r_n = g(\alpha_n).$$

Dann ist

$$r_0, r_1 r_2 r_3 r_4 \ldots r_n$$

ein auf n Stellen richtiger Wurzelwert der vorgelegten Gleichung (0).

Zusatz 1.

Setzt man

$$r_\nu(r_\nu + a_\nu) = s_\nu,$$
$$b_\nu + s_\nu = t_\nu,$$

so ist

$$a_{\nu+1} = 10(a_\nu + 3r_\nu),$$
$$b_{\nu+1} = 100(s_\nu + t_\nu + r_\nu^2),$$
$$c_{\nu+1} = 1000(c_\nu - r_\nu t_\nu).$$

Auf diesen drei Formeln beruht die große Einfachheit des Rechenschemas.

Zusatz 2.

Aus

$$\alpha_n^3 + a_n\alpha_n^2 + b_n\alpha_n = c_n$$

folgt

$$\alpha_n = \frac{c_n}{b_n} - f_n,$$

wenn man den Ausdruck $\frac{\alpha_n^2(\alpha_n + a_n)}{b_n}$ der Kürze halber mit f_n bezeichnet.

Setzt man daher einfach

$$\alpha_n = \frac{c_n}{b_n},$$

so begeht man den Fehler f_n, der sehr leicht abzuschätzen ist. *Besitzt nämlich* $\alpha_n^2(\alpha_n + a_n)$ *nicht mehr als m Stellen vor dem Komma,* b_n *dagegen genau M Stellen* (vor dem Komma), *so liefert die Division von* c_n *durch* b_n *weitere* $M - m$ *richtige Dezimalstellen zur Wurzel* α_0, *von denen die letzte noch nicht um eine Einheit falsch ist.*

Das ergibt sich sofort aus

$$\alpha_0 = r_0, r_1 r_2 \ldots r_{n-1} + \frac{\alpha_n}{10^n}.$$

Zusatz 3.

Hat (ν) zwischen r_ν und $r_\nu + 1$ nur eine Wurzel, so hat ($\nu + \mu$), wo μ beliebig > 0 ist, zwischen 0 und 10 nur eine Wurzel.

Zusatz 4.

Besitzt die Ziffer z die beiden Eigenschaften

$$z\{z(z + a_\nu) + b_\nu\} \leqq c_\nu,$$
$$z'\{z'(z' + a_\nu) + b_\nu\} > c_\nu,$$

wo $z' = z + 1$ ist, so wähle man

$$r_\nu = z.$$

Dieselbe Wahl führt zum Ziele, wenn gleichzeitig

$$z\{z(z + a_\nu) + b_\nu\} \geqq c,$$
$$z'\{z'(z' + a_\nu) + b_\nu\} < c$$

ist.

Zusatz 5.

Ist α_0 so groß, daß r_0 nicht leicht zu finden ist, so rücke man in a_0, b_0, c_0 das Komma beziehungsweise n, $2n$, $3n$ Stellen nach links, indem man n geeignet wählt, bestimme eine Wurzel β aus dem neuen Tripel

$$\frac{a_0}{10^n}, \quad \frac{b_0}{10^{2n}}, \quad \frac{c_0}{10^{3n}}$$

und rücke in dem gefundenen β das Komma wieder n Stellen nach rechts, so hat man damit α_0:

$$\alpha_0 = 10^n \cdot \beta.$$

Zwei Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

Beispiel 1. Die Gleichung des Johannes von Palermo, zuerst gelöst von Leonardo von Pisa (vgl. Cantor, Geschichte der Mathematik, Bd. 2, S. 46, 47).

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Die praktische Berechnung der Wurzel besteht aus ebensoviel Schritten, wie Dezimalen erzeugt werden sollen, abgesehen von jenen Dezimalen, die am Ende der Rechnung durch Abschätzung entstehen. Die Ausführung eines Schrittes mit der Einleitung zum folgenden ergibt folgende Zahlengruppierung

a_ν	b_ν	c_ν	r_ν
	s_ν		
$3r_\nu$	t_ν	$r_\nu t_\nu$	
$a_{\nu+1}$	$b_{\nu+1}$	$c_{\nu+1}$	

Die Ziffern r_ν findet man bei den ersten Schritten durch Versuche, sehr bald aber viel einfacher durch den Ansatz

$$r_\nu = g\left(\frac{c_\nu}{b_\nu}\right).$$

Bei Berücksichtigung dieser Bemerkungen wird das folgende Rechenschema ohne weiteres verständlich erscheinen.

2	10	20	1
	3		
3	13	13	
50	1700	7000	3
	159		
9	1859	5577	
590	202700	1423000	6
	3576		
18	206276	1237656	
6080	20988800	185344000	8
	48704		
24	21037504	168300032	
61040	2108627200	17043968000	8

Fährt man so fort, so bekommt man die weiteren Stellen 081 und

$$a_8 = 610642430,$$
$$b_8 = 21096139243876830 0,$$
$$c_8 = 16500076656455900 0.$$

Hieraus folgt $\alpha_8 = 0, \ldots$, d. h. $\alpha_8 < 1$, d. h.

$$f_8 < \frac{a_8 + 1}{b_8}.$$

$a_8 + 1$ hat 9 Stellen, b_8 dagegen 18 Stellen. Mithin liefert die Division $c_8 : b_8$ nicht weniger als $18 - 9 = 9$ richtige neue Stellen für α_0; nämlich die Stellen 078213726, so daß endlich

$$\alpha_0 = 1{,}3688081078213726,$$

wo die 6 am Ende noch nicht um eine Einheit zu groß ist.

Beispiel 2. Die kubische Gleichung

$$x^3 - 3x = -1$$

besitzt die drei Wurzeln $2 \sin 10^0$, $2 \sin 50^0$ und $-2 \sin 70^0$. Man findet, daß eine Wurzel, etwa α_0, zwischen 0 und 1 liegt, und man erhält dementsprechend folgendes Schema

00	− 300	− 1000	03
	+ 9		
9	− 291	− 873	
90	− 27300	− 127000	4
	+ 376		
12	− 26924	− 107696	
1020	− 2653200	− 19304000	7
	+ 7189		
21	− 2646011	− 18522077	
10410	− 263877300	− 781923000	2

Man findet ferner $r_5 = 9$ und

$$a_6 = 1041870,$$
$$b_6 = -2638168967700,$$
$$c_6 = -16766402489000.$$

Demnach ist $\alpha_6 < 7$, $\alpha_6^2 < 50$, und da $a_6 + \alpha_6$ 7 Stellen vor dem Komma hat, so besitzt $\alpha_6^2(\alpha_6 + a_6)$ höchstens 8 Stellen, während b_6 13-stellig ist. Also liefert die Division $c_6 : b_6$ weitere 5 Stellen, nämlich 63553, so daß

$$2 \sin 10^0 = 0{,}3472963553$$

wo die drei am Ende noch nicht um eine Einheit zu klein ist.

Man vergleiche die vorstehende Methode mit den Methoden von Lagrange und Heis, die auf ähnlichen Gedanken beruhen, in der praktischen Handhabung aber minder einfach sind.

Das dargelegte Verfahren läßt sich übrigens ohne Mühe auf Gleichungen höheren Grades erweitern. Auch die Anwendung auf quadratische Glei-

chungen liefert einfache Resultate. Hier dienen zur Berechnung von $a_{\nu+1}$ und $b_{\nu+1}$ die Rekursionsformeln

$$a_{\nu+1} = 10(a_\nu + 2r_\nu),$$
$$b_{\nu+1} = 100(b_\nu - r_\nu \overline{r_\nu + a_\nu}),$$

wobei man sich die Gleichung (ν) in der Form

$$x_\nu^2 + a_\nu x_\nu = b_\nu$$

zu denken hat. Auch hier liefert die Abschätzung eine beträchtliche Anzahl neuer Dezimalen. Aus

$$\alpha_n^2 + a_n\alpha_n = b_n$$

folgt

$$\alpha_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{\alpha_n^2}{a_n}.$$

Besitzt demnach a_n M Stellen (vor dem Komma), α_n^2 höchstens m Stellen, so liefert die Division $b_n : a_n$ weitere $M - m$ Stellen zur Wurzel α_0, deren letzte noch nicht um eine Einheit falsch ist.

Wie angenehm das Verfahren sich in der Praxis gestaltet, mag ein Beispiel zeigen.

$$x^2 + 97{,}4621\,x = 253{,}79.$$

97,4621	253,79	2
4	198,9242	
1014,621	5476,58	5
10	5098,105	
10246,21	37847,5	3
6	30747,63	
102522,1	709987	7
14	717703,7	
1025361	9228330	9
	9228330	
	0	

Eine Wurzel der obigen Gleichung ist demnach 2,5379. Sie ist so schneller ermittelt worden, als es auf dem gewöhnlichen Wege möglich gewesen wäre.

Biedenkopf, den 2. November 1905. H. Dörrie.

Auflösung der transzendenten Gleichung $x = y + \sin y$.

1. In der folgenden kleinen Arbeit handelt es sich um eine ziemlich elementare und vollständige Lösung der transzendenten Gleichung $\cos\eta = \eta$. Vorbildlich war mir dabei die Lösung der transzendenten Gleichung $\tan\eta = \eta$, welche von Euler, Introductio in Anal., Lib. II, Cap. XXII, § 539 (vgl. auch Cauchy Oeuvres 2, VI. p. 354, Bertrand, Algèbre 1870, II. p. 284 und Catalan, Cours d'Analyse p. 297 usw.) durch die berühmte Formel

$$\eta = (n + \tfrac{1}{2})\pi - \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} - \frac{2}{3(n+\frac{1}{2})^3\pi^3} - \cdots$$

gegeben und von Hermite (Arch. d. Math. u. Phys. (3) **1**, 22) verallgemeinert wurde. — Die Koeffizienten der von mir erhaltenen Formel für die Gleichung $\cos\eta = \eta$:

$$\eta = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{96}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{1920}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \cdots$$

reichen gerade auch hin, um die Funktion $x = y + \sin y$ nach der Bürmannschen Regel umzukehren, sowie auch die Koeffizienten der Cauchyschen Reihe nicht nur zur Lösung der transzendenten Gleichung $\cot\eta + \eta = 0$, sondern auch zur allgemeinen Auflösung der Gleichung $x = \dfrac{\sin y}{\cos y + y\sin y}$ nach y ausreichen. — Ich glaubte also, der Auflösung der transzendenten Gleichung $\cos\eta = \eta$ die Umkehrung der Gleichung $x = y + \sin y$ voranstellen zu sollen, habe aber nirgends darauf Bezug genommen, daß dies eine Keplersche Gleichung für $\varepsilon = -1$ ist, weil die mir bekannten Lösungen letzterer für diesen Fall nicht brauchbar waren.

2. Die in der Gleichung

$$x = y + \sin y \tag{1}$$

rechtsstehende Funktion von y wird Null für $y = 0$ und der absolute Betrag von x wächst fortwährend, während y von Null bis π wächst. Der Differentialquotient $1 + \cos y$ wird das erstemal Null für $y = \pi$; es wird nun $|x| = \pi$ für $y = \pi$, so daß die Entwicklung

$$y = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1}\cdot x + \frac{\lambda_2}{1.2}\cdot x^2 + \frac{\lambda_3}{1.2.3}\cdot x^3 + \cdots \tag{2}$$

gültig ist, solange $|x| < \pi$ ist. Hierin ist nach dem Mac-Laurinschen Satze:

$$\lambda_n = \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{(x=0,\, y=0)}. \tag{3}$$

Man bemerkt sofort, daß die λ mit geradem Index Null werden, da y eine ungerade Funktion von x ist.

Um λ_n zu entwickeln, hat man $x - y = \sin y$ und durch Differentiation dieser Gleichung:

$$1 - y' = y'\cdot\cos y. \tag{4}$$

Hieraus folgt vermöge $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ die Gleichung:

$$(x-y)^2 y'^2 + 1 - 2y' = 0. \tag{5}$$

Eine Differentiation dieser Gleichung ergibt:

$$2(x-y)(1-y')y'^2 + 2(x-y)^2 y' y'' - 2y'' = 0;$$

daraus erhalten wir nach einigen Reduktionen und unter Benützung der Gleichung (5):

$$y'' - (x-y)y'^3 = 0 \tag{6}$$

Multiplizieren wir (5) mit y' und (6) mit $(x-y)$ und addieren dann beide Gleichungen, so erhalten wir:

$$y''(x-y) + y'(1-2y') = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung differenzieren wir $2n$-mal, x als die unabhängige Variable betrachtend:

$$(x-y)y^{(2n+2)}+\binom{2n}{1}(1-y')y^{(2n+1)}-\binom{2n}{2}y''y^{(2n)}-\binom{2n}{3}y'''y^{(2n-1)}-\cdots$$
$$-y^{(2n)}y''+(1-2y')y^{(2n+1)}-2\binom{2n}{1}y''y^{(2n)}-2\binom{2n}{2}y'''y^{(2n-1)}-\cdots$$
$$-2y^{(2n+1)}y'=0.$$

Setzen wir hierin die Glieder mit geraden Differentialquotienten $=0$, ferner $x=0$ und $y=0$, so erhalten wir unter Benützung von (3):

$$2n\lambda_{2n+1}-2n\lambda_1\lambda_{2n+1}-\sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n}{2i+1}\lambda_{2i+1}\lambda_{2n-2i+1}+\lambda_{2n+1}-2\lambda_1\lambda_{2n+1}-$$
$$-2\sum_{i=1}^{n-1}\binom{2n}{2i}\lambda_{2i+1}\lambda_{2n-2i+1}-2\lambda_1\lambda_{2n+1}=0.$$

Da nun, wie aus (4) hervorgeht, $\lambda_1=\frac{1}{2}$ ist, so ist weiter:

$$(n-1)\lambda_{2n+1}-\sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{2n}{2i+1}+2\binom{2n}{2i}\right]\lambda_{2i+1}\lambda_{2n-2i+1}=0,$$

oder:

$$\lambda_{2n+1}=\frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n+i+1}{2i+1}\binom{2n}{2i}\lambda_{2i+1}\lambda_{2n-2i+1}. \tag{8}$$

Von den beiden Werten $\lambda_1=\frac{1}{2}$ und $\lambda_3=\frac{1}{16}$ ausgehend finden wir mit Hilfe dieser Rekursionsformel:

$$\lambda_5=\frac{1}{16},\quad \lambda_7=\frac{43}{256},\quad \lambda_9=\frac{223}{256},\quad \lambda_{11}=\frac{60623}{8192},$$
$$\lambda_{13}=\frac{764783}{8192},\quad \lambda_{15}=\frac{107351407}{65536},\ \text{etc.}$$

Daher ist die Gleichung $x=y+\sin y$ nach y aufgelöst:

$$y=\frac{\lambda_1}{1}x+\frac{\lambda_3}{3!}x^3+\frac{\lambda_5}{5!}x^5+\cdots, \tag{9}$$

doch nur für solche x, deren absoluter Betrag kleiner als π ist. Ist x reell, so muß $-\pi<x<+\pi$ sein.

3. Ist der absolute Betrag von x größer als π, so zerlegen wir x in $2s\pi\pm\xi$, worin $\xi<\pi$, und setzen ebenso $y=2s\pi\pm\eta$. Dadurch geht (1) über in $\xi=\eta+\sin\eta$, welche Gleichung nach (9) aufzulösen ist.

4. Liegt die Gleichungsform $x=y-\sin y$ vor, so können wir diese leicht mittels der Substitution $x=(2s+1)\pi\pm\xi$ (worin $\xi<\pi$) und $y=(2s+1)\pi\pm\eta$ auf die Form $\xi=\eta+\sin\eta$ bringen.

(Ist x gleich einem Vielfachen von π, dann ist $y=x$.)

5. Ist x rein imaginär, so setzen wir $x=i\xi$ und entsprechend $y=i\eta$, worin ξ und η wieder reell sind. Die Gleichung (1) lautet dann:

$\xi = \eta + \frac{e^\eta - e^{-\eta}}{2}$ oder auch $\xi = \eta + \sinh p\, \eta$. Dieselbe Substitution auf (9) angewandt liefert dann:

$$\eta = \frac{\lambda_1}{1}\,\xi - \frac{\lambda_3}{3!}\,\xi^3 + \frac{\lambda_5}{5!}\,\xi^5 - \cdots,$$

ξ muß wieder zwischen $-\pi$ und $+\pi$ enthalten sein.

6. Auch die transzendente Gleichung $\eta - \cos\eta = 0$ ist nach der Formel (9) lösbar. Wir erhalten diese Form, wenn wir in (1) für $x = \frac{\pi}{2}$ und $y = \frac{\pi}{2} - \eta$ setzen. Als Lösung der Gleichung $\cos\eta = \eta$ ergibt sich also unmittelbar, indem wir dieselbe Substitution auch auf die Reihe (9) anwenden:

$$\eta = \lambda_1\,\frac{\pi}{2} - \frac{\lambda_3}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{\lambda_5}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \cdots,$$

oder wenn wir die Zahlenwerte einsetzen:

$$\begin{array}{r} +\,0{\cdot}785\,398_2 \\ -\,0{\cdot}040\,372_8 \\ -\,0{\cdot}004\,980_8 \\ -\,0{\cdot}000\,786_4 \\ -\,0{\cdot}000\,139_8 \\ -\,0{\cdot}000\,026_6 \\ -\,0{\cdot}000\,005_3 \\ -\,0{\cdot}000\,001_1 \\ -\,0{\cdot}000\,000_2 \\ \hline \eta = +\,0{\cdot}739\,085_2 \end{array}$$

Dieses Resultat ist auf sechs Dezimalstellen genau; Euler gibt die Wurzel 0,7390847 (Introd. in Anal. Lib. II, Cap. XXII, § 531).

Aussig (Böhmen). stud. math. JOSEF KRUG.

Die Magnussche Funktionalgleichung im Zusammenhang mit der Differentialgleichung $\varrho(x, y)\,dx + \varrho(y, x)\,dy = 0$.

Im 5. Bd. des Crelleschen Journals untersucht Magnus die Funktionalgleichung:

$$F_1(y)\cdot\varphi_1(x) + \cdots + F_n(y)\cdot\varphi_n(x) = F_1(x)\cdot\varphi_1(y) + \cdots + F_n(x)\cdot\varphi_n(y)$$

und findet, daß dieselbe durch folgendes Linearsystem gelöst wird:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= c_{11}\varphi_1(x) + c_{12}\varphi_2(x) + \cdots + c_{1n}\varphi_n(x), \\ F_2(x) &= c_{21}\varphi_1(x) + c_{22}\varphi_2(x) + \cdots + c_{2n}\varphi_n(x), \qquad (c_{ik} = c_{ki}) \\ &\vdots \\ F_n(x) &= c_{n1}\varphi_1(x) + c_{n2}\varphi_2(x) + \cdots + c_{nn}\varphi_n(x). \end{aligned}$$

Ich habe bei anderer Gelegenheit durch ein ganz auf die symmetrische Form dieser Funktionalgleichung gegründetes Verfahren das gleiche Resultat

erhalten und dasselbe zur Bestimmung von Flächen aus angenommenen Eigenschaften benutzt, was bei der Untersuchung der Flächen, welche dem partikulären Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ entsprechen, sehr nahe liegt.[1])

Im vorliegenden Aufsatz wird ein Typus von Aufgaben behandelt, bei welchen die Magnussche Funktionalgleichung im Zusammenhang mit der Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\varrho(x, y)dx + \varrho(y, x)dy \equiv \varrho_x dx + \varrho_y dy = 0$$

eine wesentliche Rolle spielt. In dieser Form erscheint jede Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$, deren Integral $\sigma(x, y) \equiv \sigma(y, x) = C$ bezüglich der Variablen symmetrisch ist. Es ist nämlich $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = p(x, y) \cdot M(x, y)$, also $\frac{\partial \sigma}{\partial y} = p(y, x) \cdot M(y, x)$, andererseits $\frac{\partial \sigma}{\partial y} = p(x, y) \cdot N(x, y)$, somit:

$$N(x, y) = \frac{p(y, x)}{p(x, y)} \cdot M(y, x).$$

Aus $Mdx + Ndy = 0$ wird daher:

$$p(x, y) M(x, y)dx + p(y, x) M(y, x)dy = 0 \qquad \text{oder:}$$

$$\varrho(x, y)dx + \varrho(y, x)dy = 0.$$

Natürlich kann dieser Beweis auch geometrisch sehr leicht geführt werden. Aus der Tatsache, daß die Differentialgleichung $\varrho_x dx + \varrho_y dy = 0$ eine symmetrische Lösung σ hat, folgt von selbst, daß auch jeder Multiplikator s eine symmetrische Funktion ist, wie aus $\frac{1}{\varrho_x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} = s = \frac{1}{\varrho_y}\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ hervorgeht.

Mit dieser Beziehung stehen die beiden folgenden Gleichungen:

$$(A) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(s \cdot \varrho_x) = \frac{\partial}{\partial x}(s \cdot \varrho_y) \qquad \text{und}$$

$$(B) \qquad \varrho_x \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \varrho_y \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

im engsten Zusammenhang und lassen die Sätze erkennen:

„Die Aufgabe, einen Multiplikator von $\varrho_x dx + \varrho_y dy = 0$ zu finden, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, eine symmetrische Funktion s so zu bestimmen, daß der Ausdruck $\frac{\partial}{\partial y}(s \cdot \varrho_x)$ selbst eine symmetrische Funktion der Argumente wird."

„Die Aufgabe, das Integral $\sigma = C$ von $\varrho_x dx + \varrho_y dy = 0$ zu finden, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, eine symmetrische Funktion σ so zu bestimmen, daß der Ausdruck $\varrho_x \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y}$ selbst eine symmetrische Funktion der Argumente wird."

Leicht ist auch einzusehen, daß $\varrho_x dx + \varrho_y dy = 0$ immer integriert werden kann, wenn $\varrho(x, y)$ eine homogene Funktion n-ten Grades ist; denn mit ϱ_x ist auch ϱ_y eine homogene Funktion gleichen Grades, und es gilt bekanntlich der Satz: „Sind P und Q homogene Funktionen von gleichem

1) Wendler „Über die Flächen, welche dem partikulären Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ entsprechen." (Diss. München 1900.)

Grad, so kann man eine andere homogene Funktion u so bestimmen, daß diese Multiplikator wird, z. B. $u = \frac{1}{P \cdot x + Q \cdot y}$".

Als einfacher Spezialfall der Gleichung $\varrho_x dx + \varrho_y dy = 0$ erscheint

$$\text{(I)} \qquad \sum_1^n \alpha_i(x) \cdot \beta_i(y)\, dx + \sum_1^n \alpha_i(y) \cdot \beta_i(x)\, dy = 0,$$

indem zugleich der Zusammenhang mit der Magnusschen Funktionalgleichung deutlich hervortritt. Stellt man z. B. die Integrabilitätsbedingung für I auf, so erscheint die Magnussche Funktionalgleichung:

$$\sum_1^n \alpha_i(x)\beta_i'(y) = \sum_1^n \alpha_i(y) \cdot \beta_i'(x)$$

mit dem zugehörigen Linearsystem:

$$\alpha_r(x) = c_{r,1}\beta_1'(x) + \cdots c_{r,n}\beta_n'(x) \qquad (r = 1, 2, \cdots n).$$

In diesen n Gleichungen mit $2n$ Unbekannten bleiben n Funktionen willkürlich, so daß es also ganz allgemein auf $\frac{2n!}{n!\,n!}$ wesentlich verschiedene Arten möglich ist, die vorgelegte Differentialgleichung (I) so zu bestimmen, daß ihre linke Seite ein totales Differential ist.

Ganz analog können folgende Aufgaben behandelt werden:

1. Gibt es eine Differentialgleichung von der Form:

$$(\varphi(x) + \psi(y))\, dx + (\varphi(y) + \psi(x))\, dy = 0,$$

mit dem Multiplikator $s = \chi(x) + \chi(y)$, bezw. dem Integral

$$\sigma = \chi(x) + \chi(y)?$$

Im ersten Falle liefert die Bedingungsgleichung (A):

$$\chi(x) \cdot \psi'(y) + \varphi(x) \cdot \chi'(y) + \frac{d}{dy}[\psi(y) \cdot \chi(y)] =$$
$$\chi(y) \cdot \psi'(x) + \varphi(y) \cdot \chi'(x) + \frac{d}{dx}[\psi(x) \cdot \chi(x)].$$

Aus dem zugehörigen Linearsystem:

$$\chi(x) = c_{11}\psi'(x) + c_{12}\chi'(x) + c_{13}\frac{d}{dx}[\psi(x) \cdot \chi(x)],$$
$$\varphi(x) = c_{21}\psi'(x) + c_{22}\chi'(x) + c_{13}\frac{d}{dx}[\psi(x) \cdot \chi(x)],$$
$$1 = c_{31}\psi'(x) + c_{32}\chi'(x) + c_{33}\frac{d}{dx}[\psi(x) \cdot \chi(x)]$$

bestimmen sich die drei Funktionen φ, ψ, χ in ihrer allgemeinsten Form. Der Spezialfall $c_{13} = c_{23} = c_{12} = 0$ liefert z. B.

$$\psi = \sqrt{mx^2 + nx + p}, \quad \chi = c_{11} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \sqrt{\cdots}, \quad \varphi = c_{11} \cdot c_{22} \cdot \frac{d^2}{dx^2}\sqrt{\cdots}$$

Im zweiten Fall, wo das Integral σ die Form $\chi(x) + \chi(y)$ haben soll, gibt die Bedingungsgleichung (B) eine Magnussche Funktionalgleichung mit dem Lösungssystem:

$$\varphi(x) = [c_{11} + c_{12}\psi(x)] \cdot \chi'(x), \quad 1 = [c_{12} + c_{22}\psi(x)] \cdot \chi'(x).$$

Hier bleibt eine Funktion willkürlich, und man findet z. B.

$$\int\frac{dx}{c_{12}+c_{22}\psi(x)}+\int\frac{dy}{c_{12}+c_{22}\psi(y)}=C$$

als Integral der Differentialgleichung:

$$\left[\psi(y)+\frac{c_{11}+c_{12}\psi(x)}{c_{12}+c_{22}\psi(x)}\right]dx+\left[\psi(x)+\frac{c_{11}+c_{12}\psi(y)}{c_{12}+c_{22}\psi(y)}\right]dy=0.$$

2. Unterwirft man jetzt die Differentialgleichung I der Bedingung (A), bezw. (B), indem man wieder $s=\chi(x)+\chi(y)$ bezw. $\sigma=\chi(x)+\chi(y)$ voraussetzt, so erhält man im ersten Fall eine Funktionalgleichung mit dem Linearsystem:

$$\chi(x)\cdot\alpha_r(x)=c_{r,1}\beta_1'(x)+\cdots+c_{r,n}\beta_n'(x)+c_{r,n+1}\frac{d}{dx}(\chi(x)\cdot\beta_1(x))+\cdots+c_{r,2n}\frac{d}{dx}(\chi(x)\cdot\beta_n(x))$$

$$\alpha_r(x)=c_{n+r,1}\beta_1'(x)+\cdots c_{n+r,n}\beta_n'(x)+c_{n+r,n+1}\frac{d}{dx}(\chi(x)\cdot\beta_1(x))+\cdots+c_{n+r,2n}\frac{d}{dx}(\chi(x)\cdot\beta_n(x))$$

$$(r=1,2,\cdots n).$$

Im zweiten Fall erhält man dagegen aus (B) eine Funktionalgleichung mit dem Linearsystem:

$$\frac{\alpha_r(x)}{\chi'(x)}=c_{r,1}\beta_1(x)+\cdots+c_{r,n}\beta_n(x)\qquad(r=1,2,\cdots n).$$

Während im ersten Fall $2n$ Gleichungen mit $2n+1$ Unbekannten vorliegen, also eine Funktion willkürlich bleibt, werden im zweiten Fall bei n Gleichungen mit $2n+1$ Unbekannten $n+1$ Funktionen überschüssig. Es ist somit auf $\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$ wesentlich verschiedene Arten möglich, eine Gleichung (I) mit zugehörigem Integral von der Form $\chi(x)+\chi(y)$ herzustellen.

Auch die Voraussetzung eines Multiplikators $s=\chi(x)\cdot\chi(y)$ für die Gleichung (I) führt auf Grund von (A) auf ein Linearsystem mit n Gleichungen und $2n+1$ Unbekannten, nämlich:

$$\alpha_r(x)\cdot\chi(x)=c_{r,1}\frac{d}{dx}[\chi(x)\cdot\beta_1(x)]+\cdots+c_{r,n}\frac{d}{dx}[\chi(x)\cdot\beta_n(x)]$$

$$(r=1,2,\cdots n).$$

3. Setzt man für die Differentialgleichung (I) ein Integral von der Form $\sigma=\sum_1^n\gamma_i(x)\cdot\gamma_i(y)$ voraus, so fließt aus der Bedingung (B) ein Linearsystem von $m\cdot n$ Gleichungen mit $2n+m$ zu bestimmenden Funktionen. Somit bleiben $2n+m-mn$ Funktionen willkürlich für $2n+m>mn$; die Funktionen bestimmen sich gerade für $2n+m=mn$, und bei $2n+m<mn$ gibt es nur dann überhaupt noch Funktionen, welche der Bedingung genügen, wenn sich durch Spezialisierung der Konstanten c_{ik} die überschüssigen Gleichungen reduzieren lassen.

4. Kann eine Differentialgleichung von der Form:

$$\varphi(x)^{\psi(y)}dx+\varphi(y)^{\psi(x)}dy=0$$

ein Integral $\chi(x)+\chi(y)$ haben?

Die Bedingungsgleichung $(B.)$ gibt:

$$\psi(y)\cdot\log\varphi(x)+\log\chi'(y)=\psi(x)\log\varphi(y)+\log\chi'(x)$$

und hieraus:

$$\log \varphi(x) = c_{11}\psi(x) + c_{12} \log \chi'(x)$$
$$1 = c_{21}\psi(x) + c_{22} \log \chi'(x).$$

Eine der drei Funktionen φ, ψ, χ bleibt willkürlich. In dem bemerkenswerten Fall:

$$\varphi(x)^{\sum_1^n \alpha_i(x)\cdot\beta_i(y)} dx + \varphi(y)^{\sum_1^n \alpha_i(y)\cdot\beta_i(x)} dy = 0\,, \quad \sigma = \chi(x) + \chi(y)\,,$$

wobei aus

$$\sum_1^n [\log \varphi(x) \cdot \alpha_i(x) \cdot \beta_i(y)] + \log \chi'(y) = \sum_1^n [\log \varphi(y) \cdot \alpha_i(y) \cdot \beta_i(x)] + \log \chi'(x)$$

das entsprechende Linearsystem sich ergibt, bleiben bei $n+1$ Gleichungen mit $2n+2$ Unbekannten $n+1$ Funktionen disponibel.

Windsbach, den 9. Juni 1902. A. Wendler.

Nachträgliche Bemerkung: Es sei darauf hingewiesen, daß die oben erwähnte Magnussche Funktionalgleichung nur ein Spezialfall von der allgemeineren Funktionalgleichung $\sum_1^n A_i(x) \cdot B_i(y) = \sum_1^n C_i(x) \cdot D_i(y)$ ist. (Wendler, „Beiträge zur Theorie der Translationsflächen"; Prg. Theresien-Gymnasium, München 1904.) In diesem Zusammenhange wäre auch auf eine in dieser Zeitschrift (**6**, 46, 1903) erschienene Abhandlung von Pexider hinzuweisen: „Über symmetrische Funktionen von unabhängigen Variablen".

München, im September 1906. A. Wendler.

---

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Herzog Albrecht-Allee 27.

I. Band, I B 2, S. 399. Nr. **26.** Realitätsfragen.

Es wird behauptet: H. Schramm ersetzt einmal die Sturmschen Funktionen durch eine Reihe von Kovarianten, *sodann durch eine Reihe von Invarianten.* H. Schramm hat zwar einige Invariantenkriterien in der zitierten Abhandlung aufgestellt, aber seine Invariantenkriterien sind nicht von solcher Art, daß sie die *genaue* Anzahl der reellen Wurzeln zu bestimmen gestatten (wie z. B. die Sturmschen Funktionen oder Schramms Kovariantenkriterien). Die angeführte Behauptung ist also (in bezug auf die Invariantenkriterien) zu präzisieren.

I. Band, I C 2, e, S. 627.

Es wird folgendes Zitat angeführt: „Für 10, 11, 12 Quadrate Liouville, J. de math. (2) 5 (1860) p. 143, 6 (1861) p. 233, 9 (1864) p. 296, 10 (1865) p. 1." An diesen Stellen ist nirgends von 11 Quadraten die Rede (statt 10 (1865) p. 1 ist übrigens 11 (1866) p. 1 zu lesen).

Prag. K. Petr.

Zu II A 11.

S. 798, Fußnote 166. Hier wäre noch die Note von E. B. Wilson, Annals of Math. 2d. Ser. Vol. 1 (1899) p. 47. zu erwähnen, worin bewiesen wird, daß jede nicht überall stetige Lösung der Gleichung $f(x+y)=f(x)f(y)$ in jedem Intervalle jedem beliebigen Werte beliebig nahe kommen muß.

S. 809. Eine Integralgleichung zweiter Art kommt schon bei J. Liouville vor, vgl. J. de math. Bd. 2 (1837) p. 25 oben, und wird in Reihenform in der seitdem üblich gewordenen Weise gelöst.

Cambridge, Mass. U. S. A. MAXIME BÔCHER.

Zu II A 11.

„Le no. 10 de l'Article II A 11 de *l'Encyklopädie* a le seul but de rappeler que la théorie générale des opérations et les règles de leur composition et décomposition s'appliquent à la théorie des expressions linéaires homogènes différentielles ou aux différences finies. Les citations qui se trouvent dans ce no. sont donc nécessairement incomplètes: comme cela est exprimé dans le texte, elles se rapportent surtout à la partie formelle de la théorie. Pour ce qui regarde l'étude plus profonde de la décomposition des expressions linéaires différentielles ou aux différences en facteurs, ce n'est pas dans cet article, mais dans ceux relatifs aux équations différentielles linéaires ou aux équations linéaires aux différences qu'on devra s'en occuper et en donner la littérature complète. Toutefois, je crois devoir compléter les citations aux notes 47) et 49) du dit article II A 11, en mentionnant les travaux suivants, dont l'importance, pour la décomposition des expressions différentielles linéaires et pour leur réductibilité, est fondamentale:

G. Frobenius, Über den Begriff der Irreduktibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, J. f. Math., Bd. 76, p. 236 (1873).

A. Loewy, Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen, Math. Ann., Bd. 56, p. 569 (1903).

Citons encore:

E. Landau, Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreduzible Faktoren, J. f. Math., Bd. 126, p. 115 (1902),

aussi parce que la citation d'un travail de T. Groth à la note 49) doit être complétée par celle d'une rectification (Berigtigelse) de cet auteur (Nyt tidsskr. f. Math., Bd. XVI, no. 3) qui se rapporte précisément au mémoire de Landau.“

Bologna, juin 1906. S. PINCHERLE.

III C 2, Nr. 76.

Der Satz S. 219, Z. 8 v. u. „Eine Rotationsfläche 2. Ordnung und eine Kugel haben nach Hesse eine doppelte Berührung in zwei Punkten des imaginären Kugelkreises“ ist unrichtig, findet sich auch nicht an der in Fußnote 353 angegebenen Stelle. Bloß die Schnittlinien der beiden Flächen mit der unendlich fernen Ebene haben eine doppelte Berührung.

Wien. E. MÜLLER.

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Andriessen, C., Über Erzeugnisse kongruenter Grundgebilde. Inaug. Diss. Straßburg i. E. 1906. 45 S.

Auerbach, F., Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Zweite Auflage. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 40. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 156 S. M. 1.25.

Beck, H., Die Strahlenketten im hyperbolischen Raum. Inaug. Diss. Bonn 1905. 55 S.

Blaschke, E., Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Leipzig 1906, B. G. Teubner. VIII u. 268 S. M. 7.40.

Bochow, K., Die Funktionen rationaler Winkel. Insbesondere über die numerische Berechnung der Winkelfunktionen ohne Benutzung der trigonometrischen Reihen und der Zahl π. Progr. Realschule. Magdeburg. Leipzig 1905, G. Fock. 40 S.

Bronzin, V., Lehrbuch der politischen Arithmetik zum Gebrauche an höheren Handelsschulen. Wien 1906, F. Deuticke. 172 S. M. 2.50.

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. Zweite, vermehrte Auflage. Ersten Bandes erster Teil Erste Lieferung. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 480 S. M. 16.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. 2., sorgfältig durchgesehene Auflage. I. Band. Mit 115 Figuren im Text. XIV u. 560 S. M. 12. II. Band. Mit 87 Figuren im Text. VIII u. 532 S. M. 12. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Durège, H., Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. 5. Aufl. Neubearbeitet von Dr. L. Maurer. Mit 41 Figuren im Text. Leipzig 1906, B. G. Teubner. X u. 397 S. M. 10.

Ebner, F., Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Leipzig 1906, B. G. Teubner. VIII u. 197 S. M. 4.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band III 2, Heft 3. H. G. Zeuthen, Abzählende Methoden. — L. Berzolari, Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven. Leipzig 1906, B. G. Teubner. M. 5.60.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Band IV 2, Heft 3: G. Zemplén, Besondere Ausführungen über unstetige Bewegung in Flüssigkeiten. — Ph. Forchheimer, Hydraulik. Leipzig 1906, B. G. Teubner. M. 5.80.

Fischer, O., Theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper. Mit speziellen Anwendungen auf den Menschen sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. Leipzig 1906, B. G. Teubner. X u. 372 S. M. 14.

Fréchet, M., 1re Thèse: Sur quelques points du calcul fonctionnel. — 2e Thèse: Propositions données par la Faculté. Thèses présentées à la Faculté des sc. de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sc. math. Paris 1906. 74 S.

Grimsehl, E., Ausgewählte physikalische Schülerübungen. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 42 S. M. 0.80.

Gruner, P., Die radioaktiven Substanzen und die Theorie des Atomzerfalles. Bern 1906, A. Francke. IV u. 103 S. M 1.60.

Grünfeld, E., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Progr. Staats-Realschule. Wien 1906. 20 S.

Heussi, J., Leitfaden der Physik. 16. Auflage. Neu bearbeitet von E. Götting. Berlin 1906, O. Salle. IX + 139 + 42 S. M. 1.80.

Hochheim, A., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene, Heft II. Die Kegelschnitte. Dritte, vermehrte Auflage. Bearbeitet von O. Jahn und F. Hochheim. Leipzig 1905, B. G. Teubner. 90 S. M. 1.80.

Holzmüller, G., Die neueren Wandlungen der elektrischen Theorien einschließlich der Elektronentheorie. Zwei Vorträge. Berlin 1906, J. Springer. VIII u. 119 S. M. 3.

Jaumann, G., Die Grundlagen der Bewegungslehre von einem modernen Standpunkt aus dargestellt. Leipzig 1905, A. Barth. 421 S. M. 12.

John, G. und R. Sachse, Lehrbuch der Chemie. Für höhere Lehranstalten. Leipzig 1906, B. G. Teubner. IV u. 324 S. M. 3.

Jouffret, E., Mélange de géométrie à quatre dimensions. Paris 1906, Gauthier-Villars. 227 S. Fr. 7.50.

Junker, Fr., Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Zweite, verbesserte Auflage. Sammlung Göschen Nr. 147. Leipzig 1906, G. J. Göschen. M. 0.80.

Kambly-Roeder. Trigonometrie. Ausgabe A: Für Gymnasien. 5. Auflage. 175 S. Ausgabe B: Für Realgymnasien und Oberrealschulen. 6. Auflage. Breslau 1906, F. Hirt. 189 S. Je M. 2.

Klauser und Lahn, Lehrbuch der Vermessungskunde. Bearbeitet von A. Cappilleri. 3. Auflage. Wien 1906, F. Deuticke. M. 3.

Kiebitz, F., Paul Drude. Nachruf. S.-A. aus Naturw. Rundschau 21_{32}. Braunschweig 1906, Vieweg u. S.

Kistner, A., Geschichte der Physik I. Die Physik bis Newton. — II. Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Sammlung Göschen Nr. 293, 294. Leipzig 1906, G. J. Göschen. 117 S., 130 S. je M. 0.80.

Koenig, A., Bürgerliche Rechnungsarten. Bd. 9 aus „Goldene Schülerbibliothek: Wie werde ich versetzt?“ Kattowitz 1906, C. Siwinna. 80 S. M. 1.

Koenig, A., Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben I. Bd. 12 aus „Goldene Schülerbibliothek“. Kattowitz 1906. C. Siwinna. 94 S. M. 1.

Krüger, L., Zur Ausgleichung der Widersprüche in den Winkelbedingungsgleichungen trigonometrischer Netze. Potsdam 1906, B. G. Teubner. 34 S. M. 2.80.

Lackemann, C., Elemente der Geometrie. Erster Teil: Planimetrie. Achte Auflage bearb. v. Kreuschmer. Breslau 1906, F. Hirt. 136 S. M. 1.30.

—. Zweiter Teil: Trigonometrie und Stereometrie. Fünfte Auflage bearb. von Kreuschmer. Breslau 1906, F. Hirt. 120 S. M. 1.30.

Lebesgue, H., Leçons sur les Séries Trigonométriques. Paris 1906, Gauthier-Villars. 128 S.

Lippmann, A., Die absolute Wahrheit der Euklidischen Geometrie. Leipzig 1906, R. Gerstäcker. 68 S. M. 3.60.

Loisel, J., Guide de l'Amateur Météorologiste. Paris 1906, Gauthier-Villars. 101 S.

Lorentz, H. A., Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 138 S. M. 3.20.

Lorey, W., Zur Theorie der Mittelwerte. Abhandlungen der Naturforsch. Ges. Görlitz Bd. 25, 1906. 9 S.

Love, A. E. H., Lehrbuch der Elastizität. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. A. Timpe in Danzig-Langfuhr. Mit zahlreichen Textfiguren. Leipzig 1906, B. G. Teubner. XVIII u. 665 S.

Mandl, J., Kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik für Ingenieure. Wien 1906, Lehmann und Wentzel. VIII u. 327 S. M. 9.50.

Marx, E., Die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen. Experimentaluntersuchung. Leipzig 1906, B. G. Teubner. III u. 47 S. M. 1.60.

Massau, J., Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications. Gand 1906, E. van Goethem. 735 S. Fr. 20.

Miller, W., Instrumentenkunde für Forschungs-Reisende. Unter Mitwirkung von C. Seidel. Hannover 1906, M. Jänecke. 200 S. M. 5.20.

Müller, H. und A. Bieler, Rechenbuch für Knaben-Mittelschulen. Teil 1, für die vier unteren Klassen, Heft 1—4. Leipzig 1906, B. G. Teubner. je M. 0.50.

Müller, H. und A. Bieler, Arithmethisches Lehr- und Übungsbuch für Knaben-Mittelschulen. Teil 1: Bis zu den Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten einschließlich. Leipzig 1906, B. G. Teubner. VI u. 160 S. M. 1.60.

Müller, H. und A. Bieler, Arithmetisches Lehr- und Übungsbuch für Knaben-Mittelschulen. Teil 2: Reihenlehre, Zinseszinsrechnung und Anfangsgründe der Trigonometrie. Leipzig 1906, B. G. Teubner. III u. 34 S. M. 0.40.

Müller, H. und F. Pietzker, Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten. Vorstufe zu den Aufgabensammlungen von Bardey und Müller-Kutnewsky. Ausgabe C. Heft 1: Für Sexta. M. 0.80. Heft 2: Für Quinta. M. 0.80. Heft 3: Für Quarta. M. 1. Leipzig 1906, B. G. Teubner.

Močnik-Reidinger. Logarithm.-trigonometrische Tafeln. 6. Auflage. Wien 1906, F. Tempsky. 100 S.

Mohr, O., Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1906, W. Ernst u. Sohn. M. 16.50.

Myller, A., Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in ihrer Beziehung zu den Integralgleichungen. Inaug. Diss. Göttingen 1906. 35 S.

Neumann, Franz. Gesammelte Werke. Herausgegeben von seinen Schülern. Zweiter Band. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 620 S. M. 36.

Oppenheim, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Aus Natur und Geisteswelt N. 110. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 164 S. M. 1.25.

Orlich, E., Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven. Heft 7 aus „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen". Braunschweig 1906, Vieweg u. Sohn. 117 S. M. 4.—.

Öttingen, A. von, Die perspektivischen Kreisbilder der Kegelschnitte. Leipzig 1906, W. Engelmann. 118 S. M. 5.

Paulsen, F., Das deutsche Bildungswesen in seiner geschichtlichen Entwickelung. Aus Natur und Geisteswelt. Nr. 100. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 192 S. M. 1.25.

Pesloüan, L. de, N.-H. Abel. Paris 1906, Gauthier-Villars. 168 S. Fr. 5.

Petrovitch, M., La Mécanique des Phénomènes fondée sur les Analogies. Paris 1906, Gauthier-Villars. Sammlung „Scientia". 95 S.

Poincaré, H., Der Wert der Wissenschaft. Deutsch von E. u. H. Weber. Mit einem Bildnis des Verfassers. Leipzig 1906, B. G. Teubner. IV u. 252 S. M. 3 60.

Poinchon, J., Principes et formules de Trigonométrie rectiligne et sphérique. Paris 1906, Gauthier-Villars. 146 S.

Saussure, R. de, Théorie géométrique du mouvement des corps. Genf 1906, H. Kündig. 109 S.

Schmehl, Neue Modelle für den Unterricht in der darstellenden Geometrie, Perspektive und rechtwinkligen Axonometrie. Gießen 1906, Hessische Lehrmittel-Anstalt.

Schwartze, Th., Allgemeine Maschinenlehre. Bd. 214 von Webers illustrierten Katechismen. Leipzig 1903, J. J. Weber. 410 S. M. 6.

Schwering, K., Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. Dritte Auflage. Freiburg i. B. 1906, Herder. 88 S. M. 1.40.

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. 3 Bände. 3. Aufl. Neubearbeitet von G. Scheffers. I. Band. Differentialrechnung. Mit 70 Figuren im Text. Leipzig 1906, B. G. Teubner. XVI u. 624 S. M. 13.

Steckelberg, H., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig, 1906, B. G. Teubner. 48 S. M. 0.80.

Thomson, J. J., Elektrizitäts-Durchgang in Gasen. Deutsche autorisierte Ausgabe unter Mitwirkung des Autors besorgt und ergänzt von E. Marx. Leipzig 1906, B. G. Teubner. VII u. 587 S. M. 19.

Universität Göttingen. Die Physikalischen Institute. Festschrift 1906. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 200 S. M. 12.

Vater, R., Die neueren Wärmekraftmaschinen. Zweite Auflage. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 21. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 140 S. M. 1.25.

Wedding, H., Das Eisenhüttenwesen. Zweite Auflage. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 20. Leipzig 1904, B. G. Teubner. 120 S. M. 1.25.

Weinbaum, O., Die Spiegelung einer unendlichen Ebene in einem zu ihr senkrechten elliptischen Zylinder. Berlin 1906, Mayer und Müller. 50 S.

Weinstein, B., Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Leipzig 1906, B. G. Teubner. XIV u. 543 S. M. 9.

Wilczynski, E. J., Projective differential geometry of curves and ruled surfaces. Leipzig 1906, B. G. Teubner. VIII u. 298 S. M. 10.

Zimmermann, H., Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. Berlin 1906, W. Ernst u. Sohn. 44 S. M. 2.

Zühlke, P., Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 46 S. M. 1.

Berichtigung zu Band IX.

S. 91. In Aufgabe **125** ist hinter „Ordnung" einzuschalten: „die Unterdeterminanten zweiter Ordnung einer Determinante vierter Ordnung, also".

Berichtigung zu Band X.

S. 327. In Aufgabe **151** muß es statt: „die zwei Kegelbüschel gemein haben" heißen „den zwei Kegelschnittbüschel gemein haben".

S. 329. In Aufgabe **161** lies „eine Öffnung von 1 cm^2" statt „eine Öffnung von 9 cm^2".

Über eine Aufgabe der unbestimmten Analysis.

Von A. Hurwitz in Zürich.

In den folgenden Zeilen will ich mich mit der nachstehenden Aufgabe beschäftigen:

„*Man soll alle Systeme von n positiven ganzen Zahlen* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *bestimmen, deren Quadratsumme* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ *ohne Rest durch ihr Produkt* $x_1 x_2 \ldots x_n$ *teilbar ist.*"

Offenbar kommt diese Aufgabe auf die vollständige Lösung der diophantischen Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x x_1 x_2 \cdots x_n \tag{1}$$

in positiven ganzen Zahlen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ zurück.

Den Fall $n = 1$ lasse ich als interesselos bei Seite. Ist $n = 2$, so lautet die Gleichung (1)

$$x_1^2 + x_2^2 = x x_1 x_2,$$

woraus

$$2x_1 = x x_2 + x_2\sqrt{x^2 - 4}$$

folgt. Daher muß $\sqrt{x^2 - 4}$ eine ganze Zahl t sein. Aus

$$x^2 - 4 = t^2 \quad \text{oder} \quad (x + t)(x - t) = 4$$

folgt aber $x + t = x - t = 2$, also

$$x = 2 \quad \text{und} \quad x_1 = x_2.$$

Die allgemeinste Lösung der gestellten Aufgabe wird demnach im Falle $n = 2$ durch ein System von zwei einander gleichen Zahlen $x_1 = x_2$ gebildet.

Bei der weiteren Behandlung der Aufgabe werde ich nun $n \geqq 3$ voraussetzen.

Indem man die Gleichung (1) auf die Form

$$x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1(x x_2 \cdots x_n - x_1)$$

bringt, erkennt man, daß

$$x_1' = x x_2 \ldots x_n - x_1$$

eine positive ganze Zahl ist, welche der Gleichung

$$x_2^2 + \cdots + x_n^2 = (x x_2 \cdots x_n - x_1')x_1',$$

oder

$$x_1'^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x x_1' x_2 \cdots x_n$$

genügt. Es gilt also der

Satz 1. Bezeichnet

$$\xi = (x, x_1, x_2, \ldots x_n)$$

eine Lösung der diophantischen Gleichung (1), so ist auch

$$\xi' = (x, x_1', x_2, \ldots x_n)$$

eine Lösung derselben, falls x_1' aus der Gleichung

$$x_1' + x_1 = x x_2 \ldots x_n \tag{2}$$

berechnet wird.

Aus der Symmetrie der Gleichung (1) in den Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ geht hervor, daß ebenso

$$\begin{array}{l} \xi'' = (x, x_1, x_2', x_3, \ldots x_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi^{(n)} = (x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n') \end{array}$$

gleichzeitig mit ξ Lösungen der Gleichung (1) sind, wenn $x_2', \ldots x_n'$ aus den Gleichungen

$$\begin{array}{l} x_2' + x_2 = x x_1 x_3 \ldots x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n' + x_n = x x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \end{array}$$

bestimmt werden.

Jede der Lösungen $\xi', \xi'', \ldots \xi^{(n)}$ will ich als der Lösung ξ *„benachbart“* oder auch als einen *„Nachbarn“* der Lösung ξ bezeichnen. Die Gleichung (2) zeigt unmittelbar, daß auch ξ der Lösung ξ' benachbart ist, und Entsprechendes gilt von den Lösungen $\xi'', \ldots \xi^{(n)}$. Wenn also von zwei Lösungen die erste zur zweiten benachbart ist, so ist auch umgekehrt die zweite zur ersten benachbart. Bildet man, von einer Lösung ξ ausgehend, die Reihe von Lösungen

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega \tag{3}$$

in der Weise, daß jede ein Nachbar der unmittelbar vorhergehenden ist, also η ein Nachbar von ξ, sodann ζ ein Nachbar von η usf. so sollen die Lösungen $\eta, \zeta, \ldots \omega$ aus der Lösung ξ *„abgeleitet“* heißen. Wenn die Lösung ω aus der Lösung ξ abgeleitet werden

kann, so kann auch umgekehrt ξ aus ω abgeleitet werden. Denn in der Reihe (3) ist auch jede Lösung ein Nachbar der unmittelbar folgenden.

Geht man von einer Lösung zu einer benachbarten über, so ändert sich der Wert der Unbekannten x nicht. Daraus folgt:

Satz 2. Wenn zwei Lösungen auseinander abgeleitet werden können, so stimmen sie in dem Werte der Unbekannten x überein.

Als *„Höhe“* einer Lösung

$$\xi = (x, x_1, x_2, \dots x_n)$$

der Gleichung (1) bezeichne ich nun die Summe

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

und knüpfe hieran die folgende

Definition: Eine Lösung der Gleichung (1) heiße eine „Grundlösung“, wenn keine der n ihr benachbarten Lösungen eine kleinere Höhe besitzt wie sie.

Die Bedeutung dieses Begriffes der Grundlösung beruht auf folgendem

Satz 3. Jede Lösung der Gleichung (1) ist entweder eine Grundlösung oder sie läßt sich aus einer Grundlösung ableiten.

In der Tat, wenn die Lösung ξ nicht Grundlösung ist, so besitzt sie einen Nachbarn η von kleinerer Höhe. Wenn η ebenfalls nicht Grundlösung ist, so besitzt η einen Nachbarn ζ von kleinerer Höhe So fortfahrend erhält man eine Reihe von Lösungen:

$$\xi, \eta, \zeta, \dots, \tag{4}$$

von denen jede ein Nachbar der unmittelbar vorhergehenden ist und deren Höhen eine abnehmende Reihe bilden. Da die Höhen positive ganze Zahlen sind, so muß die Reihe (4) notwendig abbrechen, d. h. man kommt bei Fortsetzung der Reihe (4) notwendig einmal zu einer Lösung ω, die Grundlösung ist. Aus dieser Grundlösung ω läßt sich dann die Lösung ξ ableiten.

Dem Satze 3. zufolge genügt es zur vollständigen Auflösung der Gleichung (1), die Grundlösungen zu bestimmen. Ich werde nun zeigen, daß es nur eine endliche Zahl von Grundlösungen gibt, und zugleich die Mittel zu ihrer Herstellung angeben.

Soll die der Lösung $\xi = (x, x_1, x_2, \dots x_n)$ benachbarte Lösung $\xi' = (x, x_1', x_2, \dots x_n)$ keine kleinere Höhe haben, wie ξ, so muß $x_1 \leqq x_1'$, oder nach Gleichung (2)

$$2x_1 \leqq x x_2 \dots x_n$$

oder auch

$$2x_1^2 \leqq x x_1 x_2 \ldots x_n \tag{5}$$

sein. Eine entsprechende Überlegung läßt sich auf die übrigen benachbarten Lösungen von ξ anwenden. Demnach gilt der

Satz 4. Die Lösung

$$\xi = (x, x_1, x_2, \ldots x_n)$$

ist dann und nur dann eine Grundlösung, wenn die n Ungleichungen

$$2x_i^2 \leqq x x_1 x_2 \ldots x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{6}$$

erfüllt sind.

Die Symmetrie dieser Ungleichungen zeigt, daß eine Grundlösung durch eine beliebige Permutation von $x_1, x_2, \ldots x_n$ wieder in eine Grundlösung übergeht. Es genügt deshalb, diejenigen Grundlösungen aufzusuchen, welche den Ungleichungen

$$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots \geqq x_n \tag{7}$$

genügen. Für diese Grundlösungen sind übrigens die Ungleichungen (7) zusammen mit der einen Ungleichung (5) völlig charakteristisch, da die Ungleichungen (6) sämtlich zugleich mit den Ungleichungen (5) und (7) erfüllt sind.

Ich bringe nun die Gleichung (1) auf die Form

$$(x x_2 x_3 \cdots x_n - 2x_1)^2 = x^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 - 4(x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2),$$

aus welcher leicht

$$x x_1 x_2 \ldots x_n - 2x_1^2 = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \sqrt{x^2 - 4p_1} \tag{8}$$

hervorgeht, wobei

$$p_1 = \frac{x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}{x_2^2 x_3^2 \ldots x_n^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_1^2}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2} \cdot x_1^2 \tag{9}$$

ist. Durch Vertauschung von x_1 mit x_i entsteht hieraus

$$x x_1 x_2 \ldots x_n - 2x_i^2 = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \sqrt{x^2 - 4p_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n) \tag{10}$$

und

$$p_i = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) - x_i^2}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2} \cdot x_i^2. \qquad (i = 1, 2, \ldots n.) \tag{11}$$

Nun möge

$$\xi = (x, x_1, x_2, \ldots x_n)$$

eine Grundlösung sein, welche den Ungleichungen (7) genügt.

Wegen der Ungleichungen (6) sind dann die Quadratwurzeln, welche in den Gleichungen (10) auftreten, nicht negativ, und unter ihnen gilt, wegen der Ungleichungen (7), die Größenfolge:

$$\sqrt{x^2 - 4p_1} \leqq \sqrt{x^2 - 4p_2} \leqq \cdots \leqq \sqrt{x^2 - 4p_n}. \tag{12}$$

Durch Addition der Gleichungen (10) kommt

$$n x x_1 x_2 \cdots x_n - 2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = x_1 x_2 \cdots x_n \big(\sqrt{x^2 - 4p_1} + \sqrt{x^2 - 4p_2} + \cdots + \sqrt{x^2 - 4p_n}\big),$$

und hieraus in Rücksicht auf die Gleichung (1)

$$\sqrt{x^2 - 4p_1} + \sqrt{x^2 - 4p_2} + \cdots + \sqrt{x^2 - 4p_n} = (n-2)x. \tag{13}$$

Aus der Kombination von (12) und (13) folgt

$$n\sqrt{x^2 - 4p_1} \leqq (n-2)x, \quad n^2(x^2 - 4p_1) \leqq (n-2)^2 x^2, \quad (n-1)x^2 \leqq n^2 p_1$$

oder, nach Gleichung (9),

$$(n-1)x^2 x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 \leqq n^2(x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2). \tag{14}$$

Nach den Ungleichungen (7) ist ferner

$$x_2^2 + x_3^2 + \cdots x_n^2 \leqq (n-1)x_2^2,$$

so daß aus (14)

$$x x_3 \ldots x_n \leqq n \tag{15}$$

hervorgeht. Endlich ergibt die Ungleichung (5):

$$2x_1^2 \leqq x x_1 x_2 \cdots x_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

oder

$$x_1^2 - x_2^2 \leqq x_3^2 + \cdots + x_n^2. \tag{16}$$

Aus der Ungleichung (15) folgt, daß

$$x, x_3, \ldots x_n$$

nur eine endliche Zahl von Wertsystemen annehmen können. Für das einzelne dieser Wertsysteme kann dann, nach Ungleichung (16),

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) \tag{17}$$

nur einen der Werte $0, 1, 2, \cdots (x_3^2 + \cdots + x_n^2)$ erhalten, sodaß auch für x_1 und x_2 nur eine endliche Zahl von Werten zulässig sind. Denn einen gegebenen positiven Wert nimmt der Ausdruck (17) überhaupt nur für endlich viele Zahlenpaare x_1, x_2 an, den Wert Null aber nur dann, wenn x_1 und x_2 denselben, der Gleichung

$$2x_1^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = x x_1^2 x_3 \cdots x_n$$

genügenden Wert haben, und dieser Gleichung genügt, wenn überhaupt, nur *ein* positiver ganzzahliger Wert x_1.

Die Anzahl der Grundlösungen der Gleichung (1) ist also in der Tat endlich. Zu ihrer Bestimmung stehen, außer der Gleichung (1), die Ungleichungen (7), (14), (15), (16) zur Verfügung. Diesen kann man noch eine weitere hinzufügen. Da nämlich $\sqrt{x^2 - 4p_1}$ reell ist, so muß $4p_1 \leqq x^2$, oder nach Gleichung (9)

$$(18) \qquad 4(x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2) \leqq (x x_2 x_3 \cdots x_n)^2$$

sein.

Aus den Grundlösungen lassen sich nach Satz 3. die sämtlichen Lösungen der Gleichung (1) ableiten. Daß hierbei aber auch keine der Grundlösungen entbehrt werden kann, geht aus dem folgenden Satze hervor:

Satz 5. Keine der Grundlösungen kann aus einer andern abgeleitet werden.

Dem Beweise schicke ich zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. Zwei Nachbarlösungen von gleicher Höhe sind identisch.

Denn zwei Nachbarlösungen stimmen in der Unbekannten x und in $n-1$ der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ überein. Daher müssen sie auch in der letzten Unbekannten übereinstimmen, wenn ihnen derselbe Wert der Höhe $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ zukommt.

Hilfssatz 2. Eine Lösung ξ kann höchstens einen Nachbarn von kleinerer Höhe besitzen.

Angenommen nämlich, es wären die Nachbarn $\xi^{(i)}$ und $\xi^{(k)}$ beide von kleinerer Höhe wie $\xi = (x, x_1, x_2, \ldots x_n)$, so würde

$$2x_i^2 > x x_1 x_2 \cdots x_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$
$$2x_k^2 > x x_1 x_2 \cdots x_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

sein, woraus durch Addition die widersinnige Ungleichung

$$2(x_i^2 + x_k^2) > 2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

folgen würde.

Um nun den Satz 5. zu beweisen, zeige ich, daß die Annahme, eine Grundlösung ω könne aus einer andern ξ abgeleitet werden, auf einen Widerspruch führt.

Aus dieser Annahme folgt, daß es eine Reihe von Lösungen der Gleichung (1)

$$\xi, \eta, \ldots \sigma, \ldots \tau, \ldots \omega$$

gibt, von welchen jede Nachbar der vorhergehenden ist. Man darf nun voraussetzen, daß in dieser Reihe nicht ein und dieselbe Lösung

mehr als einmal auftritt. Denn wäre etwa $\sigma = \tau$, so könnte man in der Reihe die auf σ folgenden Glieder bis τ inklusive unterdrücken. Zwei nebeneinander stehenden Gliedern der Reihe entsprechen dann nach Hilfssatz 1 verschiedene Höhen. In der Reihe möge nun der größte Höhenwert der Lösung σ zukommen. Es fällt dann σ nicht mit ξ zusammen, da ξ als Grundlösung geringere Höhe hat wie η; aus entsprechendem Grunde fällt σ auch nicht mit ω zusammen. Folglich steht σ in der Reihe zwischen zwei anderen voneinander verschiedenen Lösungen. Diese würden aber beide zu σ benachbart und von kleinerer Höhe wie σ sein, worin ein Widerspruch gegen den Hilfssatz 2. liegt.

Aus diesem Hilfssatz folgt noch eine bemerkenswerte Tatsache. Bedeutet ξ eine Lösung der Gleichung (1), die nicht Grundlösung ist, so kann man die Reihe von Lösungen

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots \omega$$

nach Hilfssatz 2. nur auf *eine* Weise so bestimmen, daß jede Lösung ein Nachbar der vorhergehenden und zugleich von niedrigerer Höhe als die vorhergehende ist. Jede Lösung der Gleichung (1) kann also im wesentlichen nur auf *eine* Weise aus einer Grundlösung abgeleitet werden.

Aus den Ungleichungen, welche für die den Bedingungen (7) genügenden Grundlösungen gelten, will ich nun einige Folgerungen ziehen.

Die Ungleichung (15) lehrt, daß der Wert von x in keiner Grundlösung größer als n sein kann. Hieraus folgt weiter, in Rücksicht auf die Sätze 2 und 3, daß es überhaupt keine Lösung der Gleichung (1) gibt, für welche $x > n$ wäre. Das heißt, es gilt der

Satz 6. Bedeutet a eine gegebene positive ganze Zahl, die größer als n ist, so besitzt die diophantische Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a x_1 x_2 \cdots x_n \tag{19}$$

keine Auflösung in positiven ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Nimmt man an, daß die ganzen (nicht notwendig positiven) Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Gleichung (19) genügen, so müssen dieselben offenbar sämtlich Null sein, wenn es eine unter ihnen ist. Falls dieselben aber sämtlich von Null verschieden wären, so würden ihre absoluten Beträge $|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|$ ebenfalls der Gleichung (19) genügen. Aus dem Satze 6. folgt daher, daß die Gleichung (19), abgesehen von der trivialen Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, keine Auflösung in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zuläßt.

Wenn in der Ungleichung (15)

$$x = n$$

vorausgesetzt wird, so kann sie nur bestehen, falls

$$x_3 = \cdots = x_n = 1$$

ist. Dann folgt aber aus Ungleichung (14)

$$(n-1)n^2 x_2^2 \leqq n^2(x_2^2 + n - 2), \quad x_2^2 \leqq 1,$$

also $x_2 = 1$ und sodann aus der Gleichung (1) schließlich $x_1 = 1$.

Dem Werte $x = n$ entspricht demnach die einzige Grundlösung

$$x = n, \quad x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 1,$$

aus welcher also die sämtlichen Lösungen der Gleichung (1), für welche $x = n$ ist, abgeleitet werden können. Es gilt mit anderen Worten der

Satz 7. Die sämtlichen Lösungen der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n x_1 x_2 \cdots x_n$$

in positiven ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ lassen sich aus der einen Lösung

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$$

ableiten.[1])

Für die Werte von n, die 10 nicht überschreiten, habe ich die Grundlösungen der Gleichung (1) berechnet. Dabei habe ich außer den oben aufgestellten Ungleichungen noch einige weitere aus ihnen hervorgehende benutzt, die ich zunächst ableiten will.

Dividiert man die Ungleichung (14) durch die Ungleichung $x^2 \geqq 1$, so ergibt sich

$$(n-1)x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 \leqq n^2(x_2^2 + x_3^2 + \cdots x_n^2),$$

oder

$$[(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - n^2]x_2^2 \leqq n^2(x_3^2 + \cdots + x_n^2). \tag{20}$$

Entweder ist nun

$$(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 \leqq n^2, \tag{a}$$

oder aber

$$(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 > n^2. \tag{b}$$

1) Die diophantische Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3x_1 x_2 x_3$ behandelt A. Markoff in seiner Abhandlung „Sur les formes quadratiques binaires indéfinies", Math. Annalen, Bd. 17, S. 396. Markoff beweist hier, daß die sämtlichen Lösungen der Gleichung aus der Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ abgeleitet werden können, also den $n = 3$ entsprechenden speziellen Fall des Satzes 7.

Im letzteren Falle folgt aus (20), da $x_3 \leqq x_2$ ist,

$$[(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - n^2]x_3^2 \leqq n^2(x_3^2 + Q),$$

wo zur Abkürzung

$$Q = x_4^2 + \cdots + x_n^2$$

gesetzt ist. Da nun

$$[(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - n^2]^2 = n^4 + (n-1)x_4^2 \cdots x_n^2 \cdot x_3^2[(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - 2n^2]$$

ist, so schließt man aus der letzten Ungleichung

$$[(n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 - n^2]^2 \leqq n^4 + (n-1)x_4^2 \cdots x_n^2 \cdot n^2 Q,$$

oder endlich

$$(21) \quad (n-1)x_3^2 \cdots x_n^2 \leqq n^2 + n\sqrt{n^2 + (n-1)x_4^2 \cdots x_n^2(x_4^2 + \cdots + x_n^2)}.$$

Diese unter der Voraussetzung (b) abgeleitete Ungleichung gilt a fortiori, wenn (a) stattfindet. Sie gilt daher in jedem Falle.

Die Ungleichung (21) gibt eine obere Grenze für die Werte, welche x_3 annehmen kann, nachdem $x_4, \ldots x_n$ bestimmt gewählt sind; sodann gibt die Ungleichung (20) eine obere Grenze für die zulässigen Werte von x_2, jedoch nur, wenn der Fall (b) vorliegt.

Ist beispielsweise $x_4 = \cdots = x_n = 1$, so ergibt die Ungleichung (21)

$$(n-1)x_3^2 \leqq n^2 + n\sqrt{n^2 + (n-1)(n-3)} = n^2 + n\sqrt{2(n-1)^2 + 1}.$$

Die Aufstellung der Grundlösungen wird, außer durch die Ungleichungen (20) und (21), auch noch durch die Tatsache erleichtert, daß von $n = 5$ ab in jeder Grundlösung mehrere der Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ den Wert 1 besitzen. Es besteht nämlich der

Satz 8. Wenn $n \geqq 5$ *ist und* $(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ *eine den Bedingungen* (7) *genügende Grundlösung der Gleichung* (1) *bedeutet, so besitzen sicher die* $n - 2 - k$ *letzten der Zahlen* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *den Wert* 1. *Dabei bezeichnet* k *die durch die Ungleichungen*

$$2^k \leqq n < 2^{k+1}$$

bestimmte ganze Zahl.

In der Tat können nicht mehr als k der Zahlen $x_3, \ldots x_n$ größer als 1 sein, weil sonst ihr Produkt mindestens gleich $2^{k+1} > n$ ausfallen würde, im Widerspruch mit der Ungleichung $xx_3 \ldots x_n \leqq n$. Man überzeugt sich ferner leicht, daß von $n = 5$ ab $n - 2 - k > 0$ ist.

Ich stelle nun die den Bedingungen (7) genügenden Grundlösungen der Gleichung (1) bis $n = 10$ in der folgenden Tabelle zusammen:

Tabelle der Grundlösungen.

n	x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
3	3	1	1	1							
	1	3	3	3							
4	4	1	1	1	1						
	1	2	2	2	2						
5	5	1	1	1	1	1					
	4	2	1	1	1	1					
	1	4	3	3	1	1					
6	6	1	1	1	1	1	1				
	3	2	2	1	1	1	1				
7	7	1	1	1	1	1	1	1			
	5	2	1	1	1	1	1	1			
	3	3	2	1	1	1	1	1			
	2	2	2	2	1	1	1	1			
	1	3	2	2	2	1	1	1			
8	8	1	1	1	1	1	1	1	1		
	1	4	2	2	2	1	1	1	1		
9	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
	6	2	1	1	1	1	1	1	1	1	
10	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	6	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	4	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1
	1	4	4	3	1	1	1	1	1	1	1

An diese Tabelle knüpfe ich noch einige Bemerkungen.

Nur in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ kommt es vor, daß die Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einer Grundlösung einen allen gemeinsamen Teiler aufweisen.

Man beweist nun in der Tat leicht den

Satz 9. Wenn $n > 4$ ist, so gibt es keine Lösung der Gleichung (1), in welcher $x_1, x_2, \ldots x_n$ einen gemeinsamen Teiler besitzen.

Angenommen nämlich, es wäre

$$x_1 = \partial y_1, \quad x_2 = \partial y_2, \ldots x_n = \partial y_n, \quad \partial \geqq 2,$$

so würde

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \partial^{n-2} x \cdot y_1 y_2 \cdots y_n$$

folgen. Nach Satz 6. müßte nun

$$\partial^{n-2} x \leqq n$$

und, da $2^{n-2} \leqq \varepsilon^{n-2}$, auch

$$2^{n-2} \leqq n$$

sein. Diese Ungleichung ist aber von $n = 5$ ab nicht erfüllt.

Der Satz 9. läßt sich übrigens auch ohne Schwierigkeit aus dem Satze 8. ableiten.

Die Tabelle der Grundlösungen zeigt ferner, daß die Unbekannte x nur einen Teil der Werte $\leqq n$ annehmen kann. Nach den Sätzen 2. und 3. folgt hieraus der

Satz 10. Bezeichnet a *eine positive ganze Zahl, so besitzt die diophantische Gleichung*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a x_1 x_2 \cdots x_n \tag{22}$$

Auflösungen in positiven ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ *nur für* $a = 1$ *und* $a = 3$, *falls* $n = 3$ *ist; nur für* $a = 1$ *und* $a = 4$, *falls* $n = 4$ *ist; nur für* $a = 1$, $a = 4$ *und* $a = 5$, *falls* $n = 5$ *ist u. s. f.*

Für einen unbestimmten Wert von n dürfte es schwierig sein, diejenigen Werte von $a \leqq n$ allgemein zu charakterisieren, für welche die Gleichung (22) Auflösungen in positiven ganzen Zahlen besitzt.

Die im vorstehenden entwickelte Theorie der Gleichung (1) läßt sich noch in anderer Weise auffassen, wobei ihre Analogie mit der Zahlentheorie der quadratischen Formen hervortritt. Die binären quadratischen Formen von gegebener Determinante D sind eindeutig zugeordnet den Lösungen der diophantischen Gleichung

$$x_1^2 - x_2 x_3 = D. \tag{23}$$

Die Einteilung der Formen in Klassen kommt also auf eine Einteilung der Lösungen der Gleichung (23) in Klassen hinaus, wobei zwei Lösungen (x_1, x_2, x_3) und (x_1', x_2', x_3') dann in dieselbe Klasse gehören, wenn die eine aus der andern durch Gleichungen der Gestalt

$$\begin{cases} x_2' = x_2\alpha^2 + 2x_1\alpha\gamma + x_3\gamma^2 \\ x_1' = x_2\alpha\beta + x_1(\alpha\delta + \beta\gamma) + x_3\gamma\delta \\ x_3' = x_2\beta^2 + 2x_1\beta\delta + x_3\delta^2 \end{cases} \tag{24}$$

abgeleitet werden kann, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ verstanden. In jeder Klasse von Lösungen gibt es eine „reduzierte", durch Ungleichungen charakterisierte Lösung. Die Anzahl dieser reduzierten Lösungen — und damit die Anzahl der Klassen — ist eine endliche. Hat man die reduzierten Lösungen der Gleichung (23) aufgestellt, so ergeben sich aus ihnen alle übrigen Lösungen vermöge der Formeln (24).

In ganz entsprechender Weise hat man nun eine Einteilung der Lösungen der Gleichung (1) in Klassen, wenn man zwei Lösungen dann in dieselbe Klasse rechnet, falls sie in dem oben festgesetzten Sinne auseinander abgeleitet werden können. In jeder solchen Klasse gibt es eine durch Ungleichungen charakterisierte „reduzierte" Lösung, nämlich die Grundlösung, aus welcher sich alle Lösungen der Klasse ableiten lassen. Die Anzahl der Klassen von Lösungen stimmt mit der Anzahl der Grundlösungen überein und ist also, wie diese, endlich.

Auch auf die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x x_1 x_2 \cdots x_n = D, \tag{26}$$

wo D eine gegebene ganze Zahl bedeutet, läßt sich dieselbe Einteilung der Lösungen in Klassen in Anwendung bringen, wie auf die, dem Falle $D = 0$ entsprechende Gleichung (1). Die ein und derselben Klasse angehörenden Lösungen der Gleichung (26) stimmen dann wieder in dem Werte der Unbekannten x überein. Ferner ergibt sich durch ähnliche Betrachtungen, wie ich sie oben für die Gleichung (1) angestellt habe, daß für einen negativen Wert von D die Anzahl der Klassen endlich ist. Dagegen ist dies nicht mehr allgemein der Fall, wenn D positiv ist, weil dann für $n < 5$ möglicherweise, für $n \geqq 5$ aber stets Lösungen der Gleichung (26) existieren, in welchen eine der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwindet, und für welche daher x jeden beliebigen Wert besitzen kann. Betrachtet man aber für den Fall $D > 0$ nur diejenigen Klassen, in welchen keine Lösung vorkommt, für welche eine der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots x_n$ den Wert Null besitzt, so ist die Anzahl dieser Klassen wieder endlich.

Übrigens läßt sich im Falle eines negativen Wertes von D die Auflösung der Gleichung (26) auf die einer Gleichung der Form (1) zurückführen. In der Tat, ist etwa

$$D = -m,$$

so entsprechen die Lösungen der Gleichung (26) offenbar einzeln denjenigen Lösungen der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+m}^2 = x x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} \cdots x_{n+m},$$

in welchen die Unbekannten $x_{n+1}, \ldots x_{n+m}$ den Wert 1 besitzen.

Zürich, d. 20. Dezember 1905.

Aufstellung einiger Krümmungsformeln, die Integralflächen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung betreffen.

Von K. Żorawski in Krakau.

Diese kurze Abhandlung enthält die Aufstellung einiger Formeln und Relationen, welche sich auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen beziehen. Die hier durchgeführten Betrachtungen bilden eine Anwendung desjenigen Formelsystems der Krümmungstheorie von Flächen, welches in der sogenannten natürlichen Geometrie benutzt wird.

1. Es sei im Raume ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z. Man betrachte eine Fläche und wähle auf derselben ein orthogonales System von krummlinigen Koordinatenlinien. Man nenne Kurvenschar 1 und Kurvenschar 2 zwei Kurvenscharen dieses Systems und bezeichne mit s_1 und s_2 die Bogenlängen der Kurven dieser Kurvenscharen. Es seien die positiven Halbtangenten derselben und die positive Flächennormale so gewählt, daß die Richtungskosinus dieser positiven Halbgeraden beziehungsweise die folgenden seien:

$$\frac{dx}{ds_1},\quad \frac{dy}{ds_1},\quad \frac{dz}{ds_1},$$

$$\frac{dx}{ds_2},\quad \frac{dy}{ds_2},\quad \frac{dz}{ds_2},$$

$$X=\frac{dy}{ds_1}\frac{dz}{ds_2}-\frac{dy}{ds_2}\frac{dz}{ds_1},\quad Y=\frac{dz}{ds_1}\frac{dx}{ds_2}-\frac{dz}{ds_2}\frac{dx}{ds_1},\quad Z=\frac{dx}{ds_1}\frac{dy}{ds_2}-\frac{dx}{ds_2}\frac{dy}{ds_1}.$$

Bei dieser Wahl ist das Trieder dieser Halbgeraden in der angegebenen Reihenfolge mit dem Trieder der positiven Halbachsen x, y, z kongruent.

Es sei in der Tangentialebene der Fläche derjenige Sinn der Drehung positiv, in welchem die positive Halbtangente der Kurvenschar 1 um $\frac{\pi}{2}$ gedreht werden muß, um zur positiven Halbtangente der Kurvenschar 2 zu gelangen. Eine dritte Kurvenschar auf der Fläche kann durch den Winkel ω ihrer positiven Halbtangente mit der positiven Halbtangente der Kurvenschar 1 festgelegt werden. Ist s die Bogenlänge der Kurve dieser dritten Kurvenschar, und wächst diese Bogenlänge in der Richtung der positiven Halbtangente, so sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Richtungskosinus dieser positiven Halbtangente. Man betrachte

noch die orthogonalen Trajektorien dieser Kurvenschar; man bezeichne mit σ die Bogenlänge derselben und setze voraus, daß die entsprechende positive Halbtangente, deren Richtungskosinus $\frac{dx}{d\sigma}, \frac{dy}{d\sigma}, \frac{dz}{d\sigma}$ sind, so gewählt worden ist, daß sie mit der positiven Halbtangente der Kurvenschar 1 den Winkel $\omega + \frac{\pi}{2}$ bildet. Die zwei letztgenannten Kurvenscharen wollen wir als Kurvenscharen ω und $\omega + \frac{\pi}{2}$ bezeichnen.

Man bezeichne jetzt mit n, g und τ die Normalkrümmung, die geodätische Krümmung und die geodätische Torsion der Kurvenschar ω und nehme, um in bezug auf die Vorzeichen eine bestimmte Wahl zu treffen, an, daß diese Krümmungen durch die Formeln:

$$n = \sum X \frac{d^2x}{ds^2}, \quad g = \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \tau = \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{dX}{ds}$$

bestimmt sind, wo das Summenzeichen auf drei Achsen x, y, z zu erstrecken ist. Dementsprechend wollen wir für die Kurvenscharen 1 und 2 solche Formeln gelten lassen, welche aus den angeführten Formeln durch die Annahmen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$ hervorgehen. Man hat also für die Kurvenschar 1:

$$n_1 = \sum X \frac{d^2x}{ds_1^2}, \quad g_1 = \sum \frac{dx}{ds_2} \frac{d^2x}{ds_1^2}, \quad \tau_1 = \sum \frac{dx}{ds_2} \frac{dX}{ds_1}$$

und für die Kurvenschar 2:

$$n_2 = \sum X \frac{d^2x}{ds_2^2}, \quad g_2 = -\sum \frac{dx}{ds_1} \frac{d^2x}{ds_2^2}, \quad \tau_2 = -\sum \frac{dx}{ds_1} \frac{dX}{ds_2}.$$

Es findet die Beziehung statt:

$$\tau_1 + \tau_2 = 0,$$

und wir wollen die Bezeichnung:

$$-\tau_1 = \tau_2 = m$$

benutzen. Alsdann hat man für die Kurvenschar ω die Formeln:

$$(1) \qquad \begin{cases} n = n_1 \cos^2 \omega + 2m \cos \omega \sin \omega + n_2 \sin^2 \omega, \\ g = g_1 \cos \omega + g_2 \sin \omega + \frac{d\omega}{ds}, \\ \tau = \frac{1}{2}(n_1 - n_2) \sin 2\omega - m \cos 2\omega. \end{cases}$$

Endlich bemerke man, daß die Größen n_1, n_2, m, g_1, g_2 den Beziehungen von Gauß und Mainardi-Codazzi genügen, die unter Benutzung der hier angegebenen Bezeichnungen lauten:

$$(2)\qquad \begin{cases} n_1 n_2 - m^2 = \dfrac{dg_1}{ds_2} - \dfrac{dg_2}{ds_1} - g_1^2 - g_2^2, \\ \dfrac{dn_1}{ds_2} - \dfrac{dm}{ds_1} = n_1 g_1 + 2mg_2 - n_2 g_1, \\ \dfrac{dn_2}{ds_1} - \dfrac{dm}{ds_2} = n_1 g_2 - 2mg_1 - n_2 g_2. \end{cases}$$

2. Es sei jetzt die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(3)\qquad F(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0$$

gegeben, wo zur Abkürzung $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ gesetzt ist. Die charakteristischen Streifen dieser Differentialgleichung sind durch diese Differentialgleichung selbst und durch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z}$$

definiert, wo F mit den verschiedenen Indices die partiellen Differentialquotienten der Funktion F in bezug auf die angezeigten Veränderlichen bezeichnet. Wenn man voraussetzt, daß der Ausdruck:

$$R = \sqrt{(1 + p^2)F_p^2 + 2pqF_pF_q + (1 + q^2)F_q^2}$$

für Wertsysteme von x, y, z, p, q, welche die Gleichung (3) befriedigen, im allgemeinen nicht gleich Null ist, so reduziert sich die Charakteristik im allgemeinen nicht auf einen Punkt und ist keine Minimalkurve. Bei der genannten Voraussetzung in bezug auf R hat der Ausdruck: $H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ dieselbe Eigenschaft, d. h. diejenigen orthogonalen Trajektorien der Charakteristiken, welche auf den Flächenelementen der charakteristischen Streifen senkrecht stehen, sind im allgemeinen keine Minimalkurven.

Wir wollen nun auf jeder Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (3) die Schar der Charakteristiken als Kurvenschar 1 und die Schar der orthogonalen Trajektorien derselben als Kurvenschar 2 annehmen. Die Richtungen der Tangenten dieser Kurvenscharen und der Normalen der Integralfläche können ohne weiteres bestimmt werden und die Richtungskosinus der entsprechenden positiven Halbgeraden können in Übereinstimmung mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen der Nummer 1 gewählt werden. Es können nämlich die Formeln:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds_1} = \dfrac{F_p}{R}, \quad \dfrac{dy}{ds_1} = \dfrac{F_q}{R}, \quad \dfrac{dz}{ds_1} = \dfrac{1}{R}(pF_p + qF_q), \\ X = \dfrac{p}{H}, \quad Y = \dfrac{q}{H}, \quad Z = -\dfrac{1}{H} \end{cases}$$

und unter Benutzung der Bezeichnungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} a = (1+p^2)F_p + pqF_q, \\ b = pqF_p + (1+q^2)F_q, \\ c = qF_p - pF_q \end{cases}$$

die Formeln:

$$(6)\qquad \frac{dx}{ds_2} = \frac{b}{HR}, \quad \frac{dy}{ds_2} = -\frac{a}{HR}, \quad \frac{dz}{ds_2} = -\frac{c}{HR}$$

angenommen werden.

Wir wollen uns zunächst damit beschäftigen, die Größen n_1, m und g_1 zu berechnen. Zu dem Zwecke müssen noch einige andere Formeln angeführt werden. Aus den Differentialgleichungen der Charakteristiken folgen unmittelbar die Werte:

$$\frac{dp}{ds_1} = -\frac{1}{R}(F_x + pF_z), \quad \frac{dq}{ds_1} = -\frac{1}{R}(F_y + qF_z),$$

und wenn man zur Abkürzung

$$(7)\qquad \begin{cases} F_p\frac{\partial f}{\partial x} + F_q\frac{\partial f}{\partial y} + (pF_p + qF_q)\frac{\partial f}{\partial z} \\ -(F_x + pF_z)\frac{\partial f}{\partial p} - (F_y + qF_z)\frac{\partial f}{\partial q} = W_1(f) \end{cases}$$

setzt, so wird

$$(8)\qquad \frac{df}{ds_1} = \frac{1}{R}W_1(f).$$

Man sieht ferner leicht, daß die Formel:

$$W_1(H) = -\frac{1}{H}[p(F_x + pF_z) + q(F_y + qF_z)]$$

gilt, und infolge der Formeln (4) und (8) kommt man auf folgende Ausdrücke:

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{1}{R^2}W_1(F_p) - \frac{F_p}{R^3}W_1(R),$$

$$\frac{d^2y}{ds_1^2} = \frac{1}{R^2}W_1(F_q) - \frac{F_q}{R^3}W_1(R),$$

$$\frac{d^2z}{ds_1^2} = \frac{1}{R^2}[pW_1(F_p) + qW_1(F_q) - F_p(F_x + pF_z) - F_q(F_y + qF_z)] - \frac{1}{R^3}(pF_p + qF_q)W_1(R),$$

$$\frac{dX}{ds_1} = -\frac{1}{HR}(F_x + pF_z) - \frac{pW_1(H)}{H^2R},$$

$$\frac{dY}{ds_1} = -\frac{1}{HR}(F_y + qF_z) - \frac{qW_1(H)}{H^2R},$$

$$\frac{dZ}{ds_1} = \frac{W_1(H)}{H^2R}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke und der früheren Formeln kommt man nun leicht zur Aufstellung der Formeln für n_1, m und g_1. Wir erhalten nämlich:

$$n_1 = \frac{1}{HR^2}[F_p(F_x + pF_z) + F_q(F_y + qF_z)], \tag{9}$$

$$m = \frac{1}{H^2R^2}[b(F_x + pF_z) - a(F_y + qF_z)], \tag{10}$$

$$g_1 = \frac{H}{R^3}[F_q W_1(F_p) - F_p W_1(F_q)] + \frac{cn_1}{R}. \tag{11}$$

Dies sind die Formeln für Normalkrümmung, geodätische Torsion und geodätische Krümmung der Charakteristiken.[1])

3. Wir gehen nun zur Betrachtung der Werte der Ableitungen $\frac{dp}{ds_2}$, $\frac{dq}{ds_2}$ über. Die Differentialgleichung (3) liefert durch Differentiation nach s_2 die Beziehung:

$$F_x \frac{dx}{ds_2} + F_y \frac{dy}{ds_2} + F_z \frac{dz}{ds_2} + F_p \frac{dp}{ds_2} + F_q \frac{dq}{ds_2} = 0,$$

und wenn man die Formeln (5), (6) und (10) ausnutzt, so läßt sich diese Beziehung in der Form:

$$F_p \frac{dp}{ds_2} + F_q \frac{dq}{ds_2} = -HRm \tag{12}$$

darstellen. Man bemerke jetzt, daß sich längs einer jeden Charakteristik unendlich viele Integralflächen berühren. Für ein gemeinsames Flächenelement besitzen diese Integralflächen unendlich viele von einander verschiedene Krümmungselemente. Da aber die fraglichen Ableitungen von der Wahl der Krümmungselemente abhängig sind, so können für dieselben auf Grund der vorgelegten Differentialgleichung Funktionen von x, y, z, p, q nicht erhalten werden, welche die Gesamtheit der Werte dieser Ableitungen darstellen und keine weiteren veränderlichen Größen enthalten. Man kann aber leicht zeigen, daß, wenn man zur Unterscheidung der genannten Krümmungselemente die Normalkrümmung n_2 der orthogonalen Trajektorien der Charakteristiken wählt, man für die fraglichen Ableitungen mit Hilfe dieser Größe vollständig bestimmte Ausdrücke erhalten wird. Man hat nämlich die Formel:

$$n_2 = \sum X \frac{d^2x}{ds_2^2} = \frac{1}{H}\left(p\frac{d^2x}{ds_2^2} + q\frac{d^2y}{ds_2^2} - \frac{d^2z}{ds_2^2}\right);$$

---

1) Es mag bemerkt werden, daß die Gleichungen $n_1 = 0$ und $m = 0$ im Werke „Sophus Lie, Geometrie der Berührungstransformationen dargestellt von Sophus Lie und Georg Scheffers", Leipzig 1896, S. 640 und S. 657 angegeben sind.

wenn man aber die Relation:

$$p\frac{dx}{ds_2}+q\frac{dy}{ds_2}-\frac{dz}{ds_2}=0$$

nach s_2 differenziert und die erhaltene Beziehung ausnutzt, so bekommt man die Formel:

$$n_2=-\frac{1}{H}\left(\frac{dp}{ds_2}\frac{dx}{ds_2}+\frac{dq}{ds_2}\frac{dy}{ds_2}\right),$$

aus welcher mit Benutzung der Formeln (6) die Gleichung:

$$-b\frac{dp}{ds_2}+a\frac{dq}{ds_2}=H^2Rn_2 \tag{13}$$

folgt. Die Gleichungen (12) und (13) können nun in bezug auf die Ableitungen $\frac{dp}{ds_2}$ und $\frac{dq}{ds_2}$ aufgelöst werden. Die Determinante dieses Systems ist R^2, und man erhält die Formeln:

$$\tag{14}\left|\begin{aligned}\frac{dp}{ds_2}&=-\frac{H}{R}(am+HF_qn_2),\\ \frac{dq}{ds_2}&=-\frac{H}{R}(bm-HF_pn_2).\end{aligned}\right.$$

Auf Grund dieser Formeln und der Formeln (6) kann nun der Ausdruck für die Ableitung einer beliebigen Funktion f von x, y, z, p, q nach s_2 aufgestellt werden. Führt man nämlich die Bezeichnung:

$$W_2(f)=b\left(\frac{\partial f}{\partial x}-H^2m\frac{\partial f}{\partial q}\right)-a\left(\frac{\partial f}{\partial y}+H^2m\frac{\partial f}{\partial p}\right)-c\frac{\partial f}{\partial z} \tag{15}$$

ein, so ist leicht zu sehen, daß die folgende Formel stattfindet:

$$\frac{df}{ds_2}=\frac{1}{HR}W_2(f)-\frac{H^2}{R}n_2\left(F_q\frac{\partial f}{\partial p}-F_p\frac{\partial f}{\partial q}\right). \tag{16}$$

Wir wollen hier noch die Formel für g_2 d. h. für die geodätische Krümmung der orthogonalen Trajektorien der Charakteristiken aufstellen. Man bemerke, daß g_2 in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$g_2=\sum\frac{dx}{ds_2}\frac{d}{ds_2}\left(\frac{dx}{ds_1}\right).$$

Wird die erste Reihe der Formeln (4) nach s_2 differenziert, so folgt:

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{dx}{ds_1}\right)=\frac{1}{R}\frac{dF_p}{ds_2}-\frac{1}{R}\frac{dR}{ds_2}\frac{dx}{ds_1},$$

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{dy}{ds_1}\right)=\frac{1}{R}\frac{dF_q}{ds_2}-\frac{1}{R}\frac{dR}{ds_2}\frac{dy}{ds_1},$$

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{dz}{ds_1}\right)=\frac{1}{R}\left(p\frac{dF_p}{ds_2}+F_p\frac{dp}{ds_2}+q\frac{dF_q}{ds_2}+F_q\frac{dq}{ds_2}\right)-\frac{1}{R}\frac{dR}{ds_2}\frac{dz}{ds_1},$$

also kann g_2 auf die Form:

$$g_2 = \frac{1}{R}\left[\frac{dF_p}{ds_2}\left(\frac{dx}{ds_2} + p\frac{dz}{ds_2}\right) + \frac{dF_q}{ds_2}\left(\frac{dy}{ds_2} + q\frac{dz}{ds_2}\right) + \left(F_p\frac{dp}{ds_2} + F_q\frac{dq}{ds_2}\right)\frac{dz}{ds_2}\right]$$

gebracht werden. Wenn man aber berücksichtigt, daß aus den Formeln (6) die Werte:

$$\frac{dx}{ds_2} + p\frac{dz}{ds_2} = \frac{H}{R}F_q, \quad \frac{dy}{ds_2} + q\frac{dz}{ds_2} = -\frac{H}{R}F_p$$

folgen, und wenn man die Beziehung (12) sowohl wie die Formel (16) ausnutzt, so kommt man zum Resultate:

$$(17) \qquad g_2 = \frac{1}{R^3}[F_q W_2(F_p) - F_p W_2(F_q)] + \frac{c}{R}m - \frac{H^3}{R^3}n_2(F_q^2 F_{p^2} - 2F_q F_p F_{pq} + F_p^2 F_{q^2}),$$

wo F_{p^2}, F_{pq}, F_{q^2} die Differentialquotienten zweiter Ordnung der Funktion F nach p und q bezeichnen.

4. Unter **2.** und **3.** beschäftigten wir uns mit den Normalkrümmungen und den geodätischen Krümmungen der Charakteristiken und ihren orthogonalen Trajektorien auf Integralflächen und mit der geodätischen Torsion dieser Kurvenscharen. Diese Größen müssen den Gleichungen von Gauß und Mainardi-Codazzi Genüge leisten, und wir wollen nun zusehen, zu welchem Resultate hier die Anwendung dieser Fundamentalrelationen der Flächentheorie führt.

Der Kürze halber wird es bequem sein, g_2 durch die Formel: $g_2 = \alpha + \beta n_2$ darzustellen, wo also α und β die in (17) auftretenden Ausdrücke bezeichnen. Alsdann liefert die Anwendung der genannten Fundamentalrelationen unter Berücksichtigung der Formeln (8) und (16) die Beziehungen:

$$(18)\begin{cases} n_1 n_2 - m^2 = \dfrac{1}{HR}W_2(g_1) - \dfrac{H^2}{R}\left(F_q\dfrac{\partial g_1}{\partial p} - F_p\dfrac{\partial g_1}{\partial q}\right)n_2 \\ \qquad - \dfrac{1}{R}[W_1(\alpha) + W_1(\beta)n_2 + \beta W_1(n_2)] - g_1^2 - (\alpha + n_2\beta)^2, \\ \dfrac{1}{HR}W_2(n_1) - \dfrac{H^2}{R}\left(F_q\dfrac{\partial n_1}{\partial p} - F_p\dfrac{\partial n_1}{\partial q}\right)n_2 - \dfrac{1}{R}W_1(m) \\ \qquad = n_1 g_1 + 2m(\alpha + \beta n_2) - n_2 g_1, \\ \dfrac{1}{R}W_1(n_2) - \left[\dfrac{1}{HR}W_2(m) - \dfrac{H^2}{R}\left(F_q\dfrac{\partial m}{\partial p} - F_p\dfrac{\partial m}{\partial q}\right)n_2\right] \\ \qquad = n_1(\alpha + \beta n_2) - 2mg_1 - n_2(\alpha + \beta n_2). \end{cases}$$

Man bemerke jetzt, daß mit Ausnahme von n_2 alle in diesen Beziehungen vorkommenden Größen vollständig bestimmte Funktionen von x, y, z, p, q

sind. Aus diesen Beziehungen kann aber nicht eine diskrete Anzahl von Funktionen für die Größe n_2 folgen. Daraus ergibt sich, daß die zweite dieser Beziehungen bei beliebigem n_2 erfüllt werden muß, d. h. daß die Relationen:

$$\frac{1}{HR} W_2(n_1) - \frac{1}{R} W_1(m) = n_1 g_1 + 2m\alpha,$$
$$\frac{H^2}{R}\left(F_q \frac{\partial n_1}{\partial p} - F_p \frac{\partial n_1}{\partial q}\right) = g_1 - 2m\beta$$

bestehen. Die dritte der Beziehungen (18) findet sicher bei beliebigem n_2 nicht statt, denn das erste Glied derselben kommt jedenfalls in allen möglichen Fällen vor. Diese Beziehung bildet eine partielle Differentialgleichung für n_2 von der Form:

$$\frac{1}{R} W_1(n_2) + \beta n_2^2 + \gamma n_2 + \delta = 0, \tag{19}$$

wo γ und δ folgende Ausdrücke bezeichnen:

$$\gamma = \alpha + \frac{H^2}{R}\left(F_q \frac{\partial m}{\partial p} - F_p \frac{\partial m}{\partial q}\right) - n_1\beta,$$
$$\delta = 2mg_1 - n_1\alpha - \frac{1}{HR} W_2(m).$$

Endlich kann die erste der Beziehungen (18) nicht eine von (19) unabhängige Differentialgleichung für n_2 sein, denn wir hätten alsdann für n_2 eine endliche lineare Gleichung, was ausgeschlossen ist. Demnach besteht diese Beziehung entweder bei beliebigem n_2, oder sie ist eine bloße Folge der Differentialgleichung (19). Anders gesagt, für n_2 ergibt sich aus (18) bloß die Differentialgleichung (19), und wir konstatieren, daß noch die Relationen:

$$\frac{1}{R} W_1(\beta) + \frac{H^2}{R}\left(F_q \frac{\partial g_1}{\partial p} - F_p \frac{\partial g_1}{\partial q}\right) + n_1 + 2\alpha\beta = \beta\gamma,$$
$$\frac{1}{R} W_1(\alpha) + g_1^2 + \alpha^2 - \left[\frac{1}{HR} W_2(g_1) + m^2\right] = \beta\delta$$

bestehen.

5. Wir wollen noch einige Bemerkungen in bezug auf die in diesem Artikel durchgeführten Entwicklungen hinzufügen.

Wenn die Gleichungen:

$$x = x(u),\quad y = y(u),\quad z = z(u),\quad p = p(u),\quad q = q(u)$$

einen charakteristischen Streifen der Differentialgleichung (3) definieren, so kann die Gleichung (19) für die Flächenelemente dieses Streifens in der Form:

$$\frac{dn_2}{du} + An_2^2 + Bn_2 + C = 0$$

dargestellt werden, wo A, B, C Funktionen von u sind. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung vom Riccatischen Typus, und aus derselben ergibt sich im allgemeinen eine linear gebrochene Funktion der willkürlichen Konstante mit Koeffizienten, die bestimmte Funktionen von u sind.

Ferner bemerke man, daß die Gleichung (19) dann und nur dann das Glied mit n_2^2 nicht enthält, wenn

$$F_q^2 F_{p^2} - 2 F_p F_q F_{pq} + F_p^2 F_{q^2} = 0,$$

und es ist klar, daß dies für solche und nur für solche partiellen Differentialgleichungen stattfindet, die auf eine oder mehrere in bezug auf p und q lineare Gleichungen zurückgeführt werden können.

Zuletzt bemerke man, daß, wenn man für den Winkel ω, der unter 1 definiert wurde, eine Funktion von x, y, z, p, q wählt, damit auf jeder Integralfläche der Differentialgleichung (3) eine Kurvenschar gewählt wird. Es erhellt aus den Formeln (1), daß die Normalkrümmung der Kurven dieser Schar nur im Falle der Schar der charakteristischen Kurven von der Wahl der Krümmung n_2 unabhängig ist. Man sieht auch, daß die geodätische Torsion nur für die charakteristischen Kurven und ihre orthogonalen Trajektorien von n_2 unabhängig ist. Endlich sieht man leicht ein, daß die geodätische Krümmung dann und nur dann von der Wahl der Krümmung n_2 unabhängig ist, wenn die betreffende Kurvenschar entweder aus charakteristischen Kurven besteht, oder wenn dieselbe die Relation:

$$\frac{H}{R^2}(F_q^2 F_{p^2} - 2 F_p F_q F_{pq} + F_p^2 F_{q^2}) + F_q \frac{\partial \omega}{\partial p} - F_p \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0$$

befriedigt. Die letztere liefert für ω den Ausdruck:

$$\omega = \omega_0(x, y, z, p, q) + \Phi(x, y, z),$$

wo ω_0 eine Funktion ist, die durch Quadratur bestimmt werden kann, und wo Φ eine willkürliche Funktion ihrer Argumente bezeichnet. Die Funktion ω_0 kann im Falle einer Differentialgleichung, die auf eine oder mehrere in bezug auf p und q lineare Gleichungen zurückführbar ist, gleich Null gesetzt werden. Demnach bestehen für diese Kategorie der Differentialgleichungen die in Rede stehenden Kurvenscharen aus Linienelementen, die in jedem Punkte des Raumes einen Kreiskegel bilden, dessen Achse das durch diesen Punkt hindurchgehende Linienelement der charakteristischen Kurve ist.

Krakau, den 10. Juni 1905.

Berechnung von
$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right):\Gamma(na)$.

(Theorem von Gauß.)

Von J. H. Graf in Bern.

Ausgehend von der Formel[1])

$$\log\,\Gamma(1+a)=\int_0^\infty\left(ae^{-t}-\frac{1-e^{-at}}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t} \tag{1}$$

folgt, indem man in (1) $a-1+\frac{\lambda}{n}$ statt a setzt,

$$\log\Gamma\left(a+\frac{\lambda}{n}\right)=\int_0^\infty\left[\left(a-1+\frac{\lambda}{n}\right)e^{-t}-\frac{1}{e^t-1}\left(1-e^{-\left(a-1+\frac{\lambda}{n}\right)t}\right)\right]\frac{dt}{t}.$$

Wir setzen $\lambda=0,1,2,3,\ldots n-1$ und summieren:

$$\lambda=0,\ \log\Gamma(a)=\int_0^\infty\left[(a-1)e^{-t}-\frac{1}{e^t-1}\left(1-e^{-(a-1)t}\right)\right]\frac{dt}{t},$$

$$\lambda=1,\ \log\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)=\int_0^\infty\left[\left(a-1+\frac{1}{n}\right)e^{-t}-\frac{1}{e^t-1}\left(1-e^{-\left(a-1+\frac{1}{n}\right)t}\right)\right]\frac{dt}{t},$$

$$\lambda=2,\ \log\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)=\int_0^\infty\left[\left(a-1+\frac{2}{n}\right)e^{-t}-\frac{1}{e^t-1}\left(1-e^{-\left(a-1+\frac{2}{n}\right)t}\right)\right]\frac{dt}{t},$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\lambda=n-1,\ \log\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\int_0^\infty\Bigg[\underbrace{\left(a-1+\frac{n-1}{n}\right)}_{\text{I}}e^{-t}-\frac{1}{e^t-1}\underbrace{\left(1-e^{-\left(a-1+\frac{n-1}{n}\right)t}\right)}_{\text{II}}\Bigg]\frac{dt}{t}.$$

Links erhält man $\log\prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\Gamma\left(a+\frac{\lambda}{n}\right)$. Rechts ergibt Klammer I die Summe $\left(na-\frac{n+1}{2}\right)e^{-t}$. Klammer II ist gleich $-\frac{n}{e^t-1}$

$$+\,e^{-t(a-1)}\left\{\frac{1+e^{-\frac{t}{n}}+e^{-\frac{2t}{n}}+\cdots+e^{-\frac{n-1}{n}t}}{e^t-1}\right\}=-\frac{n}{e^t-1}+\frac{e^{-t(a-1)}\left(e^{-t}-1\right)}{\left(e^t-1\right)\left(e^{-\frac{t}{n}}-1\right)}$$

1) Siehe J. H. Graf, Einleitung in die Theorie der Gamma-Funktion etc. S. 51, Formel (50).

$$=-\frac{n}{e^t-1}+\frac{e^{-at}}{-e^{-\frac{t}{n}}+1}=-\frac{n}{e^t-1}+\frac{e^{-\left(a-\frac{1}{n}\right)t}}{e^{\frac{t}{n}}-1},$$ so daß man die Formel erhält:

$$(2)\ \log\prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\Gamma\left(a+\frac{\lambda}{n}\right)=\int_0^\infty\left[\left(na-\frac{n+1}{2}\right)\frac{e^{-t}}{t}-\frac{n}{t(e^t-1)}+\frac{e^{-\left(a-\frac{1}{n}\right)t}}{t\left(e^{\frac{t}{n}}-1\right)}\right]dt.$$

Setzt man in (1) $na-1$ statt a, so folgt

$$(3)\qquad \log\Gamma(na)=\int_0^\infty\left[(na-1)\frac{e^{-t}}{t}-\frac{1-e^{-(na-1)t}}{t(e^t-1)}\right]dt;$$

nun subtrahiere man (3) von (2), dann hat man

$$(4)\ \log\frac{\prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\Gamma\left(a+\frac{\lambda}{n}\right)}{\Gamma(na)}=\int_0^\infty\left[-\frac{n-1}{2}\frac{e^{-t}}{t}-\frac{n-1}{t(e^t-1)}+\frac{e^{-\left(a-\frac{1}{n}\right)t}}{t\left(e^{\frac{t}{n}}-1\right)}-\frac{e^{-(na-1)t}}{t(e^t-1)}\right]dt.$$

Man ersetze die untere Integralgrenze durch x und vernachlässige alles, was zugleich mit x verschwindet. Vorerst folgt vom dritten Term in der Klammer, wenn $\frac{t}{n}=t_1$ gesetzt wird, $\int_x^\infty\frac{e^{-\left(a-\frac{1}{n}\right)t}}{t\left(e^{\frac{t}{n}}-1\right)}dt=\int_{\frac{x}{n}}^\infty\frac{e^{-(na-1)t_1}}{t_1(e^{t_1}-1)}dt_1$.

Lassen wir den Index weg, und nehmen wir diesen Term mit dem vierten zusammen, so ergibt sich

$$\int_{\frac{x}{n}}^\infty\frac{e^{-(na-1)t}}{t(e^t-1)}dt-\int_x^\infty\frac{e^{-(na-1)t}}{t(e^t-1)}dt=\int_{\frac{x}{n}}^x\frac{e^{-(na-1)t}}{t(e^t-1)}dt.$$

In erster Annäherung geht der Integrand über in $\frac{1-(na-1)t}{t^2}$, so daß man hat $\int_{\frac{x}{n}}^x\frac{1-(na-1)t}{t^2}dt=\Big/_{\frac{x}{n}}^{x}-\frac{1}{t}-(na-1)\log t\Big/+\log\text{Konst.}$

$=\frac{n-1}{x}-(na-\frac{1}{2})\log n$, wo log. Konst. $=-\frac{1}{2}\log n$ gesetzt ist.

Da nun $\frac{1}{x}=\int_x^\infty\frac{dt}{t^2}$, so hat man, wenn $-(na-\frac{1}{2})\log n$ nach rechts genommen wird,

$$(5)\ \log\frac{\prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\Gamma\left(a+\frac{\lambda}{n}\right)}{\Gamma(na)}+(na-\tfrac{1}{2})\log n=(n-1)\int_x^\infty\frac{dt}{t^2}-\frac{n-1}{2}\int_x^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt-(n-1)\int_x^\infty\frac{dt}{(e^t-1)t}$$

oder wenn wieder 0 als untere Grenze gesetzt wird, $= (n-1)J$, wo

$$(\alpha)\qquad J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{2}\frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t(e^t-1)}\right) dt.$$

Nun muß J ausgewertet werden.

In der Formel für J ersetzen wir t durch $2t$, so hat man, wenn noch mit 2 multipliziert wird,

$$(\beta)\qquad 2J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{t^2} - \frac{e^{-2t}}{t} - \frac{2}{t(e^{2t}-1)}\right) dt.$$

Subtrahiert man (α) von (β), dann ergibt sich

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{e^t-1} - \frac{2}{e^{2t}-1}\right)\frac{dt}{t},$$

$$(\gamma)\qquad J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{e^t+1}\right)\frac{dt}{t}.$$

Bekanntlich ist[1] $\log n = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-nt}}{t}\, dt$, daher

$$(\delta)\qquad \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt.$$

Wird (δ) von (γ) subtrahiert, so hat man

$$(\varepsilon)\qquad J - \frac{1}{2}\log 2 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^t+1} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Nun ist aber nach Formel (1)

$$\log\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1-e^{+\frac{1}{2}t}}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{e^{\frac{1}{2}t}+1}\right)\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{e^t+1}\right)\frac{dt}{t},$$

daher $J - \frac{1}{2}\log 2 = \log\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\log\pi$, $J = \frac{1}{2}\log 2\pi$. Dieser Wert wird in (5) substituiert, dann ergibt sich

$$\log\frac{\prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\Gamma\left(a+\frac{\lambda}{n}\right)}{\Gamma(na)} + (na - \tfrac{1}{2})\log n = \frac{n-1}{2}\log 2\pi,$$

---

1) Siehe J. H. Graf, Einleitung in die Theorie der Gamma-Funktion, S. 48, Formel (49).

woraus

$$n^{na-\frac{1}{2}}\prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\Gamma\left(a+\frac{\lambda}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(na)$$

oder

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na). \tag{6}$$

Der Gang des Beweises dieser Formel, bekannt unter dem Namen „das Theorem von Gauß", folgt im Anfang dem Weg, welchen Schlömilch in seinem Compendium der Analysis, II. Auflage, S. 251, 252, gegeben hat, führt dann aber nach den Angaben L. Schlaeflis durchaus selbständig zum Ziel. Man vergleiche hierüber auch, was H. Schenkel in seiner Dissertation: Kritisch-historische Untersuchung über die Theorie der Gammafunktion etc., S. 21 ff. u. S. 38 ff., angibt. Für $a=1/n$ folgt die einfachere Beziehung:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}. \tag{7}$$

Wie Schlömilch auf Seite 253 loc. cit. angibt, läßt sich diese letzte Formel auch beweisen durch Anwendung von $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$. Wir setzen $\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\lambda\pi}{n}}$, dann ist

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2=\prod_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{\lambda\pi}{n}}.$$

Aber $\frac{\pi}{\sin\frac{\lambda\pi}{n}}=\frac{2i\pi}{e^{\frac{\lambda i\pi}{n}}-e^{-\frac{\lambda i\pi}{n}}}=\frac{-2i\pi e^{\frac{\lambda i\pi}{n}}}{1-e^{\lambda\frac{2i\pi}{n}}}$, also

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2=\prod_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\frac{-2i\pi\cdot e^{\frac{\lambda i\pi}{n}}}{1-e^{\lambda\frac{2i\pi}{n}}},$$

und wegen $\prod_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\left(x-e^{\lambda\frac{2i\pi}{n}}\right)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1$ folgt

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}\left(1-e^{\lambda\frac{2i\pi}{n}}\right)=n,\quad\prod_{\lambda=1}^{\lambda=n-1}e^{\lambda\frac{i\pi}{n}}=i^{n-1},$$

so daß sich ergibt

$$\left\{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}^2=\frac{(2\pi)^{n-1}(-i)^{n-1}i^{n-1}}{n}=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

oder

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

wie vorhin.

Bern, im September 1904.

Über die Erledigung des Malfattischen Problems mit den Hilfsmitteln der elementaren Planimetrie.

Von C. Isenkrahe in Trier.

Man kann schon eine ganze Reihe der für den Schulunterricht geschriebenen Leitfäden durchblättern, ohne das berühmte, „vielumworbene“ Taktionsproblem Malfattis überhaupt erwähnt zu finden. Und wenn man es irgendwo antrifft, so zeigt sich, daß die Lösungsmethode entweder trigonometrisch[1]) ist, oder — falls die rein planimetrische Aufgabe auch ausschließlich mit planimetrischen Hilfsmitteln behandelt wird — daß der bekannte, von Steiner zu diesem Zweck aufgestellte Lehrsatz zu Hilfe genommen wird[2]), ein Satz, dessen Ableitung *weit jenseits* des Gymnasialunterrichts liegt.

Auch einige in neuerer Zeit erschienene, der genannten Aufgabe gewidmete Abhandlungen, z. B. die von Sachs, Davids und Pampuch, konnten — so gediegen und wertvoll sie in wissenschaftlicher Hinsicht sind — eben wegen des zur Lösung aufgebotenen wissenschaftlichen Apparates die Aufnahme des Problems in Schulbücher kaum empfehlen.

Geeigneter dürfte wohl ein Weg erscheinen, der im Folgenden eingeschlagen werden soll, und auf dem schon ein Gymnasialsekundaner mitkommen kann. Trigonometrische Vorkenntnisse sind überhaupt nicht erforderlich; bei der sogenannten „algebraischen Analysis“ werden

1) Vergl. u. a. Heis, Trigonometrie, S. 188 und Schwering „Hundert Aufgaben“, S. 68. Heis verweist auf Crelles mathematische Aufsätze, und Schwering löst nach Schellbach, Crelles Journal Bd. 45, S. 91.

2) Vgl. u. a. Koppe-Diekmann, Geometrie II S. 43 und Junghans, Lehrbuch der Geometrie I S. 283. In letzterem Buche wird außer der Steinerschen Lösung noch eine von Adams vorgetragen, bei welcher die Konstruktion zwar ziemlich einfach, der Beweis aber recht kompliziert ist. — Von Aufgabensammlungen möge angeführt werden die von Gustav Hoffmann, welche die Steinersche Lösung enthält, und die von Lieber und v. Lühmann, welche außer der Steinerschen noch die trigonometrische von Grunert und von Schellbach wiedergibt. — M. Kröger sagt in seiner nicht für den Schulgebrauch bestimmten Planimetrie (Hamburg 1896, S. 337): „Man findet die Malfattische Aufgabe *in Lehrbüchern selten behandelt,* weil ihre Lösung bis jetzt entweder darauf gegründet wurde, daß man durch weitläufige Berechnungen die Größe der Radien in konstruierbaren Ausdrücken feststellte, oder ein trigonometrisches Verfahren einschlug.“ Dann gibt er zwei Lösungen, welche beide, und zwar die erste nach Petersen durch Kreispotenzsätze, die zweite nach Kunze durch Streckenberechnung erzielt, zuletzt auf die Steinersche Konstruktion hinauslaufen.

nur wenige ganz elementare Sätze verwendet; auf planimetrischem Gebiet sind vorausgesetzt die Lehre von der Ähnlichkeit, die einfachsten Sätze über den Flächeninhalt des Dreiecks, über die Radien der Berührungskreise und der Ptolemäische Lehrsatz.

Schon Binder hat in seiner hervorragenden Arbeit über das Malfattische Problem[1]) beiläufig einen Gedanken ausgesprochen, der unserem Lösungsplan nahe kommt. Er sagt: „Es sei hier gelegentlich bemerkt, daß man auf verschiedene *interessante und rein geometrisch lösbare* Aufgaben geführt wird, wenn man den Versuch macht, das Problem zunächst auf die Konstruktion *zweier* Kreise zurückzuführen. Man kann z. B. zwei Kreise, die je zwei Dreiecksseiten und einander berühren, zeichnen, wenn gegeben die Summe oder die Differenz ihrer Halbmesser, oder die Richtung ihrer Zentrale, oder der Abstand ihrer Berührungspunkte auf der von beiden berührten Seite, oder der Punkt, in welchem diese Seite von der innern Tangente beider Kreise getroffen wird; und dann die in diesen Aufgaben als gegeben angenommenen Stücke für *den* Fall zu bestimmen suchen, daß die zwei Kreise Malfattische Kreise werden sollen, wobei man dann freilich nur für die zwei letzten Fälle auf einfache Bestimmungen kommen wird."

Schwering zieht bei seiner Besprechung der Malfattischen Aufgabe zu Anfang auch nur zwei Kreise in Betracht, schlägt mit diesen aber keinen von den fünf Wegen ein, die Binder andeutet, sondern leitet bloß das Ergebnis ab, daß die Projektion der Zentrale auf die gemeinschaftliche Tangente gleich dem doppelten Produkte aus den Wurzeln der Radien ist.

Im Folgenden soll nun ein sechster, von Binder nicht angegebener Gedankengang entwickelt werden, der tatsächlich zu einer sehr einfachen Konstruktion *zweier* Malfattischer Kreise führt. Sind diese erst fertig, so ist es offenbar eine geometrische Kleinigkeit, den dritten noch hinzuzufügen.

I. Das ursprüngliche Malfattische Problem.

In bezug auf *Benennungen* schließe ich mich an Pampuch[2]) an mit nur einer Ausnahme. Pampuch benutzt die *Orthogonalkreise* der Malfattischen und bezeichnet die Radien der ersteren mit x, y, z, die der letzteren mit x_1, y_1, z_1. Wir haben die Orthogonalkreise gar nicht nötig; daher bedeuten x, y, z die Radien der Malfattikreise, und

1) Tübingen 1868, S. 17.

2) „Das Malfatti-Steinersche Problem". Programmabhandlung des Gymn. an St. Stephan zu Straßburg i. E. 1902, S. 5.

zwar gehört x zum Winkel CAB, y zu ABC, z zu BCA. — Der Radius des Inkreises heißt ϱ. Dieser Kreis trennt an seinen Berührungspunkten die Seite $AB = c$ in die Stücke s_1 und s_2, $BC = a$ in die Stücke s_2 und s_3, $CA = b$ in die Stücke s_3 und s_1. Dabei liegt s_1 an A, s_2 an B, s_3 an C. Der Mittelpunkt des Inkreises wird mit O, die Strecke AO mit α, BO mit β, CO mit γ, die Höhen mit h_α, h_β, h_γ, der Umfang des Dreiecks mit $2s$ bezeichnet.

Die drei Grundgleichungen:

$$c\varrho = xs_1 + ys_2 + 2\varrho\sqrt{xy},$$

$$a\varrho = ys_2 + zs_3 + 2\varrho\sqrt{yz},$$

$$b\varrho = zs_3 + xs_1 + 2\varrho\sqrt{zx}$$

ergeben sich aus den einfachsten planimetrischen Flächensätzen ohne jede Schwierigkeit. Die Umwandlung dieser Gleichungen in lineare hat manchen Autoren große Mühe gemacht. Leicht gelingt sie, wenn man sich — was nicht bloß auf trigonometrische, sondern auch auf rein planimetrische Weise bequem geschehen kann — drei einfache Relationen ableitet, nämlich folgende:

$$1.\quad \frac{h\alpha}{2\varrho} = \frac{bs_3}{\gamma^2} = \frac{cs_2}{\beta^2},$$

$$2.\quad s_2 s_3 = \varrho^2 + \varrho\frac{\beta\gamma}{\alpha},$$

$$3.\quad a\alpha\varrho = s_1\beta\gamma.$$

Mit diesen hat man dann auch aus der ersten die gleich gebildeten Ausdrücke für $\frac{h\beta}{2\varrho}$ und $\frac{h\gamma}{2\varrho}$, aus der zweiten solche für $s_3 s_1$ und $s_1 s_2$, aus der dritten solche für $b\beta\varrho$ und $c\gamma\varrho$.[1]) Die Anwendung von 1. und 2. führt sehr schnell zu den linearen Gleichungen:

$$\alpha(\varrho\sqrt{z} + s_2\sqrt{y}) = \beta(\varrho\sqrt{z} + s_1\sqrt{x}),$$

$$\beta(\varrho\sqrt{x} + s_3\sqrt{z}) = \gamma(\varrho\sqrt{x} + s_2\sqrt{y}),$$

$$\gamma(\varrho\sqrt{y} + s_1\sqrt{x}) = \alpha(\varrho\sqrt{y} + s_3\sqrt{z}).$$

1) Gleiche und ähnliche Relationen werden auch von Davids (Archiv für Math. u. Phys. (2) **13**, S. 10 ff. 1895; (2) **14**, S. 276 ff. 1896, „Dreizehn Auflösungen des Malfattischen Problems") ohne Beifügung eines Beweises an mehreren Stellen benutzt, dabei aber nicht überall richtig aufgeschrieben. So steht S. 23 irrtümlich $\mathfrak{R}^2 - mn = \frac{\mathfrak{R}vw}{u}$ statt $mn - \mathfrak{R}^2 = \frac{\mathfrak{R}vw}{u}$.

Durch Elimination von $\sqrt{z}$ aus den beiden letzten und Anwendung der Relation 3. ergibt sich:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha + b - \gamma}{a + \beta - \gamma},$$

worauf man durch eine einfache planimetrische Konstruktion diejenigen Strecken p und q erhält, welche die Gleichung:

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$$

befriedigen. — Damit ist keine der fünf Funktionen, die Binder angibt, sondern eine sechste, nämlich *das Verhältnis der Radien* zweier Malfattikreise bekannt. Jetzt diese Kreise selbst in das gegebene Dreieck hineinzuzeichnen, gelingt nach der elementaren „Ähnlichkeitsmethode" sofort. Den dritten liefert schließlich einer der einfachsten Sonderfälle der Apollonischen Aufgabe.

II. Das erweiterte Malfattische Problem.

In den seit ihrer Aufstellung verflossenen hundert Jahren ist die Malfattische Aufgabe schon auf mehrfache Weise erweitert und wieder eingeschränkt worden. Pampuch umgrenzt sie[1]) folgendermaßen: *„In einer Ebene sind drei reelle Gerade BC, CA, AB gegeben. Drei reelle Kreise sind so herzustellen, daß jeder die beiden übrigen und zwei der drei Geraden berührt. Dabei sollen unter diesen sechs Linien keine drei einen Büschel bilden."*

Auch in dem durch diese Fassung gekennzeichneten größeren Umfange läßt sich das Problem mit elementarer Planimetrie vollständig erledigen. Analysis und Konstruktion bewegen sich dabei stets genau parallel mit vorstehender Lösung der einfachen Aufgabe. Neu hinzuzukommen braucht nur noch die Determination. Grade diese ist es aber auch, worauf mehrere der bisherigen Bearbeiter besondere Aufmerksamkeit und zum Teil einen großen, tiefgreifenden wissenschaftlichen Apparat verwendet haben. Dennoch sind die Ergebnisse nicht immer einwandfrei geblieben. So schließt z. B. Pampuch seine Programmabhandlung von 1902 mit der Bemerkung: „Aus diesen 32 berechneten und gezeichneten Figuren geht auch hervor, daß die 32 Lösungen des Malfattischen Problems weder von Binder noch von Sachs in allen Fällen (vgl. Nr. 6—8) richtig charakterisiert worden sind."

In der genannten Arbeit hat Pampuch selbst eine eigene, korrekte Determination entwickelt, die aber wesentlich *algebraischer* Natur ist.

1) Archiv für Math. u. Phys. (3) 8, S. 44, 1904.

Dieser möchte ich nun hier eine rein *planimetrische* gegenüberstellen und scheue mich auch nicht, dabei einen Weg einzuschlagen, den Sachs ausdrücklich als ungeeignet bezeichnet hat, indem er schreibt[1]): „Überhaupt erscheint die Wahl der Einteilung der Lösungen nach den Winkeln, in denen die Kreise liegen, *als eine wenig glückliche;* denn einmal werden dadurch offenbar verwandte Gestalten der Lösung voneinander getrennt, und sodann kommt es sehr häufig vor, daß sich bei Vertauschung der Winkel B und C durchaus nicht der entsprechende Fall der Lösung einstellt, der nach dem Schema zu erwarten wäre."

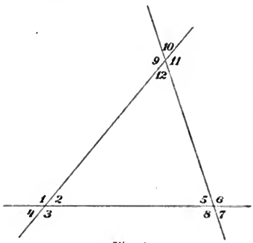


Fig. 1.

Ich hingegen finde, daß grade *diese* so naheliegende „Wahl der Einteilung" durchaus naturgemäß ist und auch vollständig zum Ziele führt, wenn man ein zweites ebenso naturgemäßes Einteilungsprinzip hinzufügt. Dieses letztere besteht einfach in einer *genauen Unterscheidung der verschiedenen Art und Weise, wie je zwei Malfattische Kreise sich überhaupt berühren können.*

Nehmen wir also zunächst die **Haupteinteilung** aller möglichen Lösungen vor und zwar „nach den Winkeln, in denen die Kreise liegen können".

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Winkel, wie Fig. 1 es zeigt, mit den Nummern 1 bis 12. Die durch den Wortlaut der Aufgabe vorgeschriebene Einschränkung, wonach *„Kreisbüschel"* ausgeschlossen sind, hat zur Folge, daß alle diejenigen Lösungen außer Betracht zu bleiben haben, bei denen zwei Kreise — wie Binder das nennt — auf „entgegengesetzten Ufern" einer und derselben Dreiecksseite liegen. Im Kontaktfalle nämlich würde dann am Berührungspunkt ein „Büschel" entstehen. Die drei gegebenen Geraden dürfen daher immer nur als *äußere* gemeinschaftliche Tangenten auftreten.

Bezeichnen wir nun mit K_1 denjenigen Kreis, der die Schenkel des Winkels Nr. I berührt, und mit K_2 bis K_{12} entsprechend die übrigen Kreise, so kann K_1 offenbar nur kombiniert werden einerseits mit den Kreisen K_5 und K_9, andererseits mit K_6 und K_{10}. Auf dieselbe Weise ergeben sich als mögliche Ternionen: $K_2K_6K_{11}$, $K_2K_5K_{12}$, $K_3K_8K_{12}$, $K_3K_7K_{11}$, $K_4K_8K_9$ *und weiter keine mehr.*

1) Dr. Joseph Sachs „Über die Aufgabe des Malfatti, ihre Erweiterungen und Lösungen". Freiburg 1885, S. 27.

Diese sieben Ternionen zerfallen naturgemäß in *drei Gruppen*. Die erste derselben ist dadurch gekennzeichnet, daß ein Innenwinkel und zwei Außenwinkel des Dreiecks dabei beteiligt sind. Dahin gehören die drei Ternionen mit den Ziffern 1, 5, 9 — 2, 6, 11 — 3, 8, 12.

Die zweite Gruppe ist gekennzeichnet durch die Beteiligung zweier Außenwinkel und eines Scheitelwinkels. Dahin gehören ebenfalls drei Ternionen, nämlich 1, 6, 10 — 3, 11, 7 — 4, 8, 9.

Die dritte Gruppe enthält die drei Innenwinkel und also nur die eine Ternion 2, 5, 12.

Diese sieben, in drei Gruppen zusammenlegbaren Ternionen umfassen sämtliche Lösungen des Problems, begründen deren aber nicht etwa bloß sieben, sondern 32 — eine Zahlvermehrung und Zahlabgrenzung, die sich ganz leicht ergibt, wenn man das schon erwähnte zweite Einteilungsprinzip hinzunimmt, nämlich die verschiedenen *Kontaktmöglichkeiten je zweier* Kreise beachtet und die damit zugleich bestimmten Möglichkeiten für die Lage des *dritten*.

In den bisherigen mir bekannt gewordenen Determinationen finde ich diesen Punkt nicht mit genügender Schärfe hervorgehoben und glaube auf denselben hier etwas näher, und zwar im einzelnen eingehen zu dürfen.

Kontakte zwischen K_1 *und* K_5. — Wir stellen uns vor, diese beiden Kreise *wüchsen* aus den Ecken A und B heraus und schritten in ihren Winkelräumen 1 und 5 allmählich vor. Dann können beide sich nicht eher berühren, als bis K_5 die Größe des Inkreises in ABC erreicht hat. Von diesem Augenblicke ab ist eine erste Berührung von außen möglich. Hält man den Kreis K_1 an irgend einer Stelle fest und läßt K_5 weiter wachsen, so entsteht nach der ersten Berührung von außen zunächst ein zweiter Kontakt, der eine Berührung von innen, ein Büschelkontakt ist und also für unsere Aufgabe nicht in Betracht kommt. Bevor aber der wachsende Kreis K_5 sich von K_1 gänzlich trennt, entsteht nochmals eine Berührung von außen, ein Letztkontakt. Fig. 2 stellt alle drei Fälle dar. Der Letztkontakt vollzieht sich also durch Übergreifen von K_5 über K_1.

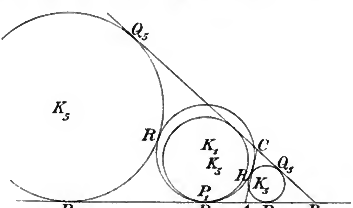


Fig. 2.

Auch Sachs spricht[1]) von Fällen, in denen ein Kreis den andern „übergreift“ oder „jenseits des andern“ liegt, er hat aber den Unterschied der *Kontakte* nicht als maßgebendes *Einteilungs- und Ordnungsprinzip* durchgeführt. Dagegen redet er an mehreren Stellen über die Notwendigkeit „nach *Größenverhältnissen der Radien*“ zu unterscheiden. Nun hat es allerdings gemäß Fig. 2 den Anschein, als ob unsere Unterscheidung nach Erst- und Letztkontakt nichts anderes wäre, als die von Sachs betonte Unterscheidung nach dem Größenverhältnis der Radien; denn beim Erstkontakt ist dort augenscheinlich $K_5 < K_1$, beim Letztkontakt $K_5 > K_1$. Aber bei näherer Überlegung erkennt man bald, daß die beiden Unterscheidungsarten doch wesentlich verschieden sind, da ja auch schon beim Erstkontakt (wie man beispielsweise an Pampuch Fig. 18 sieht) $K_5 > K_1$ sein kann.[2])

Noch ein weiterer Umstand ist für den Unterschied zwischen Erst- und Letztkontakt von Belang.

Es mögen die Berührungspunkte beider Kreise auf der gemeinschaftlichen Tangente AB heißen P_1 bez. P_5, die auf AC und BC liegenden Berührungspunkte Q_1 bez. Q_5; der Berührungspunkt beider Kreise heiße R. Der in den Winkelraum Nr. 5 sich einschmiegende Bogen ist also $P_5 Q_5$. Dieser Bogen reicht *nicht* bis zum Punkte R beim Erstkontakt. Beim Letztkontakt hingegen greift er über R hinweg und enthält diesen Punkt in sich. *Das* ist der wichtigere und in späteren Überlegungen wiederkehrende Sachgrund, weshalb K_5 beim Letztkontakt als der „übergreifende“ Kreis zu bezeichnen ist.

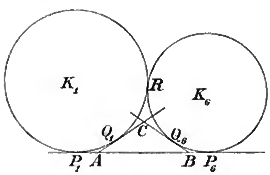


Fig. 3.

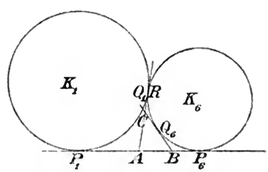


Fig. 4.

Berührungen zwischen K_1 *und* K_6. — Wachsen die Kreise K_1 und K_6 aus ihren Eckpunkten A und B heraus, so nähern sich die Be-

1) In der vorhin erwähnten Abhandlung S. 20 und 21.

2) Nicht bloß für die Determination, sondern schon für die Analysis ist bei der Lösung der Malfattischen Aufgabe die Unterscheidung zwischen Erst- und Letztkontakt von Wichtigkeit. Denn grade die Art des Kontaktes, keineswegs aber das „Größenverhältnis der Radien“ übt auf die *Form der Grundgleichungen* einen wesentlichen Einfluß aus.

rührungspunkte Q_1 und Q_6 einander und dem Punkte C. Schon bevor einer von ihnen C erreicht, ist ein Erstkontakt möglich, den Fig. 3 zeigt. Läßt man von da ab die Kreise weiter wachsen, so kommt

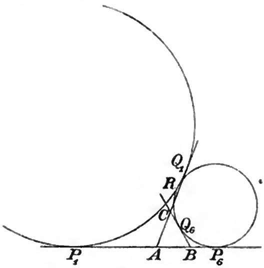


Fig. 5.

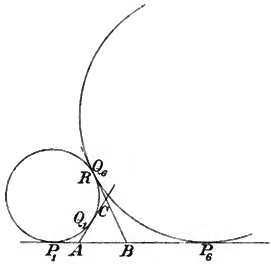


Fig. 6.

kein Büschelkontakt zustande. Soll ein solcher erzielt werden, so muß man nur *einen*, etwa K_1 wachsen, K_6 aber soweit wieder abnehmen und zurücktreten lassen, bis er mit dem *Ankreise* an BC identisch wird. K_6 bekommt dann auch auf der verlängerten AC einen Berührungspunkt, und mit diesem kann Q_1 und R gleichzeitig zusammenfallen. Auf solche Weise bildet sich ein Büschelkontakt, bei dem K_1 und K_6 sich von außen berühren. Fig. 4.

Wenn aus dieser Lage heraus beide Kreise weiter wachsen, so kann auch, wie Fig. 5 zeigt, ein Letztkontakt entstehen, ein *Letztkontakt durch Übergreifen von* K_1, bei welchem Q_1 über R hinausrückt.

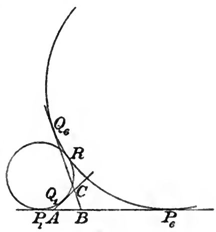


Fig. 7.

Fig. 6 und 7 zeigen, wie umgekehrt durch Zurücktreten von K_1 und Anwachsen von K_6 ein zweiter Büschelkontakt und ein zweiter Letztkontakt[1]), nämlich durch *Übergreifen von* K_6 entsteht.

Berührungen zwischen K_2 *und* K_5. — Fig. 8 stellt dar, wie hierbei durch Anwachsen der Unterschied von Erst-, Büschel- und Letztkontakt

1) Zwischen ihrem Erst- und Letztkontakt wandern hier nicht, wie im vorigen und allen folgenden Fällen, die Kreise durcheinander hindurch, sondern gleiten beim Büschelkontakt aneinander äußerlich vorbei. Auch diese Besonderheit kommt bei den „Grundgleichungen" zum Ausdruck.

entsteht. Die folgenden Figuren zeigen, daß *drei verschiedene Letztkontakte* vorkommen können. Bei Fig. 9 liegt R zwischen P_2 und Q_2, nicht aber zwischen P_5 und Q_5; es ist also vorhanden ein Letztkontakt durch Übergreifen von K_2. Fig. 10 stellt auf entsprechende Weise

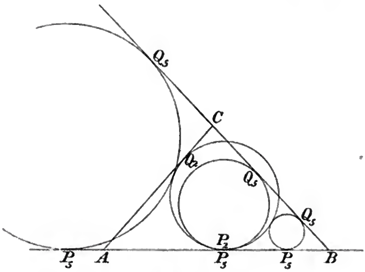


Fig. 8.

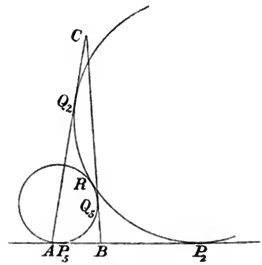


Fig. 9.

den Letztkontakt durch Übergreifen von K_5 dar. Fig. 11 zeigt, wie durch genügendes Anwachsen beider Kreise eine dritte Art von Letztkontakt entstehen kann, bei welchem — und das ist besonders bemerkenswert — *sowohl K_2 als auch K_5 übergreifende Kreise* sind.

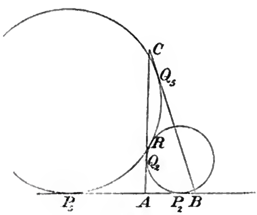


Fig. 10.

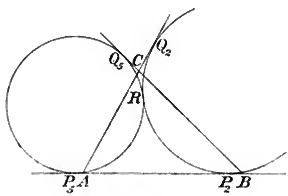


Fig. 11.

Die Berührungen der übrigen Kreispaare bieten wenig Anlaß mehr zu weiteren Bemerkungen. Zwischen K_2 und K_6 stimmen die Kontakte in allen Eigenschaften überein mit denen zwischen K_1 und K_5.

Bei den Berührungen zwischen K_3 und K_7 ist ein Außen- und ein Scheitelwinkel beteiligt. Die Arten des Kontakts sind denen bei K_1 und K_5 ebenfalls sehr ähnlich. Es gibt einen Erst-, einen Büschel- und einen Letztkontakt. Bei diesem ist der Außenwinkel K_3 der übergreifende. Fig. 12.

Die Kreise K_3 und K_8 können einen Erst-, zweierlei Büschel- und zweierlei Letztkontakte eingehen, den einen durch Übergreifen von K_3, Fig. 13, den andern durch Übergreifen von K_8. Fig. 14.

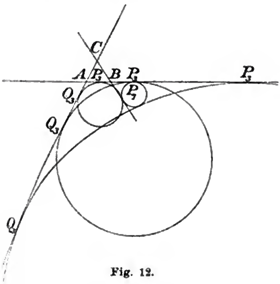


Fig. 12.

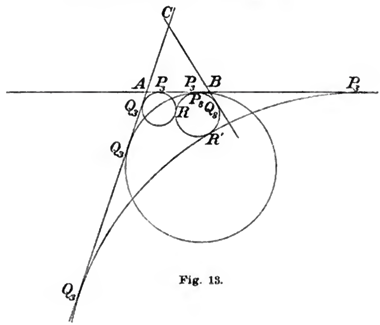


Fig. 13.

Die Berührungen von K_4 und K_8 stimmen vollständig überein mit denen zwischen K_3 und K_7.

Hiermit sind alle durch die Fassung der Aufgabe zugelassenen Verbindungen von *je zwei* Kreisen erledigt; es bleibt also nur noch der letzte Schritt übrig, nämlich die Untersuchung, wo und wie jedesmal der *dritte* hinzutreten kann. —

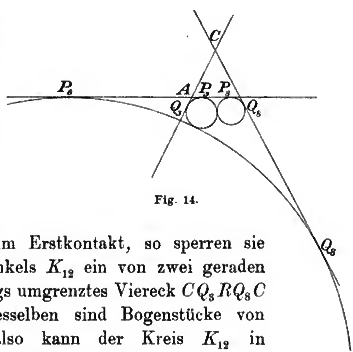


Fig. 14.

Unter den drei Ternionen der *ersten Gruppe* wählen wir, weil die Kontakte zwischen K_3 und K_8 soeben besprochen worden sind, die Ternion $K_3 K_8 K_{12}$.

a) Stehen K_3 und K_8 im Erstkontakt, so sperren sie in dem Flächenraum des Winkels K_{12} ein von zwei geraden und zwei krummen Linien rings umgrenztes Viereck $C Q_3 R Q_8 C$ ab. Fig. 13. Innerhalb desselben sind Bogenstücke von K_3 und K_8 anzutreffen, also kann der Kreis K_{12} in dieses Viereck hineingelegt werden; er steht dann mit K_3 und K_8 im Erstkontakt. Zweitens kann K_{12} aber auch außerhalb jenes Vierecks in dem freien Winkelraum des Winkels 12 liegen; denn auch dort sind Bogenstücke von K_3 und K_8 vorhanden. In

diesem Falle steht K_{12} mit beiden anderen Kreisen im Letztkontakt. Andere Möglichkeiten, also etwa Erstkontakt mit K_3 und zugleich Letztkontakt mit K_8, oder umgekehrt, sind offenbar ausgeschlossen.

b) Setzen wir K_3 und K_8 in Letztkontakt mit übergreifendem K_3, so ist wiederum ein Viereck, nämlich $CQ_3R'Q_8C$ abgesperrt, Fig. 13, und aus dem vorhin angegebenen Grunde kann K_{12} *darin* liegen, im Erstkontakt mit K_3 und K_8. Außerhalb aber, im offenen Winkelraum 12, gibt es nur vom übergreifenden Kreise K_3, nicht aber von K_8 ein Bogenstück; also kann K_{12} dort nicht liegen, weil er dort nicht *beide* anderen Kreise berühren kann. Außer der angegebenen ersten gibt es demnach für K_{12} keine mögliche Lage mehr.

c) Ganz ebenso liegt die Sache, wenn wir K_8 gegen K_3 zum übergreifenden Kreise machen; auch dann gibt es nur eine Lösung. —

Aus der *zweiten Gruppe* wählen wir zur Besprechung die Ternion $K_1 K_6 K_{10}$.

a) Steht K_1 mit K_6 im Erstkontakt, so ist im Scheitelwinkel Nr. 10 ein Viereck abgeschlossen, welches begrenzt wird durch die Schenkel dieses Winkels und zwei Stücke der Bogen RQ_1 und RQ_6. Fig. 3. Innerhalb dieses Vierecks besitzen also beide Kreise Bogenstücke und erlauben dem Kreise K_{10} somit den Malfattischen Kontakt. Derselbe ist beidemal ein Erstkontakt. Zweitens aber sind im freien Außenraum des Scheitelwinkels 10 ebenfalls Bogenstücke von K_1 und K_6 vorhanden; also gibt es auch dort eine mögliche Lage für K_{10}, und die Kontakte mit K_1 und K_6 sind auch in diesem Falle Erstkontakte.

b) Wir setzen nun K_1 zu K_6 in Letztkontakt mit übergreifendem K_1. Dann sind wiederum in dem abgeschlossenen Viereck (Fig. 5) Bogenstücke beider Kreise vorhanden. Dort kann also K_{10} liegen, im Erstkontakt mit K_6, im Letztkontakt mit dem übergreifenden Kreise K_1. Da der Kreis K_6 in den freien äußeren Winkelraum 10 nicht hineindringt, so ist K_{10} dort unmöglich.

c) Im dritten Falle, beim Übergreifen von K_6 über K_1 (Fig. 7) gibt es ebenfalls nur eine Lösung. —

Die *dritte Gruppe* enthält nur die Ternion $K_2 K_5 K_{12}$.

a) Stehen K_2 und K_5 im Erstkontakt, so haben wir wiederum das umgrenzte Viereck CQ_2RQ_5C, Fig. 15. Innerhalb desselben, sowie auch im freien Außenraum des Winkels 12 sind Bogenstücke beider Kreise vorhanden. Also gibt es für K_{12} zwei mögliche Lagen. Bei der ersten steht K_{12} mit K_2 und K_5 im Erstkontakt, bei der zweiten mit beiden in übergreifendem Letztkontakt.

b) Steht K_2 übergreifend mit K_5 im Letztkontakt, so ist von der Betrachtung eines umschlossenen Vierecks abzusehen. Die möglichen Lagen von K_{12} ergeben sich hier aus der leicht zu gewinnenden Einsicht, daß in diesem Falle zwischen K_{12} und K_2 *kein Erstkontakt* eintreten kann. Zu solchem Erstkontakt würde nämlich erforderlich sein, daß der Kreis K_2 auf der Dreiecksseite AC einen Berührungspunkt Q_2 hätte, der zwischen A und C läge, Fig. 9, und daß der Kreis K_{12} die nämliche Dreiecksseite AC irgendwo *zwischen C und Q_2* berühren müßte. Geschähe das aber, so würde K_{12} die Malfattische Forderung eines Kontakts auch mit dem Kreise K_5 — der ja doch in einem anderen, gänzlich abgetrennten Teile des Dreiecks ABC liegt — offenbar unmöglich erfüllen können. Ist somit ein Erstkontakt zwischen K_2 und K_{12} ausgeschlossen, so bleiben für den letzteren Kreis bloß zwei Möglichkeiten übrig, nämlich:

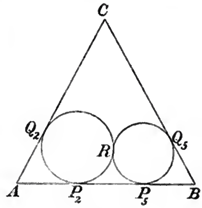


Fig. 15.

1) Letztkontakt mit K_2 und Erstkontakt mit K_5,

2) Letztkontakt mit beiden.

c) Steht umgekehrt K_5 übergreifend mit K_2 im Letztkontakt, so ergibt sich auf gleiche Weise wie eben, daß wiederum nur zwei Fälle möglich sind: K_{12} hat mit K_5 Letztkontakt und dabei mit K_2 Erst- oder Letztkontakt.

d) Nun ist noch der interessante Fall übrig, daß K_2 und K_5 in *beiderseits* übergreifendem Letztkontakt stehen. Fig. 11. Dann ist im Winkelraum Nr. 12 wiederum ein abgeschlossenes Viereck vorhanden, begrenzt von den Schenkeln dieses Winkels und Stücken der beiden Bogen RQ_2 und RQ_5. Innerhalb sowohl wie außerhalb dieser Umgrenzung sind Teile von K_2 und K_5 anzutreffen. Es gibt also für den Kreis K_{12} zwei Lagen:

1) Liegt er innerhalb des Vierecks, so stehen K_2 und K_5 übergreifend zu ihm in Letztkontakt.

2) Liegt er außerhalb, so stehen alle drei Kreise zueinander in doppelt übergreifendem Letztkontakt.

Hiermit sind die in Betracht kommenden Fälle sämtlich erledigt, und es ergibt sich folgende:

Determination der möglichen Lösungen des Malfattischen Problems. Bei der *ersten* Ternionengruppe sind möglich:

in der Abteilung a) zwei,
in b) eine,
in c) eine,

im ganzen also vier Lösungen. Da die Gruppe drei gleichartige Ternionen enthält, so ist die Anzahl der in ihr möglichen Lösungen *zwölf*.

Bei der *zweiten* Gruppe sind möglich:

in der Abteilung a) zwei,
in b) eine,
in c) eine,

im ganzen also wiederum vier Lösungen. Die Gruppe enthält ebenfalls drei gleichartige Ternionen, also ist die Anzahl der hier möglichen Lösungen auch *zwölf*.

Bei der *dritten* Gruppe sind möglich:

in der Abteilung a) zwei,
in b) zwei,
in c) zwei,
in d) zwei,

im ganzen also *acht* Lösungen. Die Gruppe enthält nur eine Ternion.

Die Anzahl aller Lösungen des Problems bei der eingangs festgestellten Umgrenzung desselben ist mithin 32, und *jede einzelne Lösung ist durch die Angabe der Winkel, in denen die Kreise liegen, und Kennzeichnung der Kontaktart, in welcher sie einander paarweise berühren, genau charakterisiert.*

Die gleiche Ziffer 32 hat sich auch ergeben bei der auf *algebraische* Erwägungen gestützten Determination, die Pampuch in seiner oben zitierten Abhandlung entwickelt, und zwar erscheint sie dort als Produkt aus 4 mal 8.

Unsere *geometrische* Determination führt zu einer ganz anderen Einteilung. Es befinden sich nämlich unter der Gesamtzahl der Lösungen zwei ganz eigenartige, welche die besondere Eigenschaft haben, daß sie durch zyklische Vertauschung der Ecken, Winkel etc. des Dreiecks wieder *in sich selbst* übergehen. Das ist erstens die Lösung IIIa1, bei welcher die drei Innenwinkelkreise im Erstkontakt, zweitens IIId2, bei der dieselben Kreise im doppelt übergreifenden Letztkontakt stehen. Die 30 übrigen Lösungen gehen sämtlich durch zyklische Vertauschung *zu je dreien* ineinander über. Dieser Umstand tritt bei den Gruppen I und II schon durch die Dreizahl der Ternionen zutage, die in jeder von ihnen enthalten sind. Aber auch bei der

Gruppe III erkennt man leicht, daß b1 und c1 zyklisch in a2, sowie daß c2 und d1 in b2 übergehen.

Die Ziffer 32 stellt sich hier also naturgemäß dar als das Ergebnis von $2 + 3 \cdot 10$.

Die eigentümliche Natur der Lösung IIId2 gibt sich auch bei der von Sachs gewählten Anordnung zu erkennen; aber die Art, wie er sie charakterisiert, ist unscharf. Er sagt darüber S. 20: „Beim Falle 4 — damit ist eben unsere IIId2 gemeint — liegen alle drei Kreise in den Innenwinkeln des Dreiecks und berühren einander mit den im Innern des Dreiecks liegenden Segmenten." — Diese Angaben sind freilich richtig, aber sie treffen zu nicht bloß bei IIId2, sondern bei *allen acht Lösungen* der dritten Gruppe. Der „doppelt übergreifende Letztkontakt aller drei Kreise" hingegen kennzeichnet IIId2 eindeutig.

Die Überschrift: „*Dreizehn* Auflösungen des Malfattischen Problems", die Davids seiner oben angeführten Abhandlung gegeben, könnte zu der Frage veranlassen, ob etwa jene 13 in unsern 32 enthalten seien. Allein das Wort „Auflösung" bedeutet bei Davids nicht, wie das Wort „Lösung" bei Sachs, Pampuch und andern das *Ergebnis*, sondern die *Methode* der mathematischen Behandlung. Davids leitet aus denselben drei Grundgleichungen des *ursprünglichen* Malfattischen Problems auf zwölferlei algebraische Art Ausdrücke für die Kreisradien ab. Die dreizehnte Auflösung ist eine „Begründung der Konstruktion von Steiner". Das *erweiterte* Malfattische Problem, dem unsere 32 Lösungen angehören, behandelt er überhaupt nicht.

Es ist mir interessant erschienen, die 32 Lösungen, wie sie vorstehend gruppiert worden sind, mit denen zu identifizieren, die Pampuch und Sachs in ihren Systemen aufführen. Die vorhandenen Übereinstimmungen zeigt die Tabelle auf folgender Seite.

Ebenso, wie die geometrischen Schulbücher bekanntlich aus dem Apollonischen Taktionsproblem eine Reihe von Einzelfällen gesondert zu behandeln pflegen, kann auch jede einzelne der 32 Lösungen des Malfattischen als besondere Aufgabe hingestellt und mit den Hilfsmitteln der elementaren Planimetrie erledigt werden. Dabei sind je nach Lage der Kreise die drei auf Seite 212 angegebenen Relationen zu ersetzen durch drei ähnlich gebildete andere, in denen der Inkreis durch einen Ankreis vertreten wird. Auch hinsichtlich der Konstruktion ergeben sich gewisse Verschiedenheiten, aber ein und derselbe Grundgedanke ist durchführbar bei allen.

		Pampuch			Sachs
	Kreisternion:	$K_3 K_8 K_{12}$	$K_9 K_1 K_5$	$K_6 K_{11} K_2$	
Gruppe I	a) 1. Erstkontakt des 3. Kreises	26	18	10	I 2a
	2. Letztkontakt des 3. Kreises	25	17	9	I 1b
	b)	32	24	16	I 1d
	c)	31	23	15	I 1d
	Kreisternion:	$K_1 K_6 K_{10}$	$K_{11} K_3 K_7$	$K_8 K_9 K_4$	
Gruppe II	a) 1. Erstkontakt d. 3. Kreises im umgrenzten Winkelraum	30	22	14	I 2c
	2. Erstkontakt d. 3. Kreises im offenen Winkelraum	29	21	13	I 3a
	b)	28	20	12	I 3c
	c)	27	19	11	I 3c
	Kreisternion:	$K_2 K_5 K_{12}$			
Gruppe III	a) 1. Erstkontakt des 3. Kreises	1			I 1a
	2. Letztkontakt des 3. Kreises	4			I 2b
	b) 1. Erstkontakt des 3. Kreises	2			I 2b
	2. Letztkontakt des 3. Kreises	7			I 1c
	c) 1. Erstkontakt des 3. Kreises	3			I 2b
	2. Letztkontakt des 3. Kreises	6			I 1c
	d) 1. Erstkontakt des 3. Kreises	8			I 1c
	2. Letztkontakt des 3. Kreises	5			I 4

Diese kurzen Hinweise mögen hier genügen. Die *ausführliche* Darlegung sämtlicher in vorstehenden Erörterungen nur angedeuteten Operationen möchte ich, weil sie ein wesentlich didaktisches Interesse hat, mir für eine demnächstige Programmabhandlung[1]) vorbehalten.

Trier, 28. Sept. 1905.

1) Dieselbe ist inzwischen schon erschienen als wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Königlichen Kaiser-Wilhelms Gymnasiums in Trier, Ostern 1906.

Über drei Sätze von Dr. P. Zeeman *Gz.*

Von J. NEUBERG (Lüttich).

In den *Wiskundige Opgaven*[1]) hat Herr P. Zeeman (Delft) drei bemerkenswerte Sätze vorgelegt, von denen man Beweise in Deel VIII, Seite 305 und 396, und in Deel IX, Seite 168, findet.

Die anregenden und lehrreichen Abhandlungen von Fr. Meyer: *Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik* (dieses Archiv (3), VIII, S. 287), *Über die Höhen des Tetraeders* (ibid., S. 135), haben mich bewogen hier meine Beweise[2]) der Zeemanschen Sätze zu veröffentlichen. Diese Sätze scheinen mir geeignet, als Erläuterungen zu einigen Aussagen meines gelehrten Kollegen zu dienen. Bestehen einfache analytische Beweise, welche mehr als schlichte Bestätigungen sind? Kann man aus diesen Sätzen oder aus den Beweisen allgemeinere Wahrheiten ableiten?

1. Wenn von vier in derselben Ebene liegenden Geraden eine zur Verbindungslinie von Höhenschnitt und Schwerpunkt des von den drei andern gebildeten Dreiecks parallel ist, so hat jede der vier Geraden dieselbe Eigenschaft in bezug auf die drei übrigen. (Zeeman).

Folgenden Beweis dieses Satzes habe ich schon in Mathesis, 1903, Seite 60, veröffentlicht.

Die vier Geraden mögen a, b, c, d heißen und die drei ersten das Dreieck ABC bilden mit dem Höhenschnitt H und dem Schwerpunkte S; die Gerade HS ist also zu d parallel. Die algebraische Summe der aus den Scheiteln A, B, C auf die Linie HS gefällten Lote ist gleich Null. Diese Lote haben nun die Werte $AH \cos ad$, $BH \cos bd$, $CH \cos cd$; die Strecken AH, BH, CH sind aber gleich $2R \cos bc$, $2R \cos ca$, $2R \cos ab$, wenn R den Radius der Kreislinie ABC bezeichnet. Folglich besteht die Gleichheit

$$\cos ad \cdot \cos bc + \cos bd \cdot \cos ca + \cos cd \cdot \cos ab = 0,$$

welche symmetrisch in bezug auf die Richtungen der vier Geraden a, b, c, d ist; somit ist der obige Satz bewiesen.

1) Holländische Zeitschrift, herausgegeben von der mathematischen Gesellschaft mit dem Wahlspruch: Een onvermoeide arbeid komt alles te boven.

2) Sie sind ganz verschieden von den oben erwähnten.

Bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Winkel der Geraden a, b, c, d mit einer Achse $X'X$, so kann vorige Gleichung auch folgende Form annehmen:

$$\cos(\alpha-\beta)\cos(\gamma-\delta)+\cos(\alpha-\gamma)\cos(\beta-\delta)+\cos(\alpha-\delta)\cos(\beta-\gamma)=0.$$

Addiert man hierzu die bekannte Identität

$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta)+\sin(\alpha-\gamma)\sin(\delta-\beta)+\sin(\alpha-\delta)\sin(\beta-\gamma)=0,$$

so erhält man:

$$\cos(\alpha-\beta-\gamma+\delta)+\cos(\alpha-\gamma-\delta+\beta)+\cos(\alpha-\delta-\beta+\gamma)=0.$$

Mithin haben die Kosinus der Summen der gegenüberliegenden Winkel des vollständigen Vierseits $abcd$ eine verschwindende Summe.

2. Ich schalte hier planimetrische Entwicklungen ein als Vorbereitung zu einem zweiten Zeemanschen Satze; auch bieten sie von selbst ein gewisses Interesse, da sie einen klassischen Gegenstand berühren.

Bedeuten (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten von vier Punkten A, A_1, A_2, A_3 einer Kreislinie, so hat man bekanntlich:

$$\text{(I)} \qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ich werde im Nachtrag diese Gleichheit so umgestalten, daß man in derselben den Simsonschen Satz lesen kann. Ich löse hier, wohl etwas mühsam, die umgekehrte Aufgabe, nämlich: die Gleichung, welche ausdrückt, daß die Projektionen B_1, B_2, B_3 des Punktes A auf die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in einer geraden Linie liegen, auf die symmetrische[1]) Form (I) zu bringen. Diese Aufgabe entspricht folgendem Satze:

Sind vier in einer Ebene liegende Punkte so beschaffen, daß die Projektionen eines dieser Punkte auf die Seiten des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks kollinear sind, dann kommt diese Eigenschaft jedem der vier Punkte zu.

---

1) Das Wort symmetrisch gilt hier nur für die absoluten Werte der Funktionen. In diesem Sinne ist die später betrachtete Determinante Δ symmetrisch in bezug auf die drei Punkte A_1, A_2, A_3, erleidet jedoch einen Zeichenwechsel bei Vertauschung von zwei Zeigern.

Zum Beweise setze ich

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (z = z_1 = z_2 = z_3 = 1)$$

und bezeichne mit X_1, Y_1, Z_1, $X_2, \ldots$ die Unterdeterminanten von Δ. Auch sei

$$\delta_i \equiv x X_i + y Y_i + z Z_i.$$

Wenn x, y, z laufende Koordinaten sind, haben die Geraden $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ respektive die Gleichungen $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$.

Die Koordinaten irgend eines Punktes der zu $\delta_1 = 0$ senkrechten Linie AB_1 sind $x + \lambda_1 X_1$, $y + \lambda_1 Y_1$; setzt man sie ein in die Gleichung $\delta_1 = 0$, so findet man den Wert von λ_1 im Punkte B_1 aus $\delta_1 + \lambda_1(X_1^2 + Y_1^2) = 0$, also $\lambda_1 = -\delta_1 : (X_1^2 + Y_1^2)$, usw.

Sind die Punkte B_1, B_2, B_3 kollinear, so muß man haben

$$\begin{vmatrix} x + \lambda_1 X_1 & y + \lambda_1 Y_1 & 1 \\ x + \lambda_2 X_2 & y + \lambda_2 Y_2 & 1 \\ x + \lambda_3 X_3 & y + \lambda_3 Y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach Vereinfachung

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & \lambda_1^{-1} \\ X_2 & Y_2 & \lambda_2^{-1} \\ X_3 & Y_3 & \lambda_3^{-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Die zur dritten Spalte dieser Determinante gehörigen Minoren reduzieren sich auf Δz_1, Δz_2, Δz_3; somit kommt nach Einführung der Werte von λ_1, λ_2, λ_3:

$$\text{(II)} \qquad (X_1^2 + Y_1^2)\delta_2\delta_3 + (X_2^2 + Y_2^2)\delta_3\delta_1 + (X_3^2 + Y_3^2)\delta_1\delta_2 = 0,$$

was die bekannte Gleichung des Kreises $A_1 A_2 A_3$ in baryzentrischen Koordinaten ist.

Die Gleichungen (I) und (II) sind in den Koordinaten von A_1, A_2, A_3 bezüglich vom vierten und sechsten Grade; sie können sich voneinander unterscheiden nur durch einen Faktor, welcher eine symmetrische Funktion zweiten Grades dieser Koordinaten ist; diese Funktion ist wahrscheinlich Δ. Um diese Vermutung zu bestätigen, ordne ich die Gleichung (II) nach x und y und schreibe dafür:

$$Ax^2 + A'y^2 + Bxy + Cx + C'y + D = 0.$$

Auch bemerke ich von vorn herein die Gleichheiten:

$$\varDelta = \sum x_1 X_1 = \sum y_1 Y_1 = \sum Z_1,$$

$$0 = \sum X_1 = \sum Y_1 = \sum x_1 Y_1 = \sum x_1 Z_1 = \sum y_1 X_1 = \sum y_1 Z_1,$$

wo das Summenzeichen sich nur auf die Zeiger 1, 2, 3 erstreckt.

Man hat alsdann:

$$A = \sum X_1^2 X_2 X_3 + \sum Y_1^2 X_2 X_3 = X_1 X_2 X_3 \sum X_1 + \sum (x_2 - x_3)^2 X_2 X_3$$
$$= \sum x_1^2 X_1 (X_2 + X_3) - 2 \sum x_2 x_3 X_2 X_3 =$$
$$= - \sum x_1^2 X_1^2 - 2 \sum x_2 x_3 X_2 X_3 = - \sum{}^2 x_1 X_1 = - \varDelta^2,$$

woraus man $A = A' = - \varDelta^2$ schließt. Ferner findet man:

$$B = \sum X_1^2 (X_2 Y_3 + X_3 Y_2) + \sum Y_1^2 (Y_2 X_3 + Y_3 X_2)$$
$$= \sum X_1 X_2 Y_3 (X_1 + X_2) + \sum Y_1 Y_2 X_3 (Y_1 + Y_2)$$
$$= - \sum X_1 X_2 Y_3 X_3 - \sum Y_1 Y_2 X_3 Y_3 = 0;$$

$$C = \sum [(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2](X_2 Z_3 + X_3 Z_2)$$
$$= \sum (x_1^2 + y_1^2)[X_1 (Z_2 + Z_3) + Z_1 (X_2 + X_3)]$$
$$- 2 \sum (x_2 x_3 + y_2 y_3)(X_2 Z_3 + X_3 Z_2).$$

Ersetzt man $Z_2 + Z_3$ durch $\varDelta - Z_1$ und $X_2 + X_3$ durch $- X_1$, so kommt:

$$C = \varDelta \sum (x_1^2 + y_1^2) X_1 - 2 \sum x_1^2 X_1 Z_1 - 2 \sum x_2 x_3 (X_2 Z_3 + X_3 Z_2)$$
$$- 2 \sum y_1^2 Y_1 Z_1 - 2 \sum y_2 y_3 (X_2 Z_3 + X_3 Z_2)$$
$$= \varDelta \sum (x_1^2 + y_1^2) X_1 - 2 \sum x_1 X_1 \sum x_1 Z_1 - 2 \sum y_1 Y_1 \sum y_1 Z_1;$$

also $C = \varDelta \sum (x_1^2 + y_1^2) X_1$, $C' = \varDelta \sum (x_1^2 + y_1^2) Y_1$.

Zuletzt hat man:

$$D = \sum [(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2] Z_2 Z_3$$
$$= \sum (x_1^2 + y_1^2) Z_1 (Z_2 + Z_3) - 2 \sum (x_2 x_3 + y_2 y_3) Z_2 Z_3$$
$$= \varDelta \sum (x_1^2 + y_1^2) Z_1 - \sum{}^2 x_1 Z_1 - \sum{}^2 y_1 Z_1 = \varDelta \sum (x_1^2 + y_1^2) Z_1.$$

Nach Streichung des Faktors $- \varDelta$ wird die Gleichung (II) identisch mit (I).

Wünschenswert wäre es, diese Identität einfacher und eleganter zu beweisen.

3. Sind fünf Punkte A, A_1, A_2, A_3, A_4 so beschaffen, daß die Projektionen des Punktes A auf die Ebenen des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ in einer Ebene liegen, so genießt jeder der

fünf Punkte dieselbe Eigenschaft in bezug auf das durch die übrigen Punkte bestimmte Tetraeder. (Zeeman).

Die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten der Punkte $A, A_1, \ldots$ seien mit $(x, y, z), (x_1, y_1, z_1), \ldots$ bezeichnet, die ersten Minoren der Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} \qquad (t = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 1)$$

mit $X_1, Y_1, Z_1, T_1, X_2, \ldots$; auch setze man:

$$\delta_i \equiv x X_i + y Y_i + z Z_i + t T_i,$$

sodaß z. B. $\delta_1 = 0$ die Ebene $A_2 A_3 A_4$ darstellt, wenn x, y, z laufende Koordinaten sind.

Verfährt man wie in (II), so bekommt man für die Gleichung des Ortes eines Punktes, dessen Projektionen auf die Ebenen des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ koplanar sind:

$$\text{(I)} \qquad \sum \frac{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}{\delta_1} = 0.$$

Dieser bekannte Ort möge die *Simsonsche Fläche des Tetraeders* $A_1 A_2 A_3 A_4$ heißen; sie enthält die sechs Kanten.

Wir bezeichnen jetzt mit (f_1, f_2, f_3, f_4) die Inhalte der Seitenflächen des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$, mit (h_1, h_2, h_3, h_4) die Höhen desselben, mit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ die normalen Koordinaten des Punktes A in bezug auf das Tetraeder. Alsdann hat man:

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = 4 f_i^2, \quad f_1 h_1 = f_2 h_2 = f_3 h_3 = f_4 h_4,$$
$$\delta_1 = \tfrac{1}{6} A A_2 A_3 A_4 = \tfrac{1}{6} f_1 \alpha_1, \ldots,$$

und die Gleichung (I) kann folgende Form bekommen:

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{\alpha_1 h_1} + \frac{1}{\alpha_2 h_2} + \frac{1}{\alpha_3 h_3} + \frac{1}{\alpha_4 h_4} = 0.$$

Auch bemerke man die (bekannte) Identität:

$$\text{(III)} \qquad \frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_3}{h_3} + \frac{\alpha_4}{h_4} = 1.$$

Zur größeren Klarheit gebe ich dem Zeemanschen Satze folgenden Ausdruck:

Ist A_1' ein beliebiger Punkt der Simsonschen Fläche des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so ist auch A_1 ein Punkt der Simsonschen Fläche des Tetraeders $A_1'A_2A_3A_4$.[1])

In andern Worten, wenn die Gleichung (II) besteht, so hat man auch:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{\alpha_1'h_1'} + \frac{1}{\alpha_2'h_2'} + \frac{1}{\alpha_3'h_3'} + \frac{1}{\alpha_4'h_4'} = 0,$$

wo h_1', h_2', h_3', h_4' die Höhen des Tetraeders $A_1'A_2A_3A_4$ und $\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\ \alpha_4'$ die normalen Koordinaten des Punktes A_1 in bezug auf dieses Tetraeder bezeichnen.

Um dies zu beweisen, drücke man die gestrichelten Größen durch die ungestrichelten aus.

Die Höhen h_1', h_2', h_3', h_4' sind positive Größen. Offenbar hat man $h_1' = \pm\,\alpha_1$, $\alpha_1' = \pm\,h_1$, jedenfalls $\alpha_1'h_1' = \alpha_1 h_1$.

Die Ebene $A_1'A_3A_4$, auf das Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ bezogen, hat zur Gleichung, wenn $\xi_1, \ldots$ laufende Koordinaten bedeuten:

$$\xi_1\alpha_2 - \xi_2\alpha_1 = 0.$$

α_2' und h_2' sind die Abstände der Punkte $A_1(h_1, 0, 0, 0)$, $A_2(0, h_2, 0, 0)$ von dieser Ebene; ihre Werte ergeben sich aus der Formel

$$D = \frac{u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 + u_4\xi_4}{\sqrt{\sum u_1^2 - 2\sum u_1 u_2 c_{12}}},$$

wo D den Abstand des Punktes ξ von der Ebene $u_\xi = 0$ und c_{ik} den Kosinus des inneren Flächenwinkels zwischen den Ebenen $\xi_i = 0$, $\xi_k = 0$ bezeichnet. Also hat man

$$\alpha_2' = \frac{h_1\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 c_{12}}}, \qquad h_2' = \frac{-h_2\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 c_{12}}}.$$

Der zweiten Quadratwurzel gebe man das Vorzeichen, welches h_2' positiven Wert beilegt; setzt man dasselbe Zeichen vor die erste Wurzel, so hat auch α_2' das Vorzeichen, welches dieser Größe als Koordinate zukommt. Somit ist

$$\alpha_2'h_2' = -\frac{h_1h_2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 c_{12}},$$

und die Ersetzung des Zeigers 2 durch 3 oder 4 liefert die Werte der Produkte $\alpha_3'h_3'$, $\alpha_4'h_4'$.

---

1) Die beiden Flächen sind verschieden; sonst würden sie alle von A_2, A_3, A_4 ausgehenden Geraden enthalten.

Hieraus folgt für das linke Glied von (IV) der Ausdruck

$$\text{(V)}\quad \left|\begin{array}{l} \frac{1}{\alpha_1 h_1} - \frac{\alpha_1}{h_1}\left(\frac{1}{\alpha_2 h_2} + \frac{1}{\alpha_3 h_3} + \frac{1}{\alpha_4 h_4}\right) - \frac{1}{h_1 \alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_3}{h_3} + \frac{\alpha_4}{h_4}\right) \\ \qquad - \frac{2}{h_1}\left(\frac{c_{12}}{h_2} + \frac{c_{13}}{h_3} + \frac{c_{14}}{h_4}\right). \end{array}\right.$$

Die zweite Klammer, nach (III), ist gleich $1 - \frac{\alpha_1}{h_1}$; die letzte Klammer nach dem Projektionssatze $f_1 = f_2 c_{12} + f_3 c_{13} + f_4 c_{14}$, wo f_1, f_2, f_3, f_4 durch $h_1^{-1}, h_2^{-1}, h_3^{-1}, h_4^{-1}$ ersetzt werden, reduziert sich zu h_1^{-1}. Also vereinfacht sich der Ausdruck (V) zu

$$\frac{1}{\alpha_1 h_1} - \frac{\alpha_1}{h_1}\left(\frac{1}{\alpha_2 h_2} + \frac{1}{\alpha_3 h_3} + \frac{1}{\alpha_4 h_4}\right) - \frac{1}{h_1 \alpha_1}\left(1 - \frac{\alpha_1}{h_1}\right) - \frac{2}{h_1^2}$$
$$= - \frac{\alpha_1}{h_1}\left(\frac{1}{\alpha_1 h_1} + \frac{1}{\alpha_2 h_2} + \frac{1}{\alpha_3 h_3} + \frac{1}{\alpha_4 h_4}\right).$$

Somit ist bewiesen, daß die Gleichungen (II) und (IV) sich gegenseitig bedingen.

Der Beweis ruht wesentlich auf der Identität:

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{\alpha_1 h_1} + \frac{1}{\alpha_2 h_2} + \frac{1}{\alpha_3 h_3} + \frac{1}{\alpha_4 h_4}\right) = \pm \frac{1}{h_1'}\left(\frac{1}{\alpha_1' h_1'} + \frac{1}{\alpha_2' h_2'} + \frac{1}{\alpha_3' h_3'} + \frac{1}{\alpha_4' h_4'}\right)$$

zwischen den Elementen von zwei Tetraedern $A_1 A_2 A_3 A_4$, $A_1' A_2 A_3 A_4$ mit gemeinschaftlicher Basis $A_2 A_3 A_4$ oder auch zwischen fünf Punkten A_1, A_1', A_2, A_3, A_4.

4. Wenn von fünf Punkten A, A_1, A_2, A_3, A_4 einer, A, auf dem Höhenhyperboloid des durch die vier übrigen bestimmten Tetraeders, $A_1 A_2 A_3 A_4$, liegt, so kommt diese Eigenschaft jedem der fünf Punkte in bezug auf die vier andern zu. (Zeeman).

Ich suche zuerst, mit den im Eingang von Nr. 3 gebrauchten Bezeichnungen, die Gleichung des Ortes einer Geraden g, welche die drei Höhen $A_1 H_1$, $A_2 H_2$, $A_3 H_3$ des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ trifft.

Die Gleichungen der Höhe $A_1 H_1$ sind:

$$\text{(I)}\qquad \frac{x - x_1}{X_1} = \frac{y - y_1}{Y_1} = \frac{z - z_1}{Z_1},$$

oder auch:

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} A_1 \equiv (y - y_1) Z_1 - (z - z_1) Y_1 = 0, \\ B_1 \equiv (z - z_1) X_1 - (x - x_1) Z_1 = 0, \\ C_1 \equiv (x - x_1) Y_1 - (y - y_1) X_1 = 0. \end{cases}$$

Bedeutet λ den gemeinsamen Wert der Brüche (I) in einem Punkte von $A_1 H_1$, so sind die Koordinaten dieses Punktes

$$\text{(III)}\qquad x_1 + \lambda X_1, \quad y_1 + \lambda Y_1, \quad z_1 + \lambda Z_1.$$

Ich nenne jetzt (x, y, z) die Koordinaten irgend eines Punktes von g, (α, β, γ) die Richtungskosinus dieser Geraden, (B_1, B_2, B_3) ihre Treffpunkte mit A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3. Da die Koordinaten von B_1 sowohl durch die Ausdrücke (III) als durch

$$x + \varrho\alpha, \quad y + \varrho\beta, \quad z + \varrho\gamma$$

darstellbar sind, hat man die Gleichheiten

$$x + \varrho\alpha = x_1 + \lambda X_1, \quad y + \varrho\beta = y_1 + \lambda Y_1, \quad z + \varrho\gamma = z_1 + \lambda Z_1,$$

aus denen man die Hilfsgrößen ϱ, λ eliminieren kann. Auf diesem Wege findet man die Bedingung:

$$\text{(IV)} \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & X_1 & \alpha \\ y - y_1 & Y_1 & \beta \\ z - z_1 & Z_1 & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwicklung nach der dritten Spalte gibt

$$\text{(V)} \qquad \alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 = 0.$$

Ähnlicherweise erhält man die Bedingungen, daß g die Höhen A_2H_2, A_3H_3 treffe:

$$\text{(VI)} \qquad \alpha A_2 + \beta B_2 + \gamma C_2 = 0, \quad \alpha A_3 + \beta B_3 + \gamma C_3 = 0,$$

wo die neuen Bezeichnungen selbstverständlich sind.

Durch Elimination von α, β, γ zwischen (V) und (VI) bekommt man die gesuchte Gleichung des Ortes von g:

$$\text{(VII)} \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welche scheinbar vom dritten Grade in x, y, z ist; aber die Glieder der höchsten Ordnung verschwinden.

Die Gleichung (VII) kann die symmetrische Form:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & 1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 1 \\ A_4 & B_4 & C_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

annehmen; denn addiert man zur vierten Zeile die drei anderen, so findet man (VII) wieder, da

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \equiv 0, \quad B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \equiv 0,$$
$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \equiv 0.$$

Hiermit ist bewiesen, daß die vier Höhen des Tetraeders auf demselben Hyperboloid liegen.

Um nun den Zeemanschen Satz zu beweisen, multipliziere ich die Gleichung (VII) mit der von Null verschiedenen Determinante

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_4 \end{vmatrix} \equiv \Delta^2 t_4.$$

Das Ergebnis ist

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

wenn man

$$A_i X_k + B_i Y_k + C_i Z_k \equiv h_{ik}$$

setzt. Da A_1, B_1, C_1 die zur dritten Spalte der Determinante (IV) gehörigen Minoren sind, hat man

$$h_{11} = \begin{vmatrix} x - x_1 & X_1 & X_1 \\ y - y_1 & Y_1 & Y_1 \\ z - z_1 & Z_1 & Z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad h_{12} = \begin{vmatrix} x - x_1 & X_1 & X_2 \\ y - y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z - z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Man entwickle h_{12} nach der ersten Spalte und bemerke, daß die zugehörigen Minoren als Unterdeterminanten des zu Δ reziproken Systems den entsprechenden komplementären Unterdeterminanten von Δ gleich sind bis auf den Faktor Δ. Demnach ist

$$h_{12} = \Delta\{(x - x_1)(x_3 - x_4) + (y - y_1)(y_3 - y_4) + (z - z_1)(z_3 - z_4)\}.$$

So findet man auch $h_{22} = 0$, $h_{33} = 0$, und überhaupt

$$h_{ik} = \Delta\{(x - x_i)(x_l - x_4) + (y - y_i)(y_l - y_4) + (z - z_i)(z_l - z_4)\},$$

wenn i, k, l irgend eine Reihenfolge der Zahlen 1, 2, 3 bedeutet.

Die Gleichung (VIII) ist somit von der Form

$$\text{(IX)} \qquad h_{12} h_{23} h_{31} = h_{21} h_{32} h_{13}.$$

Die in ihr enthaltenen Koordinaten x, y, z beziehe man jetzt auf den Punkt A. Beachtet man aber, daß bei Vertauschung von (x, y, z) und (x_4, y_4, z_4) die Größen h_{12}, h_{23}, h_{31} in h_{32}, h_{13}, h_{32} übergehen und umgekehrt, so bleibt die Gleichung (IX) ungeändert. Somit ist bewiesen, daß, wenn der Punkt A auf dem Höhenhyperboloid des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ liegt, der Punkt A_4 auch auf dem Höhenhyperboloid des Tetraeders $A A_1 A_2 A_3$ liegt.

Bezeichnen m_1, m_2, m_3 die Geraden AA_1, AA_2, AA_3 und n_1, n_2, n_3 die Geraden A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3, so fließt aus (IX) die Gleichheit

$$\cos m_1 n_3 \cdot \cos m_2 n_1 \cdot \cos m_3 n_2 = \cos m_2 n_3 \cdot \cos m_3 n_1 \cdot \cos m_1 n_2.$$

5. Die in Nr. 4 enthaltenen Entwicklungen geben Anlaß zu einigen Bemerkungen, welche vielleicht manchem Leser als willkommene Beigabe zur vorigen Abhandlung erscheinen werden.

1. Ersetzt man in (V) die gewöhnlichen Koordinaten x, y, z durch $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, d. h. führt man homogene kartesische Koordinaten x, y, z, t ein, so nimmt diese Gleichung die Form $tU = 0$ an, wo U eine Funktion des zweiten Grades in x, y, z, t ist. Die Gleichung (V) in homogener Form stellt also das Höhenhyperboloid in Verbindung mit der unendlich entfernten Ebene dar.

2. $h_{12} = 0$ und $h_{21} = 0$ sind die Gleichungen der durch die Punkte A_1, A_2 zur Geraden A_3A_4 senkrecht gelegten Ebenen. Ähnliches gilt für die Gleichungen $h_{23} = 0$, $h_{31} = 0$, usw.

Die Gleichung (IX) sagt aus: Das Produkt der Abstände eines Punktes des Höhenhyperboloids des Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ von den Ebenen h_{12}, h_{23}, h_{31} ist gleich dem Produkte seiner Abstände von den Ebenen h_{21}, h_{32}, h_{13}.

3. Die Gleichung (IX) hat offenbar die neun Lösungen:

$$\begin{array}{lll} h_{12} = 0,\ h_{21} = 0; & h_{23} = 0,\ h_{32} = 0; & h_{31} = 0,\ h_{13} = 0; \\ h_{12} = 0,\ h_{13} = 0; & h_{23} = 0,\ h_{21} = 0; & h_{31} = 0,\ h_{32} = 0; \\ h_{12} = 0,\ h_{32} = 0; & h_{23} = 0,\ h_{13} = 0; & h_{31} = 0,\ h_{21} = 0. \end{array}$$

Die drei ersten Lösungen definieren die unendlich entfernten Geraden, welche in den zu den Kanten A_4A_3, A_4A_1, A_4A_2 senkrechten Ebenen liegen; die zweite Gruppe bezieht sich auf die Höhen A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3; die dritte gibt die in den Höhenschnitten der Dreiecke $A_4A_3A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_4A_2A_3$ zu den entsprechenden Tetraederebenen errichteten Senkrechten. Demnach zerfällt der Ort (IX) in die unendlich entfernte Ebene (wie schon in **5**, 1 bemerkt wurde) und in ein Hyperboloid, welches die Höhen des Tetraeders und die in den Höhenschnitten der Tetraederdreiecke errichteten Senkrechten enthält.

4. Man multipliziere die Gleichung (VII) mit der Determinante

$$P \equiv \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix},$$

welche sich leicht auf

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

zurückführt; die Gleichung $P = 0$ stellt mithin die Ebene $A_1 A_2 A_3$ dar.

Setzt man

$$A_i(x - x_k) + B_i(y - y_k) + C(z - z_k) \equiv M_{ik},$$

so ist das Resultat:

$$\text{(X)} \qquad \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Man ersieht sofort, daß $M_{11} = M_{22} = M_{33} = 0$ ist. M_{12} ist gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & X_1 & x - x_2 \\ y - y_1 & Y_1 & y - y_2 \\ z - z_1 & Z_1 & z - z_2 \end{vmatrix},$$

welche man leicht in

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & x_1 & X_1 & x_2 \\ y & y_1 & Y_1 & y_2 \\ z & z_1 & Z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

umformen kann. Da letztere Determinante verschwindet, wenn man für x, y, z die Werte x_1, y_1, z_1 oder x_2, y_2, z_2 oder $x_1 + \lambda X_1, y_1 + \lambda Y_1, z_1 + \lambda Z_1$ einsetzt, ist $M_{12} = 0$ die Gleichung der Ebene $A_1 A_2 H_1$. Ähnliche Deutungen gelten für die Gleichungen $M_{21} = 0$, $M_{13} = 0, \ldots$

Die Gleichung (X) hat die Form

$$M_{12} M_{23} M_{31} = M_{21} M_{32} M_{13};$$

sie läßt folgende Lösungen zu:

$$M_{12} = 0,\ M_{21} = 0; \quad M_{23} = 0,\ M_{32} = 0; \quad M_{31} = 0,\ M_{13} = 0;$$
$$M_{12} = 0,\ M_{13} = 0; \quad M_{23} = 0,\ M_{21} = 0; \quad M_{31} = 0,\ M_{32} = 0;$$
$$M_{12} = 0,\ M_{32} = 0; \quad M_{23} = 0,\ M_{13} = 0; \quad M_{31} = 0,\ M_{21} = 0.$$

Die drei ersten entsprechen den Kanten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ und folglich dem eingeführten Faktor P; die drei folgenden geben die Höhen $A_1 H_1$, $A_2 H_2$, $A_3 H_3$; die drei letzten definieren die Schnitt-

geraden der Ebenenpaare $(A_1A_2H_1,\ A_3A_2H_3)$, $(A_2A_3H_2,\ A_1A_3H_1)$, $(A_3A_1H_3,\ A_2A_1H_2)$, also drei *Nebenhöhen.*

5. Allgemein, sind p_1, p_2, p_3 drei Erzeugende eines Systems eines Hyperboloids und q_1, q_2, q_3 drei Erzeugende des andern Systems, und bezeichnet man mit $(p_iq_k) = 0$ die durch die Geraden p_i, q_k gelegte Ebene, so ist das Hyperboloid in Verbindung mit einer durch die Punkte p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3 gelegten Ebene durch die Gleichung:

$$(p_1q_2)(p_2q_3)(p_3q_1) - \lambda(p_1q_3)(p_2q_1)(p_3q_2) = 0$$

darstellbar, bei geeigneter Wahl der Konstante λ.

Nachtrag.

1. Über die Fläche dritter Ordnung, die ich *Simsonsche Fläche* eines Tetraeders nenne, findet man einige Literaturnachweise im *Archiv* (3) **4**, 276; es wäre wünschenswert, sie zu vervollständigen.

In den Nouvelles Annales de Mathématiques, 1870, S. 410, habe ich den wünschenswerten Satz Steiners (Archiv, loc. cit., S. 275) bewiesen, nämlich: Bei einem Hyperboloid, dessen Halbachsen der Bedingung $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$ genügen, liegen die Fußpunkte der aus dem Mittelpunkt der Fläche auf die Ebenen eines Poltetraeders gefällten Perpendikel in einer Ebene. In andern Worten: Der Ort der Mittelpunkte eines solchen Hyperboloids, das ein festes Poltetraeder zuläßt, ist die zu diesem Tetraeder gehörige Simsonsche Fläche. Das Analogon in der Ebene lautet: Bei jeder gleichseitigen Hyperbel geht der einem Poldreiecke umbeschriebene Kreis durch den Mittelpunkt der Kurve.

In einer Abhandlung des Herrn Geiser (*Crelle*, LXIX, S. 197—221) tritt die Simsonsche Fläche auf als Ort der zu den Punkten im Unendlichen isogonal konjugierten[1]) (winkeltreuen) Punkte, oder auch als Ort der Brennpunkte der dem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsparaboloide. Sie kommt auch vor in der wertvollen Abhandlung von Hrn. Fr. Meyer: *Über die einem Tetraeder einbeschriebenen Rotationsflächen* zweiten Grades (Archiv (3) **4**, S. 168—175).

2. Den Lemoineschen Punkt des Tetraeders findet man wohl zuerst in den *Eléments d'analyse* par Simon Lhuilier, S. 297. In meinem *Mémoire sur le tétraèdre* habe ich wohl bemerkt, daß dieser

1) Zwei Punkte, mit den Normalkoordinaten $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3', \alpha_4')$, heißen isogonal verwandt oder Gegenpunkte in bezug auf das Grundtetraeder, wenn $\alpha_1\alpha_1' = \alpha_2\alpha_2' = \alpha_3\alpha_3' = \alpha_4\alpha_4'$.

Punkt und der Schwerpunkt isogonal verwandt und die zwei Brennpunkte einer dem Tetraeder eingeschriebenen Rotationsquadrik sind; aber der schöne Satz von Hrn. Meyer (Siehe *Über die Höhen des Tetraeders*), daß die Berührungspunkte der Tetraederebenen in die Fußpunkte der Höhen fallen, war mir entgangen.

In der *Nouvelle Correspondance mathématique*, Band IV (1878), S. 223, wurde der folgende Satz vorgelegt:

Die vier Geraden, welche die Ecken eines Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$ mit den Polen P_1, P_2, P_3, P_4 der gegenüberliegenden Ebenen in bezug auf die umbeschriebene Kugel verbinden, sind Erzeugende eines Hyperboloids H, dessen Mittelpunkt der Lemoinesche Punkt des Tetraeders ist.

Der Beweis ist niemals erfolgt. Wenn die drei Produkte der gegenüberliegenden Seiten gleich sind, gehen die Geraden A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4 durch einen und denselben Punkt, welcher nicht der Lemoinesche Punkt ist. Das genügt, um die Falschheit des Satzes zu beweisen. Es wäre interessant, den Mittelpunkt des Hyperboloids H im allgemeinen Tetraeder geometrisch und analytisch zu bestimmen.

3. Um den sogenannten Simsonschen Satz aus der Gleichung (I), Nr. 2, abzuleiten, nenne ich D die Determinante (I) auf vier beliebige koplanare Punkte A, A_1, A_2, A_3 bezogen, und setze

$$\varrho_{ik} \equiv x_i x_k + y_i y_k, \quad A_2A_3 = a_1, \quad A_3A_1 = a_2, \quad A_1A_2 = a_3.$$

Bezeichnen dann μ_1, μ_2, μ_3 die absoluten baryzentrischen Koordinaten des Punktes A in bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$, so daß

$$x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3, \quad y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3, \quad 1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,$$

so kann man schreiben:

$$D = \begin{vmatrix} \Sigma\mu_1^2\varrho_{11} + 2\Sigma\mu_1\mu_2\varrho_{12} & \varrho_{11} & \varrho_{22} & \varrho_{33} \\ \Sigma\mu_1 \Sigma\mu_1 x_1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \Sigma\mu_1 \Sigma\mu_1 y_1 & y_1 & y_2 & y_3 \\ (\Sigma\mu)^2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

oder einfacher, indem man von der ersten Spalte die drei andern, respektive mit μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2 multipliziert, abzieht:

$$D = \begin{vmatrix} 2\Sigma\mu_1\mu_2\varrho_{12} & \varrho_{11} & \varrho_{22} & \varrho_{33} \\ \Sigma\mu_1\mu_2(x_1 + x_2) & x_1 & x_2 & x_3 \\ \Sigma\mu_1\mu_2(y_1 + y_2) & y_1 & y_2 & y_3 \\ 2\Sigma\mu_1\mu_2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Aus den Gleichheiten

$$a_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \varrho_{11} + \varrho_{22} - 2\varrho_{12} \text{ usw.}$$

ergeben sich Werte von ϱ_{12}, ϱ_{23}, ϱ_{31}, welche ich in vorige Determinante einsetze; dann kommt:

$$D = \begin{vmatrix} 2\Sigma\mu_1\varrho_{11}(\mu_2+\mu_3) - 2\Sigma a_1^2\mu_2\mu_3 & \varrho_{11} & \varrho_{22} & \varrho_{33} \\ \Sigma\mu_1 x_1(\mu_2+\mu_3) & x_1 & x_2 & x_3 \\ \Sigma\mu_1 y_1(\mu_2+\mu_3) & y_1 & y_2 & y_3 \\ \Sigma\mu_1(\mu_2+\mu_3) & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Subtrahiert man endlich von der ersten Spalte die folgenden, respektive mit $\mu_1(\mu_2+\mu_3)$, $\mu_2(\mu_3+\mu_1)$, $\mu_3(\mu_1+\mu_2)$ multipliziert, so erhält man

$$D = -2\Sigma a_1^2\mu_2\mu_3 \cdot 2T,$$

wo T, T_1, T_2, T_3 die Inhalte der Dreiecke $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_1$, $A_3A_1A_2$, AA_1A_2 bedeuten.

Geht man zu Normalkoordinaten α_1, α_2, α_3 über mittels der Formeln $\mu_1 = \frac{\alpha_1}{h_1}, \cdots$, so findet man leicht:

$$D = -8R^2\Sigma\alpha_2\alpha_3 \sin A_1. \tag{1}$$

Nun ist der Inhalt des Fußpunktdreiecks $B_1B_2B_3$ des Punktes A in bezug auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ gleich $\frac{1}{2}\Sigma\alpha_2\alpha_3\sin A_1$; folglich sind die Punkte B_1, B_2, B_3 kollinear, wenn $D=0$, d. h. wenn die Punkte A, A_1, A_2, A_3 konzyklisch sind.

Sind diese Punkte beliebig, und bezeichnet man mit t, t_1, t_2, t_3 die Inhalte der Fußpunktdreiecke der Punkte A, A_1, A_2, A_3 in bezug auf das von den drei andern Punkten gebildete Dreieck und mit R, R_1, R_2, R_3 die Radien der Umkreise dieser Dreiecke, so schließt man aus (1): $R^2t = R_1^2t_1 = R_2^2t_2 = R_3^2t_3$. Diese Relationen sind vielleicht neu; sie erinnern an die Staudtschen Gleichheiten $\frac{1}{2}D = pT = -p_1T_1 = p_2T_2 = p_3T_3$, wo p, p_1, p_2, p_3 die Potenzen der Punkte A, A_1, A_2, A_3 in bezug auf die Kreise $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_1$ usw. bedeuten.

Lüttich, Juni 1905.

Eine neue Methode zur Zerlegung einer periodischen Kurve in ihre Harmonischen.

Von K. H. HAGA in Delft.[1])

Die Frage, wie man eine willkürliche periodische Funktion in ihre sinusförmigen harmonischen Grund- und Oberwellen zerlegen kann, ist eine rein mathematische. Jedoch ist dieses Problem in der Wechselstromtechnik für Strom- und Spannungskurven häufig zu lösen. Diese Kurven, mit dem Oszillographen aufgenommen, zeigen oft große Abweichungen von der Sinusform. Es ist nun von großer Wichtigkeit, die einfachen zusammensetzenden Sinuskurven nach einer kurzen und genauen Methode aufzufinden. Dies ist im folgenden mittels einer graphischen Konstruktion oder einer einfachen Rechnung ermöglicht.

Um zu dieser Konstruktion zu kommen, zerlegt man die Fourierreihe:

$$(A)\quad \begin{cases} i_x = c_0 + c_1 \sin(x + \varphi_1) + c_2 \sin(2x + \varphi_2) + \ldots \\ \quad = p_1 \sin x + p_2 \sin 2x + \ldots + p_n \sin nx + \ldots \\ \quad + q_0 + q_1 \cos x + q_2 \cos 2x + \ldots + q_n \cos nx + \ldots \end{cases}$$

in 4 Teile:

$$\begin{aligned} i_1 &= p_1 \sin x + p_3 \sin 3x + \ldots + p_{2n+1} \sin(2n+1)x + \ldots \\ i_2 &= q_1 \cos x + q_3 \cos 3x + \ldots + q_{2n+1} \cos(2n+1)x + \ldots \\ i_3 &= p_2 \sin 2x + p_4 \sin 4x + \ldots + p_{2n} \sin 2nx + \ldots \\ i_4 &= q_0 + q_2 \cos 2x + q_4 \cos 4x + \ldots + q_{2n} \cos 2nx + \ldots, \end{aligned}$$

setzt in die Fourierreihe (A) die Werte der sinus und cosinus ein für: x, $(\pi - x)$, $(\pi + x)$, $(2\pi - x)$ und bekommt dann:

$$\begin{aligned} i_x &= i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \\ i_{\pi - x} &= i_1 - i_2 - i_3 + i_4 \\ i_{\pi + x} &= -i_1 - i_2 + i_3 + i_4 \\ i_{2\pi - x} &= -i_1 + i_2 - i_3 + i_4, \end{aligned}$$

1) Mit Zusätzen versehener Abdruck aus Elektrotechnik und Maschinenbau, 24_{39}, 762—763. Vgl. hierzu Runge, Theorie und Praxis der Reihen, Göschen. Red.

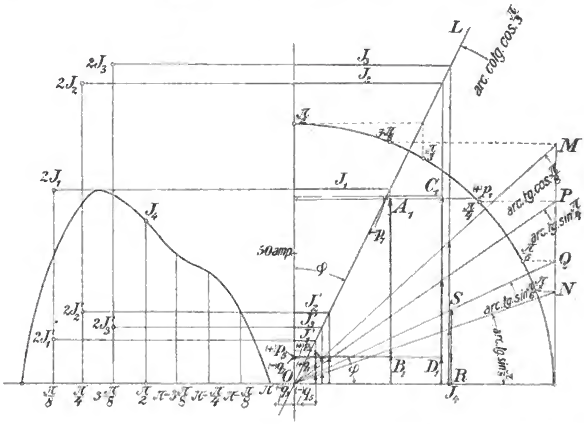
also:

$$1)\quad i_1 = \frac{(i_x + i_{\pi-x}) - (i_{\pi+x} + i_{2\pi-x})}{4} = p_1 \sin x + p_3 \sin 3x + \dots$$

$$2)\quad i_2 = \frac{(i_x - i_{\pi-x}) - (i_{\pi+x} - i_{2\pi-x})}{4} = q_1 \cos x + q_3 \cos 3x + \dots$$

$$3)\quad i_3 = \frac{(i_x - i_{\pi-x}) + (i_{\pi+x} - i_{2\pi-x})}{4} = p_2 \sin 2x + p_4 \sin 4x + \dots$$

$$4)\quad i_4 = \frac{(i_x + i_{\pi-x}) + (i_{\pi+x} + i_{2\pi-x})}{4} = q_0 + q_2 \cos 2x + q_4 \cos 4x + \dots$$



Die unbekannten Größen p und q findet man durch Einsetzung der Werte von i in den Gleichungen 1) bis 4) für: $x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}$ und $\frac{\pi}{2}$, und findet dann graphisch oder rechnerisch in einfacher Weise:

$$p_1,\ p_2,\ \dots\ p_8,\ q_1,\ q_2,\ \dots\ q_8,$$

also bis zur achten Harmonischen. Will man eine Kurve bis zur sechzehnten Harmonischen zerlegen, so setzt man die Werte von i in den Gleichungen 1) bis 4) ein für: $x = \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{16}$ und $\frac{\pi}{2}$. Die Rechnung wird dann etwas komplizierter; jedoch wird das Resultat, das man für die Konstruktion braucht, noch sehr einfach, und das ganze Problem ist mit mindestens derselben rechnerischen oder graphischen Genauigkeit kürzer und bequemer gelöst als mit je einer

der bisher üblichen Methoden. Ein Vorteil dieser Methode ist auch, daß sie für innerhalb einer Periode ganz unsymmetrische Kurven gilt.

Die Rechnung und die Konstruktion gestalten sich nun folgendermaßen:

Es sei z. B. eine hinsichtlich der Abszissenachse symmetrische Kurve bis zur achten Harmonischen zu zerlegen. Es sind dann:

$$i_x = -i_{\pi+x} \quad \text{und} \quad i_{\pi-x} = -i_{2\pi-x},$$

also nach 3) und 4):

$$i_3 = 0 \quad \text{und} \quad i_4 = 0,$$

das heißt: alle Koeffizienten (p_2, p_4, ... q_0, q_2, ...) der geraden Sinus- und Kosinusfunktionen sind Null. Die Gleichungen 1) und 2) ergeben:

$$1)\quad i_1 = \frac{i_x + i_{\pi-x}}{2} = p_1 \sin x + p_3 \sin 3x + p_5 \sin 5x + p_7 \sin 7x,$$

$$2)\quad i_2 = \frac{i_x - i_{\pi-x}}{2} = q_1 \cos x + q_3 \cos 3x + q_5 \cos 5x + q_7 \cos 7x.$$

Man nimmt jetzt für x die vier Werte $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$ und $\frac{\pi}{2}$, und bezeichnet die zugehörigen Werte von i_1 mit J_1, J_2, J_3 und J_4, die von i_2 mit J'_1, J'_2, J'_3 und J'_4. Dann ist:

$$J_1 = \sin\frac{\pi}{8}(p_1 + p_7) + \cos\frac{\pi}{8}(p_3 + p_5)$$

$$J_2 = \sin\frac{\pi}{4}[(p_1 - p_7) + (p_3 - p_5)]$$

$$J_3 = \cos\frac{\pi}{8}(p_1 + p_7) - \sin\frac{\pi}{8}(p_3 + p_5))$$

$$J_4 = (p_1 - p_7) - (p_3 - p_5)$$

oder

$$p_1 + p_7 = J_1 \sin\frac{\pi}{8} + J_3 \cos\frac{\pi}{8} = A_1$$

$$p_1 - p_7 = \frac{J_4}{2} + J_2 \cos\frac{\pi}{4} = C_1$$

$$p_3 + p_5 = J_1 \cos\frac{\pi}{8} - J_3 \sin\frac{\pi}{8} = B_1$$

$$p_3 - p_5 = -\frac{J_4}{2} + J_2 \cos\frac{\pi}{4} = D_1,$$

also:

$$p_1 = \frac{A_1 + C_1}{2}, \quad p_7 = \frac{A_1 - C_1}{2}, \quad p_3 = \frac{B_1 + D_1}{2} \quad p_5 = \frac{B_1 + D_1}{2}.$$

Ebenso bekommt man aus der Formel für i_2:

$$q_1 + q_7 = J_2' \sin\frac{\pi}{8} = A_2$$

$$q_1 - q_7 = J_1' \cos\frac{\pi}{8} + J_3' \sin\frac{\pi}{8} = C_2$$

$$q_3 + q_5 = -J_2' \sin\frac{\pi}{4} = -A_2$$

$$q_3 - q_5 = J_1' \sin\frac{\pi}{8} - J_3' \cos\frac{\pi}{8} = D_2,$$

also:

$$q_1 = \frac{A_2 + C_2}{2},\quad q_7 = \frac{A_2 - C_2}{2},\quad q_3 = \frac{-A_2 + D_2}{2},\quad q_5 = \frac{-A_2 - D_2}{2}.$$

Weiter ist: $c = \sqrt{p^2 + q^2}$ und $\operatorname{tg}\varphi = \frac{q}{p}$; aus diesen Koeffizienten p und q ist also die einfache Fourierreihe leicht zu bestimmen.

Die konstanten Koeffizienten von J_1 usw. kann man sich entweder in einigen Dezimalen notieren und sofort für die Berechnung verwenden, in welchem Fall die Methode rechnerisch sehr schnell zum Ziel führt, oder man kann die ganze Konstruktion graphisch durchführen. Man muß jedoch stets aus der Kurve die Werte J_1 usw. entnehmen. Immerhin braucht man nicht die ganzen i_1- und i_2-Kurven zu konstruieren, sondern nur die Punkte J_1, J_1', J_2 usw.

Wenn man mehr als acht Oberwellen finden will, wird die graphische Lösung ungenau, weil meistens die Koeffizienten p und q zu klein werden und deshalb praktisch auch gar keine Bedeutung mehr haben. Will man aus theoretischen Gründen noch weiter gehen mit der Analyse, so kann man bis zur sechzehnten Harmonischen die Rechnung durchführen. Auch dann wird man in kurzer Zeit mit sehr großer Genauigkeit die Kurve zerlegen.

Auch für ganz beliebige periodische Kurven gilt diese Methode ohne Annäherungen oder Vernachlässigungen. Die Bestimmung von p_1, q_1, p_3, q_3 usw. bleibt unverändert. Die Koeffizienten der geraden Sinuswerte ergeben sich z. B. aus:

$$\frac{i_{3(x)} + i_{3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}}{2} = i_3' = p_4 \sin 4x + \dots$$

$$\frac{i_{3(x)} - i_{3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}}{2} = i_3'' = p_2 \sin 2x + p_6 \sin 6x + \dots$$

Man bildet jetzt wiederum die Werte von i_3' und i_3'' für $x = \frac{\pi}{8}$ und $\frac{\pi}{4}$, und findet dann

$$p_2 = \frac{i_3''\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{i_3''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}, \quad p_4 = i_3'\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad p_6 = \frac{i_3''\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4}} - \frac{i_3''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}.$$

Ebenso für die Koeffizienten der geraden Kosinuswerte:

$$\frac{i_{4(x)} + i_{4\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}}{2} = i_4' = q_0 + q_4 \cos 4x + \ldots$$

$$\frac{i_{4(x)} - i_{4\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}}{2} = i_4'' = q_2 \cos 2x + q_6 \cos 6x + \ldots,$$

woraus

$$q_0 = i_4'\left(\frac{\pi}{8}\right), \qquad q_2 = \frac{i_4''\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{i_4''{}_{(0)}}{2}$$

$$q_4 = i_4'\left(\frac{\pi}{8}\right) - i_4'\left(\frac{\pi}{4}\right), \qquad q_6 = \frac{i_4''{}_{(0)}}{4} + \frac{i_4''\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2\cos\frac{\pi}{8}}.$$

Die Figur gibt die erste von mir in dieser Weise bis zur achten Harmonischen zerlegte symmetrische Kurve mit der Konstruktion. Für $\frac{\pi}{8}$ und $\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$ bekommt man die Summe der Ordinaten $2J_1$ und die Differenz $2J_1'$, also auch die halbe Summe und Differenz J_2 und J_2' durch Übertragung in der rechten Figur, wo OL die Gerade für $\operatorname{tg}\varphi = 0{\cdot}5$ ist. Dann muß A_1 konstruiert werden aus $J_1 \sin\frac{\pi}{8}$ und $J_3 \cos\frac{\pi}{8}$, was mittels der Geraden OM und CN leicht geschehen kann. Ebenso findet man $C_1 = \frac{J_4}{2} + J_2 \cos\frac{\pi}{4}$ mittels der Geraden OP und OQ. ($OR = J_4$, also $OS = \frac{1}{2}J_4$) und schließlich $p_1 = \frac{1}{2}(A_1 + C_1)$ usw.

Es ergab sich:

$$i = 71{\cdot}5\sin x + 9{\cdot}5\sin 3x + 0{\cdot}5\sin 5x - 0{\cdot}7\sin 7x + 11{\cdot}5\cos x - 8\cos 3x$$
$$- 1{\cdot}5\cos 5x - 0{\cdot}9\cos 7x = 72{\cdot}3\sin(wt + 9^0 10') + 12{\cdot}4\sin(3wt + 220^0 30')$$
$$+ 1{\cdot}6\sin(5wt + 251^0 50') - 1{\cdot}15\sin(7wt + 52^0).$$

Nimmt man für x die Werte: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{2}$ an, so wird die Rechnung sehr vereinfacht.

Man bezeichnet ebenfalls die zugehörigen Werte von i_1 mit J_1, J_2, J_3 und J_4; die von i_2 mit J_1', J_2', J_3' und J_4', so wird:

$$J_1 = \tfrac{1}{2}(p_1 + 2p_3 + p_5 - p_7), \quad J_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(p_1 + p_3 - p_5 - p_7),$$
$$J_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(p_1 \quad - p_5 + p_7), \quad J_4 = \quad p_1 - p_3 + p_5 - p_7.$$

Ist weiter:

$$J_1 : \tfrac{1}{2} = 2J_1 = A_1, \qquad J_2 : \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 1{,}414 J_2 = B_1,$$
$$J_3 : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1{,}155 J_3 = C_1, \qquad J_4 : 1 = J_4 = D_1,$$

dann lassen sich die p_1, p_3, p_5 und p_7 aus den vier Gleichungen sehr leicht bestimmen.

$$A_1 - D_1 = 3p_3, \qquad D_1 + C_1 = \quad 2p_1 - p_3,$$
$$C_1 - B_1 = 2p_7 - p_3, \qquad B_1 - A_1 = -\,2p_5 - p_3.$$

Ebenso für i_2:

$$0 = q_1 + q_3 + q_5 + q_7, \quad J_1' = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(q_1 - q_5 - q_7),$$
$$J_2' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(q_1 - q_3 - q_5 + q_7), \quad J_3' = \tfrac{1}{2}(q_1 - 2q_3 + q_5 + q_7),$$
$$J_1' : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 1{,}155 J_1' = A_1', \quad J_2' : \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 1{,}414 J_2' = B_1', \quad J_3' : \tfrac{1}{2} = 2J_3' = C_1'.$$

Dann findet man:

$$A_1' = -\,3q_3, \quad C_1' = 2q_1 + q_3,$$
$$C_1' - B_1' = -\,2q_7 + q_3, \quad B_1' - A_1' = -\,2q_5 + q_3.$$

Nach Abschluß dieser Arbeit habe ich in der Veröffentlichung von Herrn Ernst Orlich („Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven“, Februar 1906, Braunschweig, Vieweg u. S.), auf Seite 76 eine „arithmetische Analyse“ gefunden. In dieser wird nicht die Trennung der ungeraden Sinus- und Kosinuswerte vorgenommen, die hier zu der einfachen graphischen Konstruktion führt.

Die geometrische Resolvente der algebraischen Gleichung mit einer Unbekannten.

Von G. Kober in Holzminden.

Von den Punkten $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ des Kegelschnittes $K \equiv x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ gehören jedesmal die m Paare, die einer algebraischen Gleichung

$$f(\lambda) \equiv a_0 \lambda^{2m} + a_1 \lambda^{2m-1} + a_2 \lambda^{2m-2} + \cdots + a_{2m-2}\lambda^2 + a_{2m-1}\lambda + a_{2m} = 0$$

genügen, zu den Punkten

$$\frac{x_1}{x_3} = \lambda^2, \quad \frac{x_2}{x_3} = -\frac{a_0\lambda^{2m} + a_2\lambda^{2m-2} + \cdots + a_{2m-2}\lambda^2 + a_{2m}}{a_1\lambda^{2m-2} + \cdots + a_{2m-1}}$$

der Kurve $m$ter Ordnung

$$H \equiv a_0 x_1^m + a_1 x_1^{m-1} x_2 + a_2 x_1^{m-1} x_3 + \cdots + a_{2m-2} x_1 x_3^{m-1} + a_{2m-1} x_2 x_3^{m-1} + a_{2m} x_3^m = 0,$$

die man als zweiten Ort der auf $K = 0$ liegenden Punkte $f(\lambda) = 0$ die *geometrische Resolvente* dieser Gleichung nennen kann.

Die zwei Punkte $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ des Kegelschnittes $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ trägt, weil in ihnen $\lambda^2 : \lambda : 1 = x_1 : x_2 : x_3$ sich verhält, die Gerade

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0,$$

welche die beiden Punkte

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0, \quad x_1 = 0$$

verbindet. Die vier Punkte

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

der Reihe $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ erhält der Kegelschnitt $K \equiv x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ durch $\lambda^4 : \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1 = x_1^2 : x_1 x_2 : x_1 x_3 : x_2 x_3 : x_3^2$ von einem zweiten Kegelschnitte

$$H \equiv a_0 x_1^2 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_3 + a_3 x_2 x_3 + a_4 x_3^2 = 0,$$

den der Schnittpunkt der beiden Strahlen

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 + \mu a_2 x_3 = 0, \quad (1-\mu) a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3 = 0$$

beschreibt. Dieselben drehen sich um die beiden Punkte

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 = 0, \quad x_3 = 0; \quad a_3 x_2 + a_4 x_3 = 0, \quad x_1 = 0$$

und hinterlassen auf dem Strahlenpaare $x_1 x_3 = 0$ zwei Spuren

$$x_1 = 0, \quad a_1 x_2 + \mu a_2 x_3 = 0,$$
$$x_3 = 0, \quad (1-\mu) a_2 x_1 + a_3 x_2 = 0,$$

deren Verbindungslinie jedesmal der Strahl

$$(1-\mu) a_1 a_2 x_1 + a_1 a_3 x_2 + \mu a_2 a_3 x_3 = 0$$

ist. Da letzterer den Schnittpunkt der drei Eckenstrahlen

$$\mu = 0 \quad : a_2 x_1 + a_3 x_2 = 0$$
$$\mu = 1 \quad : a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0$$
$$\mu = \infty : a_3 x_3 - a_1 x_1 = 0$$

enthält, so ist der Punkt, welcher den Kegelschnitt $H = 0$ beschreibt, die dritte Ecke des um die drei Punkte

$$x_1 : x_2 : x_3 = 0 \; : - a_4 : a_3$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = a_3 : - a_2 : a_1$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : - a_0 : 0$$

sich drehenden, mit zwei Ecken auf $x_1 x_3 = 0$ bleibenden Dreiseites. Ein dritter Kegelschnitt derselben Punkte $H - kK = 0$ zerfällt, wenn seine Diskriminante

$$R \equiv \begin{vmatrix} 2a_0, & a_1, & a_2 - k \\ a_1, & 2k, & a_3 \\ a_2 - k, & a_3, & 2a_4 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Durch diese Gleichung wird die geometrische Resolvente in gerade Linien zerlegt, daher ist sie die *algebraische* Resolvente. Sie liefert die drei Werte

$$k_1 = a_0(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_4), \quad a_2 - k_1 = a_0(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4),$$
$$k_2 = a_0(\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_2 + \lambda_4), \quad a_2 - k_2 = a_0(\lambda_3\lambda_1 + \lambda_2\lambda_4),$$
$$k_3 = a_0(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4), \quad a_2 - k_3 = a_0(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4),$$

die man braucht, um die Wurzeln der Gleichung $f(\lambda) = 0$ paarweise zu berechnen. Im Falle $a_0 = 0$ ist der Fundamentalpunkt

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

ein Punkt der Resolvente, mithin $\lambda = \infty$ die vierte Wurzel der kubischen Gleichung

$$a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0.$$

Ist außerdem $a_1 = 0$, so zerfällt $H = 0$ in die beiden Strahlen

$$x_3 = 0, \quad a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3 = 0;$$

jener enthält von den Punkten der Reihe $\lambda = x_1 : x_2 = x_2 : x_3$ wieder den Punkt $\lambda = \infty$, dieser die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0.$$

So lange also eine algebraische Gleichung den vierten Grad nicht übersteigt, ist die Konstruktion ihrer geometrischen Resolvente linear.

In rechtwinkligen Koordinaten läßt sich ein Bild der Kurve $H = 0$ In jedem Falle leicht entwerfen. Die Punkte

$$\lambda = y : x = x : 1$$

trägt beispielweise die Parabel $y = x^2$, ihre Punkte

$$a_0\lambda^{2m} + a_1\lambda^{2m-1} + a_2\lambda^{2m-2} + \cdots + a_{2m-2}\lambda^2 + a_{2m-1}\lambda + a_{2m} = 0$$

also die Hyperbel

$$x + \frac{a_0 y^m + a_2 y^{m-1} + \cdots + a_{2m-2}y + a_{2m}}{a_1 y^{m-1} + \cdots + a_{2m-1}} = 0,$$

die jedesmal in der Richtung des Strahles

$$a_0 y + a_1 x + a_2 = 0$$

eine Asymptote und in der Richtung der x-Achse ihre übrigen Asymptoten

$$a_1 y^{m-1} + \cdots + a_{2m-1} = 0$$

hat. Ebenso liegen von den Punkten

$$\lambda = 1 + y : x = x : 1 - y$$

des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ die m Paare

$$a_0\lambda^{2m} + a_1\lambda^{2m-1} + a_2\lambda^{2m-2} + \cdots + a_{2m-2}\lambda^2 + a_{2m-1}\lambda + a_{2m} = 0$$

in den m Ästen der Hyperbel

$$x + \frac{a_0(1+y)^m + a_2(1+y)^{m-1}(1-y) + \cdots + a_{2m-2}(1+y)(1-y)^{m-1} + a_{2m}(1-y)^m}{a_1(1+y)^{m-1} + \cdots + a_{2m-1}(1-y)^{m-1}} = 0,$$

die wieder eine schräge Asymptote in der Richtung

$$x : 1 - y = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots) : (a_1 - a_3 + \cdots)$$

und in der Achsenrichtung $1 \pm y = 0$ die anderen Asymptoten

$$a_1(1+y)^{m-1} + \cdots + a_{2m-1}(1-y)^{m-1} = 0$$

hat. Die so erhaltenen Punkte $f(\lambda) = 0$ werden bei jener Annahme durch die Strahlen $\lambda = x$, bei dieser Annahme durch den Büschel $\lambda = x : 1 - y$ in die Punkte $f(x) = 0$ auf die x-Achse projiziert. Die geometrische Resolvente einer algebraischen Gleichung $x + \varphi(x^2) = 0$ ist also jedesmal die Hyperbel $x + \varphi(y) = 0$ oder $\frac{x}{1-y} + \varphi\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 0$, von der im ersten Falle die Parabel $y = x^2$, im zweiten Falle der Kreis $\frac{1+y}{1-y} = \left(\frac{x}{1-y}\right)^2$ in den Scheitelprojektionen der gesuchten Punkte $y = x + \varphi(x^2) = 0$ geschnitten wird. Auf diese Weise ist eine *Konstruktion der regelmäßigen Vielecke* aus den Abszissengleichungen der Eckenpaare $2x + \varphi(4x^2) = 0$ in jedem Falle möglich, durch Hyperbeln 1. oder 2. Ordnung aber nur dann, wenn die Anzahl der Eckenpaare keinen höheren Primfaktor als 2 oder 3 hat (Crelles Journal XXIV und LXXV, Archiv IX).

Sagan, Herbstferien 1906.

Rezensionen.

Mohr, Otto, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. IV u. 459 S. 8⁰. Berlin 1906, Wilhelm Ernst und Sohn. ℳ 16,50.

Das vorliegende Werk[1]) gibt in neuer, zusammenfassender Bearbeitung die verschiedenen Beiträge des rühmlich bekannten Verfassers zur technischen Mechanik und stellt so einen beträchtlichen Teil der Entwicklung dar, welche diese Wissenschaft im letzten Drittel des vergangenen Jahrhunderts in Deutschland genommen hat.

Auch heute noch, wo der wertvolle Inhalt der einzelnen Abhandlungen in das gebräuchliche Handwerkszeug der technischen Mechanik übergegangen ist, dessen tägliche Anwendung kaum noch die Erinnerung an seine Erfinder weckt, rufen die einzelnen Teile des Werkes auch bei kundigen Lesern tieferes Interesse hervor. Wer der technischen Mechanik ferner steht, dem wird das Buch mit seinem reichen Inhalt ein kundiger Führer sein, wenn er Ideenkreis und Machtbereich der technischen Mechanik von erhöhtem Standpunkte aus überblicken will. Vor allem aber wird der in der Ausbildung begriffene Ingenieur aus dem Buche lernen können, da überall eine möglichst elementare Behandlung selbst schwieriger Fragen angestrebt ist.

Wird also ein Leser, der das Buch ohne die Pflicht verantwortlicher Äußerung zur Hand nimmt, es auch meistens mit Vergnügen lesen, vorausgesetzt daß er nicht an mehreren später zu erwähnenden recht unsachlichen Stellen Anstoß nimmt, so befindet sich der Kritiker wenigstens einzelnen Teilen des Werkes gegenüber in einer gewissen Schwierigkeit. Da nämlich in vielen Kapiteln die Entwickelung auf einfachen Voraussetzungen aufgebaut und mit den elementarsten Hilfsmitteln durchgeführt wird, so ist es oft recht schwer, eine reinliche Scheidung dessen, was spezielles Eigentum des Verfassers ist, von dem bisherigen Besitzstand der Wissenschaft vorzunehmen. Das hätte nun nichts zu sagen, wenn der Verfasser der landläufigen Meinung wäre, daß bei elementaren Dingen die Feststellung von Prioritäten im weitesten Sinne des Wortes eine Danaidenarbeit ist, die am besten unterbleibt. Aber Mohr denkt anders, wie ein augenfälliges Beispiel sofort zeigen wird. Wem überhaupt der Begriff der Beschleunigung klar geworden ist, muß ohne weiteres einsehen, daß, wenn die Geschwindigkeit eines Punktes P durch einen Vektor OV dargestellt wird, die Beschleunigung

---

1) Diese Besprechung ist abgefaßt, bevor der offene Brief des Herrn Mohr erschienen war. Derselbe hätte aber ohnedies unberücksichtigt bleiben müssen, weil es im Interesse aller Beteiligten, namentlich aber des Herrn Mohr selbst liegt, daß dieses nach Inhalt und Ton eigenartige Schriftstück als nicht vorhanden betrachtet werde.

von P nichts anderes ist als die Geschwindigkeit von V. Deshalb hat meines Erachtens niemand das Recht, diesen Gedanken als sein besonderes Eigentum in Anspruch zu nehmen, und niemand die Pflicht, um die Zuweisung desselben an einen älteren Autor sich ängstlich zu bemühen. Dagegen hält Mohr folgende literarische Notiz für nötig:

„Die im Abschnitt 6 dargelegte Auffassung der Beschleunigung eines Punktes als die Geschwindigkeit des Endpunktes seiner Geschwindigkeitsstrecke findet sich bei Schell S. 462 und *offenbar* unabhängig bei Mehmke S. 425."

Wie der Verfasser sich hier allzu gewissenhaft bestrebt, für ein Allgemeingut einen Entdecker festzustellen, so wacht er auch mit Strenge über die Gebiete, auf welchen er seine Fahne aufgepflanzt hat, und ganz im Gegensatz zu dem schönen Glauben an die Menschheit, der in dem eben erwähnten Ausspruch Herrn Mehmke zugute kommt, läßt er sich bei der Verteidigung seiner Ansprüche zu Urteilen über die Arbeitsweise hochangesehener Fachgenossen verleiten, die von Unbefangenen nicht anders denn als ungerecht bezeichnet werden können.

In der Literaturangabe zur Abhandlung IV über die Bewegung ebener Getriebe, welcher wir das obige Zitat entnommen haben, sagt Mohr selbst, daß Williot im Jahre 1877 die Aufgabe gelöst habe, aus den Längenänderungen der Stäbe die Formänderung eines Fachwerkes graphisch zu bestimmen, d. h. einen Verschiebungsplan herzustellen. Nun beschränkt sich ja allerdings Williot auf den Fall, daß das Fachwerk aus einer Reihe von Stabdreiecken besteht, von denen jedes einzelne mit dem vorhergehenden eine Seite gemeinschaftlich hat. Aber die Ausdehnung auf die allgemeineren Fälle ist so selbstverständlich, daß es nicht der Hand eines Meisters bedarf, um dieselbe vorzunehmen. Wer die grundlegende Williotsche Idee erfaßt hat, wird bei mäßiger mathematischer Begabung all die weiteren Aufgaben lösen, ohne daß er Mohrs Führung bedarf. Auf das Prinzip kommt es hier an, da die Durchführung fast selbstverständlich ist. Deshalb hat Müller-Breslau durchaus Recht, wenn er das ganze Verfahren nach Williot benennt.

Und da eine einfache Überlegung zeigt, daß man von den Geschwindigkeiten in derselben Weise zu den Beschleunigungen übergehen kann, wie vom Fachwerk zum Verschiebungsplan, so ist Müller-Breslaus Charakteristik: „Mohr: Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne, Zivilingenieur 1887, zeigt die Anwendung des Williotschen Verfahrens auf die Darstellung der Geschwindigkeiten und schließlich der Beschleunigungen kinematischer Ketten" durchaus zutreffend. Wenn Mohr im Gegensatz dazu glaubt die Tatsache betonen zu müssen, daß Williot von Beschleunigungen und Beschleunigungsplänen nicht spricht, so liest er aus den Worten Müller-Breslaus etwas heraus, was meines Erachtens in denselben nicht steht.

Nach dem Gesagten muß ich den von Mohr — unter Hinweis auf einige Figuren im zweiten Bande von Müller-Breslaus Statik der Baukonstruktionen — gegen den verdienten Meister der technischen Mechanik erhobenen Vorwurf, er habe Mohrsche Zerlegungen und Zusammensetzungen benutzt, „ohne seine Quelle anzugeben", für ganz unangebracht halten, gleichviel ob Mohrs Abhandlungen oder Müller-Breslaus Lösungen der betreffenden Aufgaben älter sind. Es läge doch auch durchaus nicht im Interesse der Wissenschaft, wenn ein Forscher bezüglich irgend einer Hilfsaufgabe, deren Lösung aus längst bekannten Prämissen ihm fast selbstverständlich fließt,

zu der in solchem Falle doch höchst unökonomischen Arbeit eines literarischen Quellenstudiums gezwungen sein sollte.[1])

So sind wir nun medias in res geraten und müssen, um eine geordnete Übersicht über den Inhalt des ganzen Werkes zu erhalten, zunächst den Inhalt der ersten drei Abschnitte in Kürze angeben.

Abhandlung I behandelt das Gleichgewicht und die unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers. Sie gibt im wesentlichen den Inhalt einer vom Verfasser im Jahrgang 1888 des Zivilingenieurs veröffentlichten Abhandlung über Streckensysteme. Nachdem der Verfasser zunächst die grundlegenden Begriffe der Schubgeschwindigkeit und des statischen Momentes eingeführt hat, wird die Gleichwertigkeit von Streckensystemen — welche Drehungsgeschwindigkeiten oder Kräfte darstellen können — definiert. Sodann werden die Streckensysteme durch die sechs Koordinaten bezüglich eines Tetraeders festgelegt, und zwar wird vorausgesetzt, daß eine Ecke des Tetraeders vollständig rechtwinklig ist, und daß die von ihr ausgehenden Kanten gleich lang sind. Der Abstand einer solchen Kante von der gegenüberliegenden wird zur Längeneinheit gemacht.

Hat nun ein Kraftsystem die sechs Koordinaten

$$X,\ Y,\ Z,\ X',\ Y',\ Z',$$

und ein Drehungssystem die Bestimmungsstücke

$$x,\ y,\ z,\ x',\ y',\ z',$$

so ist die Arbeit

$$Xx' + Yy' + Zz' + X'x + Y'y + Z'z.$$

Da nun die Arbeit offenbar gleich Null ist, wenn die Drehung um die Wirkungslinie erfolgt, so besteht zwischen den sechs Koordinaten einer Einzelstrecke die Gleichung

$$XX' + YY' + ZZ' = 0.$$

Strecken lassen sich zu einer Einzelstrecke und einem Streckenpaare zusammenfassen. Die Komponenten der Einzelstrecke sind

$$X + (Y' - Z')\frac{1}{\sqrt{2}},\quad Y + (Z' - X')\frac{1}{\sqrt{2}},\quad Z + (X' - Y')\frac{1}{\sqrt{2}},$$

und das Verschwinden dieser Ausdrücke ist die Bedingung dafür, daß ein Kraftsystem sich in ein Kräftepaar oder ein Drehungssystem in eine Verschiebung zusammenzieht. Zum Schluß behandelt der Verfasser die verschiedenen Nullsysteme, d. h. diejenigen Systeme von Strecken, welche für jedes andere System das Moment Null geben, und leitet daraus die Beziehungen her, welche zwischen den Nullsystemen von zwei bis sieben Strecken bestehen.

---

1) Nachträglicher Zusatz: Schon vor dem Erscheinen der Mohrschen Abhandlung hat Müller-Breslau auf die Möglichkeit hingewiesen, die Theorie des Fachwerks mit Hilfe des Williotschen Verfahrens zu behandeln. Wer den Dingen nicht einseitig und befangen gegenübersteht, muß aus dieser Bemerkung mit Sicherheit schließen, daß Müller-Breslau unabhängig von Mohr die hier in Frage kommenden Sätze und Konstruktionen gefunden hat, zumal die späteren Ausführungen Müller-Breslaus weit über diejenigen von Mohr hinausreichen.

Die zweite Abhandlung ist eine Einführung in die graphische Statik, bei welcher als besonders eigenartig uns die Lösung der Aufgabe, ein Seilpolygon durch drei Punkte zu legen, entgegentritt, welche ursprünglich im Zivilingenieur 1886 S. 535 erschienen ist. Sie ist von den Konstruktionen, welche auf Anwendung der Culmannschen Geraden beruhen, die konsequenteste, weil bei ihr ohne Einschaltung eines Seilpolygons, welches nur einen Teil der zu befriedigenden Bedingungen erfüllt, direkt die Culmannsche Gerade für das auf gut Glück gezeichnete und für das gesuchte Seilpolygon bestimmt wird. Der zweite Teil der Abhandlung beschäftigt sich mit der Lösung räumlicher Probleme und steht im engsten Zusammenhang mit den in der ersten Abhandlung besprochenen Prinzipien.

In der Abhandlung III — Geometrie der Massen betitelt — gibt der Verfasser nach einer kurzen Einleitung über die statischen Momente und den Schwerpunkt von Massen seine interessante Behandlung des Zusammenhangs der Momente zweiter Ordnung ebener Massensysteme mit Hilfe des Trägheitsschwerpunktes. Das Studium der entsprechenden räumlichen Verhältnisse geht aus von dem Zentrifugalmomente des Massensystems in bezug auf zwei Ebenen, welche beide durch den Koordinatenanfangspunkt gehen sollen. Hält man eine dieser Ebenen fest und läßt die andere nacheinander mit den drei Koordinatenebenen zusammenfallen, so erhält man drei Werte, welche, als Koordinaten eines Punktes R benutzt, sämtliche Zentrifugalmomente liefern bezüglich der festgehaltenen und einer beliebigen anderen Ebene. Beschreibt man nämlich eine Kugel, deren Durchmesser AR ist, so ist das Zentrifugalmoment für die feste Ebene und eine andere durch A hindurchgehende Ebene das Stück, welches die Kugel auf dem in A zur beweglichen Ebene errichteten Lote abschneidet.

Fallen beide Ebenen zusammen, so geht das Zentrifugalmoment in das Trägheitsmoment bezüglich der Doppelebene über. Für diejenigen Ebenen, welche die Gerade AR enthalten, ist das Zentrifugalmoment gleich Null; dieselben sind konjugiert zu der festen Ebene. Nun geht der Verfasser über zur rechnerischen Bestimmung der Hauptrichtungen, d. h. derjenigen Richtungen AR, welche auf den zugehörigen Ebenen senkrecht stehen, vermittels trigonometrischer Auflösung der kubischen Gleichung für die Hauptträgheitsmomente. Die Abhandlung schließt mit einer interessanten Konstruktion des Trägheitsmomentes für eine beliebige Ebene und des Neigungswinkels ihrer Strecke AR zu ihrem Lote aus den drei Hauptträgheitsmomenten. Auf der geraden Linie $OP = X + Y + Z$ werden die Strecken $\overline{OX} = X$, $\overline{OY} = Y$, $\overline{OZ} = Z$ abgetragen und über XY sowie YZ als Durchmesser Kreise beschrieben, deren Mittelpunkte B und C sein sollen. Auf den Umfängen dieser Kreise liegen die Punkte D und E, welche durch die Größe der Winkel OBD und PCE bestimmt sind, die doppelt so groß sind als die Winkel, welche das Lot der fraglichen Ebene mit der x-Achse und der z-Achse einschließt. Dann wird mit CD um C und mit BE um B je ein Halbkreis beschrieben, deren Schnittpunkt F heißen soll. Dann ist OF die Strecke AR, FOB der Winkel φ, welchen AR mit dem Lot der Ebene einschließt; und also ist die Projektion OG von OF auf OP das Trägheitsmoment in bezug auf die Ebene und endlich GF das Trägheitsmoment in bezug auf die senkrecht zu ihr stehende Achse.

Was den Inhalt der vierten Abhandlung ausmacht, ist schon oben angedeutet worden. Nachdem für ebene Getriebe die Prinzipien für die Entwerfung des Geschwindigkeits- und des Beschleunigungsplans auseinandergesetzt sind, werden diese Regeln auf einige Beispiele und Aufgaben angewendet und die Lösung der letzteren erläutert. Ferner wird auch noch für die Beschleunigung zweiter Ordnung ein Plan entworfen. Alsdann bespricht der Verfasser die Krümmung der Bahn und die Bahnevolute eines mit einem Getriebegliede verbundenen Punktes und geht schließlich in dem zweiten Teil der Abhandlung zur Kinetik ebener Getriebe über.

Einen ganz anderen Inhalt hat die fünfte Abhandlung mit der Überschrift: „Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?“ Nachdem der Verfasser den Zusammenhang zwischen den Spannungen all der Flächenelemente, welche eine Hauptrichtung enthalten, auf die elementar abzuleitenden Gleichungen

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi, \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi$$

zurückgeführt und die sich von selbst darbietende geometrische Konstruktion mit Hilfe eines Kreises beschrieben hat, behandelt er ähnlich wie bei den Trägheitsmomenten den Zusammenhang zwischen den Spannungen sämtlicher Flächenelemente eines Punktes.

Dann werden die älteren Hypothesen über die Erreichung der Elastizitätsgrenze und des Eintretens eines Bruches besprochen. Die älteste Hypothese, welche die Erreichung der Bruchgrenze annahm, wenn entweder die größte Normalspannung einen gewissen positiven Wert (Zugfestigkeit) oder die kleinste Spannung einen bestimmten negativen Wert (Druckfestigkeit) erreicht, wird abgelehnt, weil daraus die zur Erfahrung im Gegensatz stehende Beziehung folgen würde, daß die Schubfestigkeit das geometrische Mittel aus der Zug- und aus der Druckfestigkeit sein müßte. Eine andere Hypothese ist die, daß die Elastizitätsgrenze überschritten würde, wenn die größte Dehnung einen Grenzwert überschreitet; hieraus würde nämlich folgen, daß Zug, Druck oder Schub zur Erreichung der Elastizitätsgrenze in dem Verhältnisse 1 : 4 : 0,8 stehen, was mit den erfahrungsmäßigen Verhältniszahlen 1 : 1 : 0,5 nicht stimmt. Etwas haltbarer wird diese Hypothese, wenn sie dadurch ergänzt wird, daß nicht nur die größte Dilatation unterhalb einer gewissen Grenze bleiben solle, sondern auch eine etwa auftretende Kontraktion einen gewissen Wert nicht übersteigen dürfe. Auch die Hypothese, welche nicht die größte Hauptspannung selbst, sondern die Differenz zwischen den beiden äußeren Hauptspannungen als maßgebend für die Erreichung der Grenze ansieht, erscheint dem Verfasser nicht allgemein zulässig, weil die zur Charakteristik des Spannungszustandes gehörenden Kreise für die hauptsächlichsten Grenzfälle erfahrungsmäßig ganz verschiedene Größe haben.

Der Verfasser drückt nun seine Auffassung dahin aus, daß in einem Grenzfalle die Schubspannung an der Gleitfläche einen von der Normalspannung und der Materialbeschaffenheit abhängigen Größenwert haben müsse. Deshalb sind Gleitflächen nur solche Flächenelemente, welche die Richtung des mittleren Hauptdrucks enthalten, und die Beziehung für einen Grenzfall wird zu einer Beziehung zwischen den beiden äußeren Haupt-

drucken. Weiter gestaltet sich die Sache geometrisch folgendermaßen. Man benutze die Normalkomponente des Drucks gegen ein Flächenelement der eben bezeichneten Art als Abszisse, die Tangentialkomponente als Ordinate eines dem Flächenelemente zugeordneten Punktes. Die Gesamtheit dieser Punkte ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Abszissenachse liegt und durch seine Schnittpunkte mit der Abszissenachse die beiden äußeren Hauptspannungen markiert. Die oben gekennzeichnete Beziehung zwischen Normalspannung und Tangentialspannung in einem Grenzfalle wird sich geometrisch durch eine zur Abszissenachse symmetrisch liegende Kurve darstellen. Wenn nun ein Spannungszustand unterhalb der Bruchgrenze liegen soll, so muß jener Kreis ganz innerhalb der bezeichneten Kurve liegen; nähert sich aber der Zustand mehr und mehr der Bruchgrenze, so rückt auch der Kreisumfang mehr und mehr an die Kurve heran, um sie dann, wenn der Grenzzustand erreicht ist, zu berühren. Die beiden Kreise, welche der Grenzbeanspruchung auf Zug und auf Druck entsprechen, gehen durch den Koordinatenanfangspunkt. Und zwar liegt der Mittelpunkt des ersteren auf der positiven Seite der Abszissen, während der andere auf der negativen Seite der Abszissenachse liegt. Für diejenigen Grenzzustände, welche zwischen diesen ebenbezeichneten liegen, wird man mindestens näherungsweise annehmen dürfen, daß die Hüllkurve in ein Paar gerader Linien zerfällt, die dann also die gemeinschaftlichen Tangenten der eben bezeichneten Kreise sein werden. Bei der Verdrehungsfestigkeit werden die beiden äußeren Spannungen einander entgegengesetzt gleich, der Mittelpunkt des Kreises rückt in den Nullpunkt, und die Hauptspannung wird das Lot, welches man vom Nullpunkt auf die gemeinschaftlichen Tangenten fällen kann. Die Schubfestigkeit wird das Stück, welches die Tangenten von der Ordinatenachse abschneiden. Daraus ergeben sich zwischen der Zug-, Druck-, Verdrehungs- und Schubfestigkeit folgende zwei Beziehungen:

$$k_3 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \qquad k_4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{k_1 k_2}.$$

An der Hand des vorliegenden Versuchsmaterials prüft der Verfasser seine Ergebnisse und findet unter anderem z. B. in den Bachschen Ergebnissen für Gußeisen $k_1 = 16$, $k_2 = 75$, $k_3 = 13$ eine bemerkenswerte Bestätigung, insofern als $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{16 \cdot 75}{16 + 75} = \frac{1200}{91} = 13$ ist.

Nun folgt als sechste Abhandlung des Verfassers graphostatische Darstellung der „*neueren*“ Lehre vom Erddruck, d. h. der von Rankine in die Wissenschaft eingeführten Theorie des Drucks im unbegrenzten Erdreich. Die Abhandlung beginnt mit einer abweisenden Kritik der Coulombschen Theorie, welcher ich um so weniger zustimmen kann, weil meines Erachtens die Coulombsche Theorie in Verbindung mit der von Poncelet in so geistvoller Weise geometrisch begründeten Konstruktion alles das leistet, was in der vorliegenden Abhandlung geboten wird.

Die Coulombsche Theorie beantwortet die Frage nach dem Widerstande, welchen eine Mauer im Falle des Gleichgewichts gegen den Druck der Erde muß leisten können, indem sie zunächst die Richtung des Erddrucks als gegeben annimmt. Solange Gleichgewicht herrscht — das ist Coulombs physikalische Grundvorstellung, über die auch Rankine später

nicht hinausgegangen ist — darf an keinem Flächenelement die Reibung überschritten werden, und deshalb darf für irgend eine durch den Fuß der Mauer gelegte Ebene die Druckneigung zur Normale nirgends größer als der Reibungs- oder Böschungswinkel des Sandes sein. Die Gleichgewichtsbeziehungen für die Kräfte, welche auf den durch eine solche Ebene abgetrennten Erdkeil wirken, sind nun dieselben, als ob dieser Keil ein starrer Körper wäre. Daraus folgt unmittelbar, daß der erforderliche Widerstand W der Mauer mindestens eben so groß sein muß wie diejenige Kraft W_x von derselben Richtung, welche bei völliger Ausnutzung der an der schiefen Ebene möglichen Reibung den Keil festzuhalten vermöchte, wobei sich natürlich W als Funktion des Neigungswinkels x der schiefen Ebene ergibt. Also darf W auf keinen Fall unter das Maximum von W_x sinken. Ist, wie es bisher wohl allgemein anerkannt wurde, die Annahme zulässig, daß die Fläche, an welcher in einem Grenzfalle der Vollbetrag der Reibung zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts nötig ist, wenigstens näherungsweise eine Ebene ist, so ist jenes Maximum von W_x der Erddruck im Grenzfalle des Gleichgewichts.

Mohr hat wohl als der erste mit Recht hervorgehoben, daß an der Fläche, wo in einem Grenzfalle die Druckneigung ihr Maximum erreicht, die Druckverteilung eine von oben nach unten gleichmäßig wachsende sein müsse, so daß von der Resultante des Drucks an der Gleitfläche nicht bloß Größe und Richtung bekannt ist, sondern auch ein Punkt ihrer Wirkungslinie, nämlich der obere Endpunkt des unteren Drittels der Linie, an welcher die Reibung voll erschöpft wird. Auch das Gewicht des abgetrennten Erdkeils hat eine wohlbestimmte Wirkungslinie, die Vertikale durch den Schwerpunkt. So ergibt sich denn der Erddruck in einem Grenzfalle des Gleichgewichts als Resultante der eben bezeichneten Kräfte völlig bestimmt nach Größe und Wirkungslinie. Allerdings hat diese Wirkungslinie eine Eigenschaft im allgemeinen nicht, welche man mit Rücksicht auf die hydrostatische Analogie an ihr gerne erblicken würde; sie geht bei ebener Hinterfläche nicht notwendig durch den oberen Endpunkt des unteren Drittels. Aus diesem Grunde verwirft Mohr die Coulombsche Theorie meines Erachtens nicht ganz mit Recht. Denn es ist zwar oft genug behauptet worden, daß die Wirkungslinie des Erddrucks die verlangte Eigenschaft haben müsse, aber einen zwingenden Beweis dafür hat meines Wissens bisher niemand erbracht.

Und selbst wenn jener Beweis sich erbringen ließe, brauchte man noch immer nicht die ganze Theorie zu verwerfen, sondern müßte sich nur die Verfügungsfreiheit über eine Größe sichern, bezüglich deren eine bestimmte Angabe bisher nicht gemacht wurde, nämlich über den Richtungswinkel des Erddrucks. Es handle sich zunächst um den Fall einer nach vorn geneigten Mauer. Dann denke man sich den von der Hinterfläche der Mauer und der sogenannten Gleitfläche begrenzten Erdkeil durch eine vertikale Ebene in zwei Teile zerlegt. Die Druckresultante, welchen die beiderseits dieser vertikalen Ebene liegenden Massen aufeinander ausüben, erhält man nun, indem man entweder rechts oder links das Gewicht des Erdkeils mit der Druckresultante vereinigt, welche sich für die zweite begrenzende Ebene ergibt. Die Gewichte teilen offenbar die schiefen Ebenen von unten aus gerechnet nach dem Verhältnis eins zu zwei; ebenso sollen aber auch die beiden Druckkräfte ihre Angriffsfläche teilen. Deshalb müssen die Resultanten beide parallel der Geländefläche

sein, und das Problem der Gleitflächenbestimmung kommt auf den einen Sonderfall hinaus, daß die Hinterseite der Mauer vertikal und die Richtung des Erddrucks parallel der Geländefläche ist. Die Druckverteilung, auf welche wir so geführt werden, ist aber gerade diejenige, welche Rankine bei der Betrachtung des unbegrenzten Erdreichs behandelt. Alles was sich mit dieser Theorie erreichen läßt, liegt demnach innerhalb des Machtbereichs der Coulombschen Theorie und der Ponceletschen Konstruktion. Der Verfasser gibt hier eine auf die Betrachtung des Spannungskreises gestützte graphische Behandlung der Theorie von Rankine und untersucht dann ihre Anwendbarkeit auf das Problem der Druckbestimmung für Mauern. Nach seiner Meinung reicht die letztere nur soweit, als die Flächen des größeren Normaldrucks Mauer und Gelände wirklich schneiden.

Ist für diese Bedingung die Wand nicht weit genug nach vorn geneigt, so schlägt der Verfasser ein Interpolationsverfahren ein, welches dem Referenten recht bedenklich erscheint.

Durch den Fuß der Mauer werden mehrere Ebenen gelegt, welche als Hinterseite von Mauern gedacht dem Machtbereich der Rankineschen Theorie angehören. In ihren oberen Endpunkten werde senkrecht zur Geländefläche der Erddruck aufgetragen. Dem Endpunkt der durch den Fuß der Mauer gelegten Fläche natürlicher Böschung wird die Ordinate Null beigelegt. Die so gewonnenen Punkte werden durch eine Interpolationslinie verbunden, welche dann, so unbestimmt sie auch gerade für das in Betracht kommende Gebiet wird, die Größe des Erddrucks liefern soll. Als Richtung des Drucks wird auch hier die Senkrechte zur Mauer genommen, und der Angriffspunkt soll ebenso wie auch sonst im oberen Endpunkt des unteren Drittels der Mauer angreifen. Wie weit das nun alles miteinander vereinbar ist, untersucht der Verfasser nicht weiter.

Die Spannungen im prismatischen Balken werden in der siebenten Abhandlung mit Hilfe der in der Geometrie der Massen (Abhandlung III) abgeleiteten Begriffe behandelt. Mit Hilfe des Mohrschen Kreises und des Trägheitsschwerpunktes wird zunächst die Beziehung zwischen Nullinie und Kraftangriffspunkt ermittelt, die auf die Bestimmung des Kerns als der Gesamtheit der Angriffspunkte hinausläuft, für welche die Nullinie nicht in das Innere des Querschnitts eindringt.

Nachdem dann noch der Fall behandelt ist, daß der Angriffspunkt außerhalb des Kernes liegt und der Körper keine Zugkraft auszuhalten vermag, geht der Verfasser zu einer Bestimmung der mit der Biegung verbundenen Schub- und Nebenkräfte über, die ich für höchst bedenklich halte. Bei der gewöhnlichen Biegungstheorie erhält man die erste Näherung für den Spannungszustand, indem man die bekannte Hypothese zugrunde legt, daß jeder Querschnitt eben bleibt und jede Längsfaser eine den Querschnitt unter rechtem Winkel schneidende Kurve wird. Die Flächenelemente des Querschnittes erfahren normale Spannung, alle Flächenelemente, welche dazu senkrecht stehen, erfahren die Spannung Null. Da man über zwei Größen verfügen kann — Dilatation und Krümmungsradius der Schwerpunktslinie —, so kann man auch zwei von den drei statischen Bedingungen für den von einem Querschnitt begrenzten Balkenteil befriedigen; man erreicht, daß das Moment und die Normalkraft die richtigen Werte erhalten. Will man noch die dritte statische Gleichung befriedigen, so muß man von der ersten Näherungsannahme

über den Spannungsszutand zu einer zweiten Näherung übergehen. Der Verfasser betrachtet einen Teil des Balkens, welcher durch zwei um dz voneinander entfernte Querschnitte und eine auf dem einen Querschnitt senkrecht stehende, der Biegungsachse parallele Ebene begrenzt wird. Die drei Gleichgewichtsbedingungen, nämlich die Bedingungen, daß die beiden Komponentensummen und die Momentensumme gleich Null sein müssen, liefern drei Beziehungen für die zweite Näherung des Spannungszustandes. Die Momentengleichung liefert die Gleichung der über die Breite des Balkens genommenen Schubspannungsresultante für den Balkenquerschnitt und die senkrecht darauf stehende Ebene. Wollte man nun mit dem Verfasser stillschweigend annehmen, daß für die Normalspannung die Genauigkeit der ersten Näherung noch über Größen zweiter Ordnung hinausgeht, so blieben tatsächlich nur noch zwei Größen zu bestimmen, nämlich jene eben erwähnte Schubspannungsresultante und die über die Breite des Balkens genommene Normalspannung an der zur Biegungsachse parallelen Ebene. Dann würden also die beiden noch zur Verfügung stehenden Gleichungen ausreichen. Aber meines Erachtens ist durch nichts bewiesen, daß die Normalspannung des Querschnitts beim Übergang zur zweiten Näherung keine in Betracht kommende Änderung erfährt. Das ist jedoch nicht das einzige Bedenken, welches ich gegen die Ableitung des Verfassers hege. Beim Ansatz der Gleichungen für die zweite Näherung hätte meiner Meinung nach berücksichtigt werden müssen, daß durch die Biegung die beiden benachbarten Querschnitte gegeneinander geneigt werden, so daß die Spannungen erster Ordnung für beide Querschnitte nicht dieselbe Richtung behalten, und daß infolgedessen diese Größen auch auf die Normalspannung der zum Querschnitt senkrechten Flächen wirken.

Die achte und die neunte Abhandlung gehören eng zusammen; beide gehen aus von der Differentialgleichung $EJy'' = -M$ der elastischen Linie. In der ersteren bildet die Bestimmung der Stützmomente eines kontinuierlichen Balkens den hauptsächlichen Gegenstand. Den Mittelpunkt dieser Bestimmung bildet wie immer die gewöhnlich mit dem Namen Clapeyrons bezeichnete Beziehung zwischen drei aufeinander folgenden Stützmomenten, welche der Verfasser hier ableitet. Im Literaturnachweis hebt Mohr hervor, daß die von Clapeyron im Jahre 1857 mitgeteilte Formel schon von Bertot 1855 veröffentlicht sei, und daß dieselbe sich nur auf den besonderen Fall gleicher Stützenhöhe beziehe; die allgemeinere Formel, welche die Höhenunterschiede der Stützen berücksichtigt, nimmt der Verfasser für sich in Anspruch. In der Abhandlung Nr. IX wird die elastische Linie als Seilkurve angesehen und von diesem Gesichtspunkt aus graphisch behandelt. Denn wird die Senkung, welche eine irgendwo befindliche Last 1 an einem festen Punkt C des Balkens hervorruft, aufgefaßt als Funktion der Abszisse der Belastungsstelle und als Ordinate an der Belastungsstelle aufgetragen, so erhält man ein Bild der verschiedenen Senkungen, welche eine über den Balken wandernde Last in dem Punkte C hervorruft, eine sogenannte Einflußlinie der Senkung im Punkte C für eine über den Balken wandernde Last. Dieses Hilfsmittel der Einflußlinie, welches später in der Statik der Baukonstruktionen zu so großer Bedeutung gelangt ist, wird dann noch auf einige hierher gehörende Aufgaben angewandt.

Nachdem nun noch in Abhandlung X der vollwandige Bogenträger mit

Kämpfergelenken behandelt ist, geht der Verfasser in den Abschnitten XI und XII zu den Gebieten über, wo er die größten Erfolge zu verzeichnen hat, zur Theorie des Fachwerks. Ihm gebührt das Verdienst, als der erste in Deutschland das Prinzip der virtuellen Verrückungen auf die Lehre vom Fachwerk mit dem größten Erfolge angewendet zu haben und so den Beweis geführt zu haben, daß wir in den allgemeinen Prinzipien der analytischen Mechanik nicht bloß zusammenfassende Sätze von rein wissenschaftlichem Interesse, sondern Waffen von der höchsten Brauchbarkeit bei der Bewältigung schwieriger Aufgaben der technischen Praxis besitzen. Daß das Prinzip der virtuellen Verrückungen auch auf kontinuierlich ausgedehnte Massen anwendbar sei, ist allerdings von alters her bekannt. Man braucht nur an Lagranges Ableitung der hydrodynamischen Grundgleichungen oder an G. Kirchhoffs aus dem Jahre 1850 stammende Untersuchung über die elastischen Platten zu denken, um zu erkennen, daß die Anwendbarkeit des Prinzips auf Spannungskräfte schon längst gesichert war. Die Gleichung

$$\Sigma P\delta p = \Sigma S\delta s,$$

für welche Mohr hier eine nicht ganz einfache Ableitung gibt, ließe sich als unmittelbare Folge eines allgemeinen Prinzips mit wenigen Worten begründen. Also nicht in der Behauptung der Anwendbarkeit des Prinzips der virtuellen Verrückungen — die ist und war für einen Kenner der Mechanik meines Erachtens selbstverständlich — sondern in der Ausnützung derselben zur Ableitung der Wechselbeziehung zwischen statischen und geometrischen Verhältnissen ruht das eigentliche Verdienst um die Theorie des Fachwerks. Für das statisch bestimmte Fachwerk wird zunächst als Folge des Prinzips gezeigt, daß, wenn $x_1 K_1, x_2 K_1, \ldots x_n K_1$ die Spannungen sind, welche eine äußere Kraft K_1 hervorruft, die Verschiebung, welche der Angriffspunkt durch ganz willkürliche Längenänderungen Δl_i der Stäbe in Richtung der Kraft erfährt,

$$\Delta y = + \Sigma x_i \Delta l_i$$

ist; und ganz ähnlich ergibt sich für zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte, welche in der Verbindungslinie zweier Knotenpunkte wirken, die Näherung der Knotenpunkte

$$\Delta z = - \Sigma x_i \Delta l_i.$$

Ruft also eine Spannung $S^{(k)}$ eines überzähligen Stabes in den anderen Stäben die Spannungen $x_i^k S^{(k)}$ $(i = 1, \ldots n)$ hervor, so sind die von den Längenänderungen Δl_i hervorgerufenen Längenänderungen Δl_k der überzähligen Stäbe gegeben durch die Gleichungen

$$\Delta l_k = - \sum_i x_i^{(k)} \Delta l_i.$$

Setzt man nun hierin für die Δl_i und Δl_k gleich die wirklich stattfindenden Längenänderungen, welche ja lineare Funktionen der Spannungen in den überzähligen Stäben werden müssen, so erhält man für die letzteren gerade so viel Gleichungen, als unbekannte Größen vorhanden sind. Will man das Wesentliche dieser Entwickelung herausheben, so muß man sagen, daß zwischen den Spannungen so viel statische Beziehungen bestehen, als das Fachwerk nach Entfernung der überzähligen Teile noch Stäbe enthält; ferner

sind die Längenänderungen in den überzähligen Stäben lineare Funktionen der anderen Längenänderungen. Die Koeffizienten des Systems der statischen Gleichungen könnte man graphisch durch Kräftepläne, die des anderen durch Verschiebungspläne feststellen. Drückt man dann die Längenänderungen sämtlich durch die Spannungen und die letzteren wieder durch diejenigen der überzähligen Stäbe aus, so müßte man die hinreichende Anzahl von Gleichungen für die gesuchten Größen erhalten. Der Fortschritt, welcher hier gemacht ist, besteht also in der Erkenntnis, daß die Koeffizienten der statischen und der kinematischen Gleichungen dieselben sind, so daß man entweder nur die Kraftpläne oder die Verschiebungspläne zu zeichnen hat. Aber diese Arbeitsersparnis ist nicht einmal das Wichtigste; erst aus dieser Koeffizientengleichheit fließt für den Verfasser als Folge jener berühmte Satz von Castigliano über das Minimum der Deformationsarbeit, der ja in der neueren Fachwerktheorie eine so hervorragende Bedeutung gewonnen hat.

Meiner Überzeugung nach ist eine andere Reihenfolge die bessere, weil man Castiglianos Prinzip aus dem allgemeinen Prinzip der virtuellen Verrückungen viel leichter ableiten kann, wenn man sich nicht erst auf eine längere Untersuchung über die formelmäßige Darstellung der stattfindenden Zusammenhänge zwischen den in Betracht kommenden Größen einläßt. Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen

$$\Sigma S_i \delta s_i = \Sigma P_k \delta p_k$$

folgt sofort, daß, wenn $P_k + \delta' P_k$, $S_i + \delta' S_i$ ein zweites Gleichgewichtssystem von Kräften und Spannungen für unser Fachwerk bezeichnet, auch

$$\Sigma \delta' S_i \delta s_i = \Sigma \delta' P_k \delta p_k$$

ist. Sind nun x_i die Verlängerungen der Stäbe, y_k die Verschiebungen, welche durch die P_k und die Temperaturänderungen hervorgerufen werden, so sind x_i, y_k Größen, welche den für δs_i, δp_k aufgestellten Bedingungen genügen, und folglich gilt die Gleichung:

$$\Sigma x_i \delta' S_i = \Sigma y_k \delta' P_k.$$

Läßt man die $\delta' P_k = 0$ werden, so bezeichnen die $\delta' S_i$ irgend welche mit den statischen Beziehungen vereinbare Variationen der Größen S_i, und für alle diese Variationen ist also der Ausdruck

$$\Sigma x_i \delta' S_i = 0.$$

Die beiden Größen x_i und S_i stehen in einem von der Temperatur mitbestimmten Zusammenhang, man kann entweder S_i als Funktion von x_i und t oder umgekehrt auch x_i als Funktion von S_i und t ansehen; mit Rücksicht darauf dürfen wir schreiben

$$x_i \delta' S_i = \delta'(x_i S_i) - S_i \delta' x_i = \delta'\left(x_i S_i - \int_{a_i}^{x_i} S_i \, d x_i\right).$$

Bedenken wir nun noch, daß der Ausdruck $A = \Sigma \int_{a_i}^{x_i} S_i \, d x_i$ die Deformationsarbeit ist, welche bei der Temperatur t erforderlich ist, um das Fachwerk

aus dem Zustand (a_i) in den Zustand (x_i) überzuführen, so erhalten wir den Satz: Für jede mit den statischen Bedingungen des Gleichgewichts vereinbare Variation der Spannungen ist die erste Variation des als Funktion der Spannungen aufgefaßten Ausdrucks

$$B = \Sigma x_i S_i - A$$

gleich Null.

Diese Wendung ist deshalb besonders wichtig, weil sie erkennen läßt, daß der Satz vom Minimum der Deformationsarbeit keineswegs an den *homogen-linearen* Zusammenhang geknüpft ist, daß sich vielmehr, wie Sommerfeld gelegentlich bemerkt hat, für jeden funktionalen Zusammenhang zwischen Spannung und Ausdehnung ein zu der Deformationsarbeit in einfacher Beziehung stehender Ausdruck finden läßt, welcher — kurz gesagt — für das richtige System der Spannungen ein Minimum wird. Bei homogen-linearem Zusammenhang von der Form $x_i = \alpha_i S_i$ wird $B = A$, d. h. die Deformationsarbeit wird selbst ein Minimum. Wird aber die Temperatur berücksichtigt, so daß der Zusammenhang zwar noch linear, aber nicht mehr homogen ist, wie er sich in der Formel

$$x_i = \frac{S_i l_i}{EF_i} + c l_i t_i$$

ausspricht, so gelangt man zu

$$B = \sum \left(\frac{S_i^2 l_i}{EF_i} + c l_i t_i S_i \right) - \sum \frac{1}{2} \frac{S_i^2 l_i}{EF_i} = \sum \left(\frac{1}{2} \frac{S_i^2 l_i}{EF_i} + c l_i t_i S_i \right)$$

und zu der von Müller-Breslau vorgenommenen Ausdehnung des Satzes vom Minimum der Deformationsarbeit auf die damals sogenannte ideelle Deformationsarbeit.

Obgleich nun die auf den Fall der Temperaturberücksichtigung bezüglichen Mohrschen Gleichungen (19) auf den ersten Blick als die gleich Null gesetzten Ableitungen des Ausdrucks B nach den überzähligen Spannungen zu erkennen sind, geht Mohr achtlos an dem eben erwähnten Satze vorüber. Das müßte unbegreiflich erscheinen, wenn man nicht wüßte, wie ablehnend sich Mohr von vornherein gegen die „Elastizität" verhalten hat, welche die Deformationsarbeit unter den Händen Müller-Breslaus nach Mohrs Meinung unzulässigerweise hierbei entwickelt habe. Aber gerade die Erweiterungsfähigkeit eines Begriffs ist doch häufig genug die Quelle seiner wissenschaftlichen Brauchbarkeit. Und wenn Müller-Breslau den erweiterten Satz mit dem Namen Castiglianos belegt, so kommt darin wohl die berechtigte Anerkennung fremden Verdienstes, aber nimmermehr ein ungerechtfertigtes Bestreben zum Ausdruck, „Ergebnisse der deutschen Wissenschaft Ausländern zuzueignen". Keinesfalls hat Mohr auf den in Frage stehenden Satz irgendeinen berechtigten Prioritätsanspruch.

Ebenso wie bezüglich dieses Berührungspunktes von Mohrs Arbeiten mit dem Castiglianoschen Satz, steht es um ihre sachliche Inhaltsgemeinschaft mit der um 10 Jahre älteren, knapp gehaltenen Untersuchung von Maxwell. Um das zu beweisen, müssen wir in Kürze auf den Inhalt des letzteren eingehen. Wie Mohr ganz richtig angibt, geht Maxwell aus von der nach Clapeyron benannten Gleichung

$$\tfrac{1}{2} \Sigma K w = \tfrac{1}{2} \Sigma S \Delta s .$$

Wenn man nun ein einfaches, statisch bestimmtes Fachwerk betrachtet, von welchem nur ein Knotenpunkt durch eine Kraft K beansprucht wird, so sind die Spannungen S statisch durch die Kräfte K vollständig bestimmt. Je größer man nun für einen einzelnen Stab den Faktor EF macht, desto geringer wird seine Verlängerung und mit ihr das Produkt $S\Delta s$. Man kann sich dann diese Größe für alle Stäbe bis auf einen direkt bis auf Null herabgedrückt denken. Dann bleibt auch rechts nur ein Glied

$$\tfrac{1}{2}Kw = \tfrac{1}{2}S\Delta s.$$

Ist nun σ die Spannung, welche die Kraft 1 in dem betrachteten Stabe hervorruft, so ruft umgekehrt die Längenänderung 1 des Stabes in Richtung der Kraft die Knotenpunktsverschiebung $w = \sigma$ hervor. Von hier aus kommt man dann unmittelbar zu der Erkenntnis, daß, wenn q die Spannung ist, welche durch die Spannung 1 eines überzähligen Stabes in irgend einem der nicht überzähligen Stäbe hervorgerufen wird, die Verlängerung 1 des letzteren die Verlängerung q des ersteren hervorruft. Das ist dann aber geradezu der Inhalt der Gleichung (13) von Mohr:

$$\Delta(l') = -x_1'\Delta l_1 - x_2'\Delta l_2 \cdots - x_n'\Delta l_n,$$

welche wir eben als den Kern und den eigentlichen Mittelpunkt der Mohrschen Theorie bezeichnet haben.

Was sind denn auch die hier betrachteten Längenänderungen der einzelnen Stäbe mit den durch sie bewirkten Verlängerungen und Verschiebungen anderes als virtuelle Veränderungen? Nur macht sich Maxwell wegen des von ihm gewählten Ausgangspunktes die Mühe, über ihre physikalische Realisierbarkeit Betrachtungen anzustellen. Wenn Mohr ferner meint, durch die Worte

> „die Natur des Clapeyronschen Theorems gestattet nicht ohne weiteres, die Betrachtung auf die Bestimmung der Temperatureinwirkungen auszudehnen"

die Tragweite der Maxwellschen Ableitung unter die seinige hinabdrücken zu können, so befindet er sich meines Erachtens im Irrtum. Denn sowohl die von den überzähligen Spannungen und den äußeren Kräften in den Stäben des einfachen Fachwerkes hervorgerufenen Spannungen als auch die von den Stabverlängerungen des einfachen Fachwerkes hervorgebrachten Verlängerungen der überzähligen Stäbe und Verschiebungen an den Knotenpunkten sind doch durchaus unabhängig von dem physikalischen Zusammenhange zwischen Spannung und Dilatation. Sie können deshalb, wie auch immer der Zusammenhang beschaffen sei, genau so, wie es Maxwell vorgemacht hat, an einem Fachwerk realisiert werden, bei welchem Spannung und Dilatation proportional sind, und infolgedessen auch Clapeyrons Gleichung gilt. Damit ist aber die Gültigkeit des Beweises von Maxwell auch für den allgemeinen Fall gesichert.

Unmöglich kann ferner Mohr dem großen englischen Physiker Maxwell zutrauen, daß ihm der eigentliche Inhalt seiner Gleichung

$$\tfrac{1}{2}Kw = \tfrac{1}{2}S\Delta s$$

entgangen sein sollte. Und dieser Inhalt ist offenbar das Arbeitsprinzip für eine Gruppe der Kräfte, aus welchen das allgemeine System zusammengesetzt werden kann, in bezug auf jede der besonderen virtuellen Verrückungen,

aus denen die allgemeinste virtuelle Verrückung sowohl als die tatsächlich stattfindende sich durch einfache Komposition ergibt. Deshalb meine ich, Müller-Breslau befindet sich durchaus im Recht, wenn er bei der Bezeichnung der grundlegenden Gleichungen für die Theorie des Fachwerks den Namen Maxwell zu Ehren bringt, weil diese Gleichungen den von Maxwell zuerst entdeckten Zusammenhang zum Ausdruck bringen.

Und Mohr — wie groß auch seine von uns willig anerkannten Verdienste um den Ausbau der Fachwerktheorie sein mögen — hat nicht das Recht, auf Grund seiner um zehn Jahre jüngeren Abhandlung gegen diese Bezeichnung zu protestieren, weil es sich um eine Errungenschaft deutscher Wissenschaft handele.

Am Schlusse unserer Besprechung angelangt, geben wir der festen Zuversicht Ausdruck, daß das vorliegende Werk recht bald eine zweite Auflage erlebe, damit es dann — befreit von den Schlacken unsachlicher Bemerkungen — bei den Lesern ungetrübte Freude an dem geistvollen Schaffen des Verfassers wecke.

Berlin. FRITZ KÖTTER.

E. Schumann. Lehrbuch der ebenen Geometrie für die ersten drei Jahre geometrischen Unterrichts an höheren Schulen. Mit 87 Textfiguren. IX u. 202 S. Stuttgart und Berlin 1904, Fr. Grub. Preis gebunden ℳ 2,20.

Das Buch umfaßt das planimetrische Pensum bis zu der Kreismessung, den Proportionen am Kreise und dem Taktionsproblem des Apollonius. Man merkt ihm auf jeder Seite an, daß es aus der Unterrichtspraxis heraus entstanden ist. Mit Erörterungen, denen der Schüler kein Verständnis abgewinnen kann, hält es sich nicht auf, sondern wendet sich lieber an seine naive Auffassung und strebt vor allem das Lösen von Aufgaben an, von denen ein reiches Übungsmaterial in vortrefflicher Auswahl geboten wird. Vielleicht ist der Verfasser aber in seinen Einschränkungen zu weit gegangen. Daß z. B. die Inkommensurabilität keine eingehende Behandlung erfährt, wird man wohl allgemein billigen; daß aber das Exhaustionsverfahren zur Berechnung von π nur mit wenigen Worten angedeutet wird, mag manchem bedenklich erscheinen. Vielleicht läßt sich der Verfasser herbei, bei einer späteren Auflage dieses Kapitel in einem Anhange anzufügen. Die Lehrsätze erhalten für ihre Anwendung geeignete abgekürzte Bezeichnungen. Zum Vergleich der verschiedenen Konstruktionen einer Aufgabe in bezug auf ihre Einfachheit wird zwar nicht Lemoines Geometrographie herangezogen, deren Konstruktionen Verfasser „oft verblüffend elegant" nennt; wohl aber wird häufig (wie auch schon von anderer Seite geschehen) die Zahl der notwendigen Konstruktionslinien als Maßstab für die Einfachheit der Konstruktion gewählt. Einige unbedeutende Ausstellungen mögen erwähnt werden: Figur 16 ist durch eine andere zu ersetzen; Seite 40, Zeile 2 v. u. muß es wohl „Halbstrahl" heißen, ferner Seite 70, § 115 DG^2 statt AG^2, und in Figur 58 $\frac{c}{2}$ statt $\frac{a}{2}$; Seite 58 kommt abwechselnd „Lot auf der Tangente" und „auf die Tangente" vor. Auf guten und knappen Ausdruck ist viel Gewicht gelegt. Das Buch erscheint vorzüglich geeignet, dem Anfangsunterricht in der Planimetrie zugrunde gelegt zu werden.

Berlin. R. GÜNTSCHE.

Éric Gérard, Leçons sur l'électricité. II. Bd. 7. Auflage, gr. 8⁰ 888 Seiten, 12 fr. ungeb., Paris 1905, Gauthier Villars.

Während der erste Band sich mit den theoretischen Grundlagen und der Erzeugung von Elektrizität im großen befaßte, behandelt der zweite Band in acht Abschnitten die Übertragung (I) und Verteilung (II) der elektrischen Energie, die Anwendungen auf Telegraphie (III), Telephonie (IV), Beleuchtung (V), auf die eigentliche Kraftverteilung durch Elektromotoren (VI), ferner den elektrischen Bahnbetrieb (VII), die Galvanoplastik, Elektrochemie und Elektrometallurgie (VIII).

Dieser zweite Band, der mit dem ersten in nunmehr siebenter Auflage erscheint, verdient die Anerkennung, die wir seinem Vorläufer bereits gezollt haben, in noch erhöhtem Maße durch die einheitliche und ebenmäßige Bearbeitung des außerordentlich vielgestaltigen Gebietes der angewandten Elektrotechnik. Der Verfasser hat die hier sehr schwierige Aufgabe gelöst, in klarer eleganter Darstellung überall nur das Wesentliche hervorzuheben und durch passende Figuren und Diagramme zu beleuchten; trotz der Masse der Einzelheiten wird das Interesse des Lesers wachgehalten und auf den nächsten Abschnitt gespannt.

Das Werk hat von Auflage zu Auflage den neuesten Stand der wissenschaftlichen und industriellen Fortschritte eingenommen und gewährt ein im wesentlichen vollständiges Bild des Zustandes, wie ihn die Entwicklung der Elektrotechnik einschließlich der neuesten Erfindungen geschaffen hat. Dabei ist es nicht etwa eine Sammlung von Bildern mit begleitendem Text, sondern es geht stets auf die theoretischen Grundlagen und Maßberechnungen zurück und erhärtet die Formeln durch Ausrechnung praktischer Beispiele. Das Werk dient dem Verfasser als Hilfsmittel bei seinen Vorlesungen als Professor und Vorstand des elektrotechnischen Instituts der Universität Lüttich. Die lange Lehrerfahrung hat einen wesentlichen Anteil an dieser reifen Schöpfung.

Im einzelnen erwähnen wir, daß in der Beschreibung (p. 430 ff.) von Photometern meist französischen Ursprungs das viel gebrauchte und vortreffliche Photometer von Lummer und Brodhun fehlt. Bei der Schwungradberechnung eines Asynchronmotors (p. 689 ff.) würden wir es für zweckmäßiger halten, nicht von den Leistungen in Pferdestärken auszugehen, die erst mit einer noch unbekannten Tourenzahl gerechnet werden müssen, sondern von den Drehmomenten an der Motorachse, die ganz unabhängig von der Tourenzahl sich aus dem Belastungsdiagramm Fig. 335 ergeben. Dieses Belastungsdiagramm für eine Arbeitsperiode ist das ursprünglich gegebene; dann erst kann aus dem Drehmomentgesetz des Motors und der dynamischen Grundgleichung für drehende Bewegungen der Anteil der Leistung getrennt werden, der auf das Schwungrad und auf den Motor fällt.

Wir lassen eine kurze Inhaltsübersicht folgen, die nur flüchtig den reichen Stoff skizzieren kann. Der zweite Band zerfällt in acht Abschnitte von insgesamt 46 Kapiteln.

Der erste Abschnitt ist den ruhenden Transformatoren gewidmet, die hochgespannte Wechselströme in solche niedriger Spannung umwandeln und umgekehrt. Zunächst werden die physikalische Wirkungsweise, die Konstruktionsmerkmale und das Verhalten bei Parallelschaltung behandelt, auch das Arbeitsdiagramm des Transformators für Strombelastung, Spannungs-

abfall und Phasenverschiebung gezeichnet; wir möchten hier wie später die Mathematiker auf die Vorzüge der graphischen vor der rechnerischen Behandlung von Wechselstromerscheinungen hinweisen. Hierauf wird ein fertiger Transformator geprüft und gemessen und ein neuer Entwurf vollständig durchgerechnet. Daran fügt sich die Betrachtung der Induktionsspulen mit offenem magnetischen Kreis, die ja für die Wellentelegraphie große Bedeutung erlangt haben.

Die Fernleitung und Verteilung der elektrischen Energie ist Gegenstand des zweiten Abschnittes. Spannungsabfall und Wärmeverlust und der Einfluß des Widerstandes, kombiniert mit Selbstinduktion und Kapazität, werden aus den Dimensionen der Leitung berechnet. Dann folgen die konstruktiven Ausführungen der Hilfsapparate wie Schalter, Blitzableiter, Sicherungen und ihre typische Anordnung an der Schalttafel einer mittleren Zentrale. Die verschiedenen Verteilungssysteme, Serien- und Parallelschaltung mit Speisepunkten, werden gegeneinander abgewogen und die Wichtigkeit der Akkumulatoren für Belastungsausgleich beleuchtet. Bisher drehte es sich nur um Gleichstrom. Bei Wechselströmen ist nur Parallelschaltung der Stromerzeuger und -verbraucher in Anwendung. Nunmehr folgt die Berechnung der Gleich- und Wechselstromnetze mit Speisepunkten und Ausgleichsleitungen. Die Fernleitung der Elektrizität kann oberirdisch durch Drähte auf Masten oder unterirdisch durch Kabel geschehen; beide Konstruktionen werden durch die Anwendung hoher Spannungen auch in geringen Details sehr beeinflußt und deshalb durch zahlreiche Zeichnungen aus der Praxis beleuchtet. Sehr starke Ströme bei geringer Spannung, wie sie bei der Verteilung im Innern der Städte vorkommen, erfordern Maßnahmen ganz anderer Art, insbesondere was Kabelfabrikation und -verlegung anlangt. Die Telegraphen- und Telephonleitungen werden als eine eigene Klasse elektrischer Leitungen einer besonderen Besprechung gewürdigt. Ein wichtiges Element aller Stromführungen ist die Isolation; die Mittel sie herzustellen und zu prüfen, werden eingehend erörtert.

Der dritte Abschnitt behandelt die Telegraphie. Der schädliche Einfluß der Kapazität auf die Übertragung elektrischer Zeichen wird durch eine gedrängte mathematische Entwicklung nachgewiesen. Die Einfachtelegraphie mit Morsetaster und -empfänger gewährt das typische Schema einer Telegraphenleitung mit allen Nebenapparaten. Darauf werden die Mehrfachtelegraphen und automatischen Apparate von Hughes, Baudot u. a. beschrieben. Bei der submarinen Telegraphie ist der Syphonrecorder von Lord Kelvin und das Spiegelgalvanometer als Geber und Empfänger in Gebrauch. Die beträchtliche Erhöhung der Leistung der Telegraphenlinien durch die Patente von Pupin findet noch Erwähnung, der die Kapazität durch Einschaltung von Induktionsspulen an bestimmten Stellen der Leitung teilweise neutralisiert.

Der vierte Abschnitt enthält die Telephonie. Die Telephone von Bell, Siemens u. a., werden beschrieben, und besonders eingehend das Mikrophon, die Erfindung von Hughes, nach Konstruktion und Schaltung erklärt. Dann folgt die Einrichtung einer Telephonstation mit den Kabelschaltungen. Hierauf werden die Erfindungen in gleichzeitiger Telegraphie und Telephonie auf demselben Draht gewürdigt. Ein Kapitel über die Einrichtung von Telephonzentralen und die verschiedenen Vielfachumschaltersysteme und ein kurzer Abriß der Telegraphie ohne Draht nach Marconi bildet den Schluß.

Der Abschnitt V über elektrische Beleuchtung schildert zuerst die verschiedenen Lampen, die Kohlenfadenglühlampe, das Nernst- und Osmiumlicht, die Quecksilberlampe von Hewitt und die gewöhnliche Bogenlampe mit Reguliermechanismus. Hierauf folgen die theoretischen Grundlagen der Photometrie und eine Beschreibung gebräuchlicher Photometer. Dann werden die praktischen Daten über Lichtstärke und -verteilung der einzelnen Lampen gegeben und die Gesichtspunkte für die Projektierung einer Beleuchtung ins Feld geführt. Daran schließt sich ein Kapitel über Elektrizitätszähler und die Aufstellung von Stromtarifen.

Der Abschnitt VI über elektrische Kraftanlagen in Fabriken verbreitet sich zunächst über die Wirkungsweise von Gleichstrommotoren, ihr Verhalten in bezug auf Ökonomie, Tourenregulierung, über die Anlaßapparate und -methoden. Darauf folgen die asynchronen Wechselstrommehrphasenmotoren, verschiedene Konstruktionstypen werden beschrieben, und eine einfache Theorie ihrer Arbeitsweise, sowie Anlaß- und Regulierwiderstände gegeben. Nun wird das Kreisdiagramm des Dreiphasenmotors genauer entwickelt, und parallel dazu werden die charakteristischen Größen nach der symbolischen Methode (komplex-imaginäre Zahlen als Vektoren aufgefaßt) berechnet. Die Beschreibung der asynchronen Einphasenmotoren, der Repulsions- und Wechselstromserienmotoren schließt das Kapitel über die asynchronen Wechselstrommotoren.

Die Arbeitsweise der Synchronmotoren bei Über- und Untererregung und bei Parallelschaltung wird graphisch dargestellt. Nun folgen spezielle Apparate und Schaltungen wie drehbare Transformatoren zur Spannungserhöhung, Wechselstrom-Gleichstromumformer mit gemeinsamer Wicklung, die Scottsche Schaltung aus Zweiphasen- in Dreiphasenstrom, Frequenzumformer, und die Schaltungen und Wicklungen von Heyland zur Kompensation der Phasenverschiebung und des Spannungsabfalls.

Des weiteren werden die allgemeinen Kriterien klargelegt, welche Spannung und Frequenz, ob Gleich- oder Wechselstrom im einzelnen Fall zu wählen ist. Hohe Spannungen machen eine Fernleitung von Elektrizität erst möglich durch Ersparnis an Leitungskupfer. Bei Gleichstrom bietet nur die Serienschaltung von Thury in einzelnen Fällen eine Lösung. Ein typisches Beispiel für eine Hochspannungswechselstromzentrale sind die Niagarawerke. Wenn die Transportkosten von Elektrizität und Kohle gleich werden, ist der wirtschaftliche Wirkungsradius eines Elektrizitätswerkes im allgemeinen erreicht. Nun folgen spezielle Winke für elektrische Kraftanlagen in Fabriken und deren Prüfung. Sparschaltungen mit weitgehender Tourenregulierung, wie sie bei der Förderung aus Bergwerken verlangt wird, sind bei Gleichstrom durch Spannungsregulierung auf verschiedene Weise möglich. Bei Wechselstromfernleitungen bietet bis jetzt nur die Umwandlung in Gleichstrom nach Patent Ilgen eine praktische Lösung. Der Hochspannungsasynchronmotor, der die Gleichstrommaschine antreibt, ist mit einem Schwungrad gekuppelt, dessen lebendige Kraft, kombiniert mit einem erhöhten Schlupf des Asynchronmotors, eine gleichmäßige Beanspruchung der Zentrale trotz äußerst unregelmäßigen Kraftbedarfs seitens des Fördermotors ermöglicht.

Der Abschnitt VII über elektrische Bahnen beschreibt die gebräuchlichen Typen von Straßenbahnmotoren und ihren Einbau in das Wagengestell,

wendet sich dann zur Einrichtung und Schaltung der Kontroller und gibt ein typisches Schema für die Stromführung vom Leitungsdraht bis zur Schiene mit allen Nebenapparaten; die Tourenregulierung durch Serienparallelschaltung der Motoren und durch Widerstände wird dabei erläutert. Dann folgen die konstruktiven Details des Oberleitungs- und verschiedener unterirdischer Stromzuführungssysteme mit geschlitzten Kanälen. Auch der reine Akkumulatorenbetrieb wird beurteilt. Elektrischer Fernbahnbetrieb bietet sichere Ersparnisse nur bei Vorhandensein von Wasserkräften und Verwendung von Wechselstrom. Die Versuche einzelner Firmen mit einphasigen Wechselstromserienmotoren und speziell deutscher Firmen mit Drehstrommotoren werden eingehend beschrieben. Besondere konstruktive Maßnahmen erfordert der elektrische Betrieb von Grubenbahnen in Bergwerken.

Den Schluß des Werkes bildet der Abschnitt VIII über Elektrochemie und -metallurgie, der die elektrolytischen Prozesse, die Wirkung des Flammbogens im elektrischen Ofen, die Gewinnung von Aluminium und anderen Metallen auf elektrischem Wege zum Gegenstand hat. Die Galvanoplastik, die elektrische Schweißung, die elektromagnetische Aufbereitung von Erzen finden hier ihren Ort. Die Beschreibung der elektrolytischen Herstellung verschiedener chemischer Stoffe, wie Chlor, Sauerstoff, Wasserstoff, Ozon, Kalziumkarbit, beendet diesen letzten Abschnitt des vielseitigen und doch einfach und anziehend geschriebenen Werkes.

München. HANS LINSENMANN.

Maurice d' Ocagne. Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques. Histoire et description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abaques et nomogrammes. 2e édition, entièrement refondue et considérablement augmentée. Paris 1905, Gauthier-Villars. VIII + 228 S. gr. 8⁰.

Der durch seine nomographischen Arbeiten rühmlichst bekannte Verfasser gibt in dem vorliegenden, sehr lesenswerten Buche eine gedrängte Übersicht über die mannigfaltigen Arten von Vorrichtungen, welche erdacht worden sind, um die Gedankenarbeit beim Rechnen zu erleichtern, zu vermindern oder ganz überflüssig zu machen.

Nach einem kurzen Blick auf die Leistungen der historisch bekannt gewordenen Rechentalente, die durch ihre meist unbewußt geübte Gabe, mit Zahlen zu operieren, ihre Zeitgenossen in Erstaunen versetzt haben, geht d'Ocagne zu den einfachsten Recheninstrumenten ohne besondern Mechanismus über. Hier schildert er die schon im Altertum bekannten und noch heute in Rußland, China und Japan üblichen Rechenbretter, die zum Addieren gebrauchten Rechenlineale, die Napierschen Rechenstöcke zum Multiplizieren mehrstelliger Multiplikanden mit einstelligen Multiplikatoren, sowie die auf demselben Prinzip beruhenden Apparate von Genaille und von Troncet.

Die beiden nächsten Abschnitte sind den eigentlichen Rechenmaschinen, gewidmet, die Hebel, Zahnräder oder sonstige Mechanismen benützen. Hier wird zunächst die älteste Rechenmaschine zum Addieren besprochen, die Pascal als 18jähriger Jüngling konstruiert hat; die Abänderungen und Verbesserungen an dieser Maschine sowie verwandte Apparate werden mehr oder

weniger eingehend, zum Teil nur der Vollständigkeit halber mit bloßer Namensnennung aufgeführt. Einen verhältnismäßig breiten Raum nimmt die Behandlung der Multiplikationsmaschinen ein, die Verf. in solche scheidet, welche die Multiplikation durch wiederholte Addition leisten, wie es die Maschinen Leibniz, Thomas, Maurel (der sog. Arithmaurel), Tschebyschef und Odhner tun, und in solche, welche die Multiplikation unmittelbar ausführen, wie z. B. die von dem 18jährigen Bollé erfundene Maschine.

Von denjenigen Maschinen, welche zur Berechnung von Tabellen aus Differenzenreihen höherer Ordnung dienen, werden recht eingehend die Maschinen von Scheutz, Vater und Sohn, und von Wiberg besprochen.

Die nächste Gruppe der behandelten Rechenmaschinen bilden die algebraischen Maschinen, deren Anwendung ihre Erfinder auch auf kompliziertere algebraische Operationen auszudehnen gesucht haben. So hat Babbage seiner Maschine die erstaunlich weitgehende Aufgabe zugewiesen, aus beliebig vielen gegebenen Zahlen nach beliebig vorgeschriebenen Gesetzen neue Zahlen automatisch zu bilden und sofort aufzudrucken. Leider ist diese wie ein Wunder anmutende Maschine nur theoretisch sicher gestellt, die praktische Ausführung konnte wegen des Todes ihres Erfinders nicht vollendet werden. In ähnlicher Weise ist der Spanier Torrès bei seinen Arbeiten über algebraische Maschinen dazu gelangt, theoretisch allgemein und vollständig die Aufgabe zu lösen, wie man durch Maschinen beliebige algebraische und transzendente Beziehungen herstellen kann. Spezielle Maschinen zur Lösung von Gleichungen gibt es in ziemlicher Anzahl; sie werden ohne nähere Beschreibung von d'Ocagne bloß namentlich aufgezählt.

Im nächsten Kapitel gibt der Verfasser eine kurze Geschichte der Logarithmen, der logarithmischen Skala und der Anwendung dieser Teilung bei Stäben, Scheiben, Rädern und Walzen zum schnellen angenäherten Multiplizieren und Dividieren. Den Schluß dieses Abschnittes bildet eine interessante Schilderung einer von Torrès erfundenen auf der Logarithmenrechnung beruhenden Maschine zum Lösen algebraischer Gleichungen.

Nach einem Hinweise darauf, daß auch alle Tabellen, wie z. B. die Einmaleinstafeln, die Proportionalteile der Logarithmentafeln zu denjenigen Vorrichtungen gehören, die das Rechnen erleichtern, wendet sich der Verfasser seinem eigenen Arbeitsgebiete, den graphischen Rechenmethoden zu. Er sucht hier zunächst einen scharfen Unterschied zwischen dem zeichnenden Verfahren und der Nomographie festzustellen, indem er in Übereinstimmung mit seinen zahlreichen nomographischen Arbeiten es als Aufgabe der Nomographie ansieht, gesuchte Zahlen aus fertigen mit Zahlen versehenen Zeichnungen zu finden, die nötigenfalls übereinandergelagert und gegeneinander verschoben werden müssen, während bei der zeichnenden Methode die Anwendung von Zeichenmaterialien, von Zirkel und Meßinstrumenten das Charakteristische ist. Indessen sind merkwürdiger Weise gerade die 3 Beispiele, die er als Erläuterung der zeichnenden Methode des Rechnens gibt, in hervorragendem Maße geeignet, zu zeigen, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen Nomographie und zeichnendem Verfahren nicht vorhanden ist, weil sich die dort vorzunehmenden Operationen mit Lineal und Zirkel einfach durch eine Schar paralleler Geraden und eine Schar konzentrischer Kreise auf besonderen durchsichtigen Blättern ersetzen lassen. d'Ocagne muß selbst zugeben, daß die Trennung der beiden Methoden nicht immer mit Strenge durchzuführen

ist, daß vielmehr die Grenze zwischen ihnen flüssig ist. Die von d'Ocagne vorgeschlagene Einteilung der graphischen Methoden scheint mir daher nicht nötig; ja ich halte es gar nicht einmal für wünschenswert, eine künstliche Scheidewand zu schaffen. Denn die ganze Frage der graphischen Darstellung einer Abhängigkeit von Zahlen läßt sich unter einem einheitlichen Gesichtspunkte ohne eine Beschränkung hinsichtlich der dabei befolgten Methode behandeln, wie ich in einem Vortrag vor der Berliner mathematischen Gesellschaft (Sitzungsberichte 1903, S. 26) nachgewiesen zu haben glaube.

Im weiteren Verlauf der Erörterung gibt Verf. einen kurzen Abriß der Geschichte der Nomographie und zeigt in Wiederholung der Ausführungen in seinen Hauptwerken, dem Traité de Nomographie und dem Essai synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie, wie sich allgemein der Zusammenhang zwischen 3 Variablen durch 3 bezifferte Kurvenscharen darstellen läßt, wie man nach dem von Lalanne angegebenen Verfahren der Anamorphose oft krummlinige Scharen in geradlinige umwandeln kann; wie nach Lallemand Scharen paralleler Geraden einfacher und übersichtlicher durch 3 bezifferte Kurven und ein System von 3 festen Geraden auf besonderm Blatte aus durchsichtigem Stoffe ersetzt werden; wie gewisse Vereinfachungen und Verallgemeinerungen eintreten, wenn man die bezifferten Kurven sowohl wie die festen Geraden unter Winkeln von 60° gegeneinander neigt, wie es bei den sogenannten „sechseckigen Nomogrammen“ der Fall ist.

Etwas länger verweilt d'Ocagne bei den von ihm zuerst eingeführten Rechenblättern mit fluchtrechten Punkten (nomogrammes à points alignés), auf die man geführt wird, wenn man ein Rechenblatt mit 3 Scharen gerader Linien dadurch polarisiert, daß man ihm einen beliebigen Kegelschnitt zuordnet und dann zu jeder Geraden den Pol und zu jedem Punkte die Polare konstruiert. Eine dieser zahllosen möglichen Polarisationen findet d'Ocagne durch Umdeutung der Kartesischen Koordinaten in Parallelkoordinaten.

Den Schluß dieses Teiles bildet eine Erörterung darüber, wie man Rechenblätter mit mehr als 3 Variablen darstellen kann, und ein Hinweis auf eine Veröffentlichung des Verfassers, in der er zeigt, wie alle denkbaren Nomogramme sich nach der Zahl der in ihnen enthaltenen, nicht bezifferten Elemente auf 20 „kanonische Typen“ reduzieren lassen.

Dem ganzen Werke sind als Anhänge beigegeben 2 Noten über die Theorie der Rechenmaschinen von Tschebyschef und von Scheutz.

Bei der Fülle des in dem Calcul simplifié behandelten Stoffes konnten naturgemäß nicht alle Erscheinungen gleichmäßig ausführlich behandelt werden, sondern es ließ sich nur Einzelnes besonders herausheben, wogegen anderes, vielleicht nicht weniger Wichtiges, bloß leicht gestreift werden konnte. Es ist daher erfreulich, daß diejenigen Leser, welche durch das Werk angeregt sind, sich über die eine oder die andere Frage näher zu informieren, einen reichen Literaturnachweis finden.

Ferner ist es dankenswert, daß dem Buche schöne übersichtliche Zeichnungen beigegeben sind. Denn bei der knappen Darstellung namentlich der Rechenmaschinen ist es besonders für den nicht technisch gebildeten Leser sehr schwer, sich ohne gute Figuren ein, wenn auch nur ungefähres, Bild der Maschinen und ihrer Wirkungsweise zu machen.

Was den absichtlichen Verzicht auf das Arbeiten mit mathematischen Begriffen anlangt, so ist es ja d'Ocagne meistens gelungen, ohne Mathematik

auszukommen, und nur an wenigen Stellen muß er bemerken, daß sich diese oder jene Behauptung nur durch mathematische Rechnung bewahrheiten lasse. Ob aber diese freiwillige Verzichtleistung auf die bequemere und dabei genauere mathematische Betrachtung ratsam ist, erscheint mir zweifelhaft. Es läßt sich jawohl annehmen, daß jeder Leser dieses dem Wesen nach mathematischen Buches die Mathematik doch soweit beherrscht, daß er mit den elementaren Operationen, die notwendig werden, ausreichend vertraut ist.

Berlin. H. Fürle.

E. Jahnke, Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Leipzig, B. G. Teubner, 1905.

Die Vektorenrechnung ist infolge ihrer wachsenden Bedeutung für die mathematische Physik in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren (Jahnke, S. VI) in besonderen Büchern behandelt worden, die in erster Linie das Ziel verfolgen, in die physikalischen Anwendungen der Streckentheorie einzuführen. Das vorliegende Werk von Jahnke faßt den Begriff der *Vektorenrechnung* in *weiterem* Sinne, indem es ihn sowohl mit dem baryzentrischen Kalkül von Möbius als mit den Methoden der Ausdehnungslehre von Graßmann in organische Verbindung setzt und auch die *Geometrie* in weitem Umfange in den Anwendungsbereich der Streckenrechnung hineinzieht. *Historische Überblicke* über die Beziehung der grundlegenden Arbeiten zueinander finden sich am Ende einzelner Kapitel des Buches angefügt. Zur willkommenen Erleichterung für den Leser wird der Gegenstand im 1. Abschnitt gesondert für die *Ebene* behandelt, während der 2. Abschnitt dem *Raum* gewidmet ist. In beiden Abschnitten wird die vorgetragene Theorie nach den verschiedensten Richtungen hin auf *Geometrie, Mechanik* und *Physik* angewendet, teils in ausgeführten Beispielen, teils in Andeutungen und Aufgaben. Überall wird dem Leser eine reiche Fülle von Anregung geboten. Im einzelnen gibt das ausführliche Inhaltsverzeichnis über die behandelten Gegenstände einen eingehenden Überblick. Es mag daher hier nur auf *einige* der hauptsächlichsten Begriffe der Streckenlehre und ihre Stellung zur analytischen Geometrie hingewiesen werden, um das Buch, wie überhaupt, so besonders auch solchen Studierenden aufs wärmste zu empfehlen, die sich zuerst mit der analytischen Geometrie vertraut gemacht haben.[1])

1. Die Elemente der Theorie und ihre Bezeichnung. Die Elemente der Vektortheorie sind in der Ebene und im Raume *Punkte* und *Strecken* (Vektoren). Punkte werden mit $A, B, P, \ldots$ bezeichnet (S. 1; 2; 24; 89). Strecken sind entweder *freie Strecken* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}, \ldots$, die eine bestimmte Länge und Richtung haben, aber parallel mit sich beliebig verschoben werden können (S. 11; 94) oder *gebundene Strecken* (Stäbe) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}, \ldots$, die nur innerhalb einer bestimmten geraden Linie verschoben werden können (S. 21; 112). Im Raume tritt hierzu noch die *Ebenengröße* (Blatt, Bivektor), eine Parallelogramm- oder Dreiecksfläche, die bei gleichbleibendem Inhalt entweder parallel mit sich im Raume (*freie* Ebenengröße, S. 97) oder in einer bestimmten Ebene (*gebundene* Ebenengröße) verschoben werden kann

1) An Druckfehlern ist zu verbessen: S. 5, Z. 9 v. u. „auf einen Massenpunkt“ statt „auf den Schwerpunkt eines Massenpunktes“; S. 84, Z. 4 v. o. E_1 statt E_2.

(S. 113). In der Ebene ist der *Dreiecksinhalt* (S. 37), im Raume der *Tetraederinhalt* (S. 114) eine positive oder negative *Zahlengröße* (Skalar, S. 26).[1])

2. Streckenrechnung. Auf diese Elemente werden die in geeigneter Weise definierten Rechenoperationen der Addition und Subtraktion, der Multiplikation, endlich auch der Differentiation und Integration angewendet. Dabei gilt als Grundsatz, *mit den Elementen selbst zu rechnen*, ohne sie erst durch Koordinaten darzustellen. Indessen werden auch die rechtwinkligen kartesischen Koordinatensysteme (S. 37; 95; 123; 203) und die baryzentrischen Koordinaten von Möbius mehrfach angewendet (S. 9; 93; 25; 119; 123).

3. Addition von Punkten. Punkte werden nicht schlechthin addiert, sondern nur insofern ihnen ein bestimmter positiver oder negativer Masseninhalt zuerteilt worden ist. Als Summe zweier mit den Massen x_1 und x_2 behafteter Punkte E_1, E_2 soll ihr mit der Masse $x_1 + x_2$ belasteter Schwerpunkt P gelten (S. 1). Diese Addition wird in der geraden Linie durch die Gleichung:

$$(x_1 + x_2)P = x_1 E_1 + x_2 E_2 \tag{1}$$

ausgedrückt (S. 2). In demselben Sinne bedeutet die Gleichung:

$$(x_1 + x_2 + x_3)P = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 \tag{2}$$

in der Ebene, daß der Punkt P der Schwerpunkt der Punkte E_1, E_2, E_3 ist (S. 3, von 6) an; S. 5; 9). Entsprechendes gilt im Raume von der Gleichung (S. 93):

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)P = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3 + x_4 E_4. \tag{3}$$

4. Kartesische und baryzentrische Koordinaten. Die Koeffizienten x_1, x_2, x_3 in (2) sind die baryzentrischen Koordinaten des Punktes P inbezug auf das Dreieck $E_1 E_2 E_3$ (S. 9). Diese sind, wie die kartesischen Koordinaten x, y ein besonderer Fall der *allgemeinen* Dreieckskoordinaten. Die letzteren gehen in die kartesischen über, wenn eine *Seite*, und in die baryzentrischen, wenn die *Einheitslinie* des Koordinatendreiecks unendlich fern wird. Die Beziehungen zwischen x_1, x_2, x_3 einerseits und x, y andererseits lauten, wenn a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten der Ecken E_1, E_2, E_3 des baryzentrischen Koordinatendreiecks sind (Staude, Analyt. Geom. 1905 („A."), § 28, (4); (1)):

$$(4)\begin{cases} x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \\ y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \\ 1 = \quad x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 \end{cases} \qquad (5)\begin{cases} D x_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 \\ D x_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 \\ D x_3 = A_3 x + B_3 y + C_3, \end{cases}$$

wo A_1, B_1, ... die Unterdeterminanten der Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

1) Vgl. die weitergehenden Begriffsbildungen bei Study, Geometrie der Dynamen.

bedeuten. Nach (5) verhalten sich x_1, x_2, x_3 wie die Dreiecksflächen (A. § 15, (6)):

$$x_1 : x_2 : x_3 = PE_2E_3 : PE_3E_1 : PE_1E_2 \tag{7}$$

(S. 28). Entsprechend ist im Raume (S. 118):

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = PE_2E_3E_4 : PE_3E_1E_4 : PE_1E_2E_4 : PE_3E_2E_1.$$

5. **Beziehung der Punktaddition zur Methode der abgekürzten Bezeichnung.** Da in der Gleichung (2) P, E_1, E_2, E_3 Punkte und x_1, x_2, x_3 Zahlen bedeuten, handelt es sich nicht um Gleichheit im gewöhnlichen Sinne (S. 2, Anm.). Möbius selbst (Werke 1, S. 51) nennt die rechte Seite von (2) den *Ausdruck* des Punktes P. Versteht man jedoch unter:

$$P = xu + yv + 1, \quad E_i = a_iu + b_iv + 1 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

die linken Seiten der Hesseschen Normalform der Gleichungen der Punkte P, E_i in laufenden gemeinen Linienkoordinaten u, v (A. § 19, (16)), so folgt aus (4) durch Multiplikation mit u, v, 1 und Addition, unter gleichzeitiger Hinzufügung des Faktors $1 = x_1 + x_2 + x_3$ auf der linken Seite:

$$(x_1 + x_2 + x_3)P = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3. \tag{9}$$

Diese mit (2) gleichlautende Gleichung ist jetzt eine in u, v identische Gleichung (A. § 24, (14)). Da überdies nach (8) $P_i : -\sqrt{u^2 + v^2}$ der Abstand des Punktes x, y von der Geraden u, v ist (A. § 19, (17)), so sagt die Gleichung (9) aus (Möbius 1, S. 31; 37): Das lineare Moment des Schwerpunktes P ist *inbezug auf jede beliebige Gerade* u, v gleich der Summe der linearen Momente der Punkte E_i. In demselben Sinne kann die Gleichung (3) als eine in gemeinen Ebenenkoordinaten u, v, w identische Gleichung gelten.

In dieser Auffassung stimmt das Verfahren der Addition von Punkten formell überein mit der Methode der abgekürzten Bezeichnung. So bedeutet (A. § 20, (6)), mit:

$$(x_2 + x_3)P_1 = x_2E_2 + x_3E_3, \tag{10}$$

$P_1 = 0$ die Normalform der Gleichung des Punktes P_1, der die Strecke E_2E_3 im Verhältnis $-x_3 : x_2$ teilt (S. 1; 2); ferner mit:

$$(x_1 + x_2 + x_3)P = x_1E_1 + (x_2 + x_3)P_1, \tag{11}$$

$P = 0$ die Normalform der Gleichung des Punktes P, der die Strecke E_1P_1 im Verhältnis $-(x_2 + x_3) : x_1$ teilt (S. 9; 17), so daß der Punkt P auf drei Weisen konstruiert werden kann (S. 17; Fig. 10). Ebenso sind (S. 4), wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ die Gleichungen von vier Punkten in der Normalform sind, (A. § 20, (7)):

$$\frac{B+C}{2} = 0, \ \frac{A+D}{2} = 0; \ \frac{C+A}{2} = 0, \ \frac{B+D}{2} = 0; \ \frac{A+B}{2} = 0, \ \frac{C+D}{2} = 0 \tag{12}$$

die Mittelpunkte der sechs Seiten des Vierecks $ABCD$ in der Normalform und:

$$\frac{A+B+C+D}{4} = 0 \tag{13}$$

ebenso die Gleichung des Punktes, der die Verbindungslinie je zweier gegenüberliegender Seiten halbiert. Wegen der Invarianz des Ausdruckes (8) (A. § 28, (5)) sind diese Punktverbindungen von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, weshalb die Vektortheorie die Symbole P, E, A, ... von *vorn herein als die Punkte selbst* auffaßt (S. 2). Dasselbe gilt von den Entwicklungen im Raume (S. 89 ff.).

6. Differenz zweier Punkte und freie Strecke. Die Differenz zweier Punkte A und A' leitet zum Begriff der freien Strecke:

$$a = AA' = A' - A \tag{14}$$

über (S. 11). Bei Möbius (Werke 1, S. 62) bedeutet der Ausdruck $A' - A$ den unendlich fernen Punkt der Verbindungslinie AA' (S. 18).

Auch wenn, wie in (8):

$$A = au + bv + 1, \quad A' = a'u + b'v + 1 \tag{15}$$

gesetzt wird, kann:

$$A' - A = (a' - a)u + (b' - b)v = 0 \tag{16}$$

als *Normalform der Gleichung* des unendlich fernen Punktes der Geraden AA' (A. § 22, (10)) oder *der freien Strecke* AA' in laufenden Linienkoordinaten u, v gelten. Denn die Koeffizienten $a' - a$, $b' - b$ sind die Koordinaten der freien Strecke (A. § 12, (4)), wie in $A = 0$ die Koeffizienten a, b die Koordinaten des Punktes. Die Gleichung:

$$B - A = C - D \tag{17}$$

bedeutet (S. 11) die Gleichheit der Koordinaten der Strecken AB und DC und die Folgerungen:

$$B - C = A - D, \quad B + D = A + C \tag{18}$$

enthalten Eigenschaften des Parallelogramms (S. 12). Wieder liest die Vektortheorie die Symbole A, B, C, D in (17) und (18) *gleich als die Punkte selbst.*

Das Entsprechende gilt im Raume (S. 94), wo $A' - A$ ebenfalls die freie Strecke AA' bedeutet, deren Koordinaten (A. § 34, (4)) die Koeffizienten der Gleichung:

$$A' - A = (a' - a)u + (b' - b)v + (c' - c)w = 0 \tag{19}$$

in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w sind.

7. Addition freier Strecken. Die Addition freier Strecken entspricht der Regel vom Parallelogramm. Die Gleichung (S. 19):

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3 = 0 \tag{20}$$

bedeutet, daß die drei freien Strecken $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ sich zu einem geschlossenen Dreieck zusammensetzen lassen. Für die Bedeutung (16), abgekürzt:

$$\mathfrak{a}_1 = A_1 u + B_1 v, \quad \mathfrak{a}_2 = A_2 u + B_2 v, \quad \mathfrak{a}_3 = A_3 u + B_3 v, \tag{21}$$

besagt alsdann die eine in u, v identische Gleichung (20) das Verschwinden der beiden Summen der gleichnamigen Koordinaten (A. § 12, (15)):

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0, \quad B_1 + B_2 + B_3 = 0. \tag{22}$$

Zwischen irgend *drei* freien Strecken besteht eine Identität (S. 19):

$$\alpha_1 \mathfrak{a}_1 + \alpha_2 \mathfrak{a}_2 + \alpha_3 \mathfrak{a}_3 = 0. \tag{23}$$

Die Koeffizienten bestimmen sich (S. 47) mit Rücksicht auf (21):

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = [a_2 a_3] : [a_3 a_1] : [a_1 a_2], \tag{24}$$

wo $[a_2 a_3] = A_2 B_3 - B_2 A_3$, $[a_3 a_1]$, $[a_1 a_2]$ die doppelten Flächen der drei Dreiecke zwischen den nach einem gemeinsamen Anfangspunkt verlegten Strecken sind (A. § 15, (5)).

Ein besonderer Fall von (23) ist die Darstellung der freien Strecke durch die Einheitsstrecken $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, deren Richtungen mit den Achsen des kartesischen Koordinatensystems übereinstimmen (S. 19):

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2. \tag{25}$$

Auch ein beliebiger Punkt $A = x, y$ kann durch einen festen Punkt $E = x_0, y_0$ und eine Strecke $\mathfrak{a}$ dargestellt werden (S. 20):

$$A = E + a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2, \tag{26}$$

entsprechend der Identität (vgl. (8) und (16)):

$$xu + yv + 1 = (x_0 u + y_0 v + 1) + ((x - x_0)u + (y - y_0)v). \tag{27}$$

Im Raume besteht zwischen irgend *vier* freien Strecken eine Identität (S. 95; 102):

$$\alpha_1 \mathfrak{a}_1 + \alpha_2 \mathfrak{a}_2 + \alpha_3 \mathfrak{a}_3 + \alpha_4 \mathfrak{a}_4 = 0. \tag{28}$$

Auch hier kann, wie in (19):

$$\mathfrak{a}_i = A_i u + B_i v + C_i w \tag{29}$$

gedacht werden. Die Koeffizienten α_1, α_2, α_3, α_4 verhalten sich wie die Rauminhalte der vier Tetraeder, die je drei der nach einem gemeinsamen Anfangspunkt verlegten Strecken (die äußeren Produkte, S. 103) bestimmen (A. § 39, (6)).

8. Die gebundene Strecke. Unter dem *äußeren Produkt* $\mathfrak{p} = [P_1 P_2]$ *zweier Punkte* P_1 und P_2 wird die an die Gerade $P_1 P_2$ gebundene Strecke (Stab) $P_1 P_2$ verstanden (S. 21). Sie ist durch drei gemeine Koordinaten u, v, s bestimmt, die Koeffizienten der Gleichung:

$$\mathfrak{p} = ux + vy + s = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{30}$$

der Geraden, an die die Strecke gebunden ist. Denn $v = x_2 - x_1$, $-u = y_2 - y_1$ sind die Koordinaten der freien Strecke, während $s = x_1 y_2 - y_1 x_2$ der doppelte Flächeninhalt OP_1P_2 ist (A. § 17, (2)), der für die gebundene Strecke bei ihrer Verschiebung längs der Geraden unveränderlich bleibt.

Zwischen gemeinen u, v, s und baryzentrischen (S. 25) Koordinaten u_1, u_2, u_3 der gebundenen Strecke bestehen die Beziehungen (A. § 28, (6); (10)):

$$(31)\left\{\begin{aligned} u_1 &= a_1 u + b_1 v + s \\ u_2 &= a_2 u + b_2 v + s \\ u_3 &= a_3 u + b_3 v + s \end{aligned}\right. \qquad (32)\left\{\begin{aligned} Du &= A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 \\ Dv &= B_1 u_1 + B_2 u_2 + B_3 u_3 \\ Ds &= C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3, \end{aligned}\right.$$

die mit (4) und (5) der Bedingung:

$$(33) \qquad ux + vy + s = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

entsprechen. Hier sind A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 die Koordinaten der gebundenen Strecken $\mathfrak{e}_{23} = [E_2 E_3]$, $\mathfrak{e}_{31} = [E_3 E_1]$, $\mathfrak{e}_{12} = [E_1 E_2]$ des Koordinatendreiecks (vgl. (5); (30)).

Wie in (2) jeder Punkt P durch die drei Ecken E_1, E_2, E_3, so wird (S. 25) in:

$$(34) \qquad [P_1 P_2] = [E_2 E_3] u_1 + [E_3 E_1] u_2 + [E_1 E_2] u_3$$

jede gebundene Strecke durch die drei Strecken $\mathfrak{e}_{23}$, $\mathfrak{e}_{31}$, $\mathfrak{e}_{12}$ dargestellt. Auch diese Darstellung kann, wie (9), als eigentliche Gleichung aufgefaßt werden. Denn setzt man neben (30):

$$(35) \qquad \mathfrak{e}_i = A_i x + B_i y + C_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

so folgt aus (32) durch Multiplikation mit x, y, 1 und Addition:

$$(36) \qquad D\mathfrak{p} = \mathfrak{e}_1 u_1 + \mathfrak{e}_2 u_2 + \mathfrak{e}_3 u_3.$$

Die baryzentrischen Koordinaten u_1, u_2, u_3 der gebundenen Strecke $\mathfrak{p}$ sind daher die Zahlen (Tensoren), mit denen die drei Strecken $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ multipliziert werden müssen, damit *inbezug auf einen beliebigen Punkt* x, y die Summe ihrer Drehungsmomente gleich dem Drehungsmoment der Strecke $\mathfrak{p}$ ist; denn $\mathfrak{p}$ in (30) bedeutet das Drehungsmoment der Strecke u, v, s inbezug auf x, y.

Die Addition der gebundenen Strecken geschieht durch Addition der gleichnamigen Komponenten in den Seiten des Koordinatendreiecks (S. 24; 146).

Im *Raume* hat die *gebundene* Strecke $[P_1 P_2]$ sechs gemeine Koordinaten (Plücker, Neue Geom. S. 29):

$$(37) \qquad \begin{aligned} l_{23} &= y_1 z_2 - y_2 z_1, & l_{31} &= z_1 x_2 - z_2 x_1, & l_{12} &= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ l_{14} &= x_1 - x_2, & l_{24} &= y_1 - y_2, & l_{34} &= z_1 - z_2, \end{aligned}$$

von denen $-l_{14}$, $-l_{24}$, $-l_{34}$ die Koordinaten der *freien* Strecke $P_1 P_2$ sind, und sechs baryzentrische Koordinaten: $p_{mn} = x_m^{(1)} x_n^{(2)} - x_m^{(2)} x_n^{(1)}$ (S. 119). Der Gleichung (36) entspricht die Gleichung (S. 119):

$$(38) \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{e}_{23} p_{23} + \mathfrak{e}_{31} p_{31} + \mathfrak{e}_{12} p_{12} + \mathfrak{e}_{14} p_{14} + \mathfrak{e}_{24} p_{24} + \mathfrak{e}_{34} p_{34},$$

die eine beliebige gebundene Strecke $\mathfrak{p}$ durch die sechs gebundenen Strecken $\mathfrak{e}_{mn}$, die Kanten des baryzentrischen Koordinatentetraeders darstellt. Auch (38) kann als eine identische Gleichung in laufenden Linienkoordinaten l_{mn} gelten (A. § 60, (8)) und folgt, wie (36) aus (32), aus den Transformationsformeln für Linienkoordinaten (A. § 63, (27)).

9. Die gebundene Ebenengröße. Das *äußere Produkt* $[P_1 P_2 P_3]$ *dreier Punkte* P_1, P_2, P_3 wird als gebundene Ebenengröße erklärt (S. 113). Sind x_i, y_i, z_i die gemeinen Koordinaten der Punkte P_i, so ist die gebundene Ebenengröße durch ihre vier gemeinen Koordinaten u, v, w, s, die Koeffizienten der Gleichung:

$$(39) \qquad \Pi = ux + vy + wz + s = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Die drei ersten u, v, w sind die Koordinaten der *freien* Dreiecksfläche (A. § 36, (6)), die vierte $s = 6 \cdot OP_1P_2P_3$ charakterisiert die *gebundene* Dreiecksfläche (A. § 41, (2)). Aus den Gleichungen zwischen gemeinen und baryzentrischen Koordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 der gebundenen Ebenengröße (vgl. (32)) folgt entsprechend (36) identisch in x, y, z (S. 123):

$$D \cdot \Pi = \mathsf{E}_1 \cdot u_1 + \mathsf{E}_2 \cdot u_2 + \mathsf{E}_3 \cdot u_3 + \mathsf{E}_4 \cdot u_4, \tag{40}$$

wo:

$$\mathsf{E}_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i \tag{41}$$

und A_i, B_i, C_i, D_i die gemeinen Koordinaten der gebundenen Seitenebenen des Koordinatentetraeders sind.

10. Produktbildungen und Determinanten. Das *äußere Produkt* von *zwei Punkten* P_1, P_2 in der *Ebene* oder im *Raume* war eine gebundene Strecke (30) und (37) (S. 21; S. 112). Das Produkt *eines Punktes* P_1 *und einer freien Strecke* P_1P_2 (S. 22), deren Anfangspunkt immer nach P_1 verlegt werden kann, ist ebenfalls eine gebundene Strecke:

$$[P_1\, P_2 - P_1] = [P_1 P_2], \tag{42}$$

entsprechend dem Determinantensatz (vgl. (30)):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}. \tag{43}$$

Das Produkt von *zwei freien Strecken* P_1P_2 und P_1P_3 oder von *drei Punkten* P_1, P_2, P_3 in der *Ebene* (S. 37; 26) ist eine Zahlengröße, der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$, die Determinante der Koordinaten der beiden Strecken oder der drei Punkte:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{44}$$

Das Produkt von *zwei freien Strecken* P_1P_2 und P_1P_3 im *Raume* ist eine freie Ebenengröße (S. 97), deren Koordinaten u, v, w (A. § 36, (6)) die Unterdeterminanten der Matrix der Koordinaten der beiden Strecken sind:

$$\begin{Vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{Vmatrix}. \tag{45}$$

Das Produkt aus *drei Punkten* P_1, P_2, P_3 oder aus einem Punkte P_1 und einer gebundenen Strecke $[P_2P_3]$ im *Raume* (S. 113) ist die gebundene Ebenengröße (39).

Das Produkt aus *drei freien Strecken* P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 (S. 103) oder aus *vier Punkten im Raume* (S. 114) ist eine Zahlgröße, der sechsfache Rauminhalt des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$:

$$-\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{46}$$

Regressive Produkte sind: das Produkt von zwei gebundenen Strecken, ihr Schnittpunkt (S. 76), von zwei Ebenengrößen, ihre Schnittlinie, von drei Ebenengrößen, ihr Schnittpunkt (S. 159). Sind die Elemente der zweiten der beiden Determinanten:

$$(47)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta' = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & s_1 \\ u_2 & v_2 & s_2 \\ u_3 & v_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

die Unterdeterminanten der ersten, so entspricht die regressive Produktbildung der Rückkehr von Δ' zu Δ mittels der Formeln (S. 76):

$$(48)\qquad \begin{vmatrix} v_2 & s_2 \\ v_3 & s_3 \end{vmatrix} = \Delta x_1, \ldots; \quad \Delta' = \Delta^2.$$

11. Das Nullsystem. Die außerordentliche Leichtigkeit, mit der die Streckenrechnung arbeitet, mag nur an einem zufällig herausgegriffenen Beispiel (S. 176) gezeigt werden.

Die Gleichwertigkeit zweier an einem starren Körper angreifenden Kraftkreuze AB, CD und $A'B'$, $C'D'$ wird durch die Gleichung:

$$(49)\qquad [AB] + [CD] = [A'B'] + [C'D']$$

zwischen den gebundenen Strecken (37) ausgedrückt. Nimmt man $A' = A$ und multipliziert äußerlich mit dem Punkte A, so wird (vgl. (39)): $[AAB] = 0$, $[AA'B'] = 0$, und folgt die Gleichheit der gebundenen Ebenengrößen:

$$(50)\qquad [ACD] = [AC'D'].$$

Die Kraftstrecken $[CD]$ und $[C'D']$ liegen daher in einer durch A gehenden Ebene, und die Dreiecke ACD und $AC'D'$ sind inhaltsgleich.

In ähnlicher Weise wird der duale Satz und die übrigen Eigenschaften des Nullsystems abgeleitet (S. 177 ff.).

Rostock. O. Staude.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

175. Die lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$x^2(x-1)y''' + x\left(\frac{15}{4}x - \frac{9}{4}\right)y'' + \left(\frac{201}{112}x - \frac{3}{8}\right)y' - \frac{57}{21952}y = 0$$

ist zu integrieren, wenn man weiß, daß zwischen den drei Fundamentalintegralen y_1, y_2, y_3 die Gleichung

$$5y_1^2y_2^2y_3^2 - y_1y_3^5 - y_2y_1^5 - y_3y_2^5 = 0$$

besteht.

Außig (Böhmen). A. Krug.

---

176. Wenn eine ebene algebraische reelle Kurve n-ter Ordnung einen reellen Doppelpunkt mit reellen oder konjugiert imaginären Tangenten hat und außerdem noch einen reellen $(n-2)$fachen Punkt B mit $(n-2)$ reellen getrennten Tangenten, kann man daraus allein noch nichts Bestimmtes über die Zahl der eventuellen übrigen Doppelpunkte der Kurve sagen. Wenn aber aus A keine reellen außerhalb A berührenden Tangenten gehen und aus B zwei reelle außerhalb B berührende — und mehrere als zwei solche sind jedenfalls unmöglich — dann wird die Kurve notwendigerweise noch so viele andere Doppelpunkte haben müssen, daß sie rational wird.

Welche Änderungen im Satze treten ein, wenn $2n$ der Tangenten in B konjugiert imaginär sind?

Es wird bemerkt, daß im obigen jede durch eine Spitze gehende Gerade als Tangente zu betrachten ist.

Kopenhagen. C. Juel.

---

177. Sind x, y, z rechtwinklige Koordinaten eines Raumpunktes, so stellen die Gleichungen

$$x = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$$
$$y = b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2$$
$$z = c_0\lambda^2 + c_1\lambda + c_2$$

bei nicht verschwindender Determinante (abc) stets eine Parabel dar und umgekehrt. Es sind die Elemente dieser Parabel (Lage ihrer Ebene, Lage von Achse, Brennpunkt und Direktrix, Wert des Parameters) zu berechnen.

Königsberg i. P. W. Fr. Meyer.

B. Lösungen.

Zu **160** (Bd. X, S. 329) (O. Meißner). — Die Wahrscheinlichkeit, mit p Würfeln im ersten Wurfe i_1 Einser zu werfen, ist:

$$\binom{p}{i_1}\left(\frac{1}{6}\right)^{i_1}\left(\frac{5}{6}\right)^{p-i_1}.$$

Mit den übrigen $p - i_1$ Würfeln sollen im zweiten Wurfe i_2 Einser geworfen werden, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist ebenso:

$$\binom{p-i_1}{i_2}\left(\frac{1}{6}\right)^{i_2}\left(\frac{5}{6}\right)^{p-i_1-i_2};$$

u. s. f. Im n-ten Wurfe endlich sollen mit $p - i_1 - i_2 - \cdots - i_{n-1}$ Würfeln i_n Einser geworfen werden, die Wahrscheinlichkeit dafür ist:

$$\binom{p-i_1-i_2-\cdots-i_{n-1}}{i_n}\left(\frac{1}{6}\right)^{i_n}\left(\frac{5}{6}\right)^{p-i_1-i_2-\cdots-i_n}.$$

Bildet man das Produkt aller dieser Größen, so hat man die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Einser genau in dieser Weise eintreffen. Die Wahrscheinlichkeit lautet

$$=\binom{p}{i_1}\binom{p-i_1}{i_2}\cdots\binom{p-i_1-i_2-\cdots-i_{n-1}}{i_n}\left(\frac{1}{6}\right)^{i_1+i_2+\cdots+i_n}\left(\frac{5}{6}\right)^{n(p-i_1)-(p-1)i_2-\cdots-2i_{n-1}-i_n}.$$

Nach dem n-ten Wurfe sollen noch q Würfel übrig sein, welche nicht eine 1 zeigen. Dann ist

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = p - q. \tag{1*}$$

Wenn man in W den Größen $i_1, i_2, \cdots, i_n$ alle möglichen, die Gleichung (1*) erfüllenden, ganzen, nicht negativen Werte beilegt und über diese Werte summiert, so erhält man nach einiger Reduktion die Wahrscheinlichkeit:

$$w_{n,q} = \frac{p!}{5^{p-q}\cdot q!}\sum\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{nq+i_1+2i_2+\cdots+ni_n}}{i_1!\,i_2!\cdots i_n!},$$

daß nach n Würfen noch q Würfel übrig sind, die nicht 1 zeigen. Nach dem polynomischen Lehrsatze kann man dafür schreiben:

$$w_{n,q} = \frac{p!}{5^{p-q}(p-q)!\,q!}\left(\frac{5}{6}\right)^{nq}\left[\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^{p-q}$$

$$= \frac{p!}{(p-q)!\,q!}\left(\frac{5}{6}\right)^{nq}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^{p-q},$$

demnach

$$w_{n,q} = \binom{p}{q}\left(\frac{5}{6}\right)^{nq}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^{p-q}. \tag{1}$$

Dies ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach n Würfen noch q Würfel übrig sind, die nicht 1 zeigen.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, daß nach genau n Würfen (und nicht früher) noch q Würfel übrig sind, die keine 1 zeigen, mit $W_{n,q}$, so zeigt eine einfache Überlegung, daß

$$w_{n,q} = \left(\frac{5}{6}\right)^q w_{n-1,q} + W_{n,q},$$

und daraus folgt

$$W_{n,q} = \binom{p}{q}\left(\frac{5}{6}\right)^{nq}\left\{\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^{p-q} - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]^{p-q}\right\}. \tag{2}$$

Setzt man $q = 0$, so erhält man aus (1) für die Wahrscheinlichkeit w_n, daß das Spiel nach (höchstens) n Würfen zu Ende ist:

$$(1') \qquad w_n = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^p,$$

und aus (2) für die Wahrscheinlichkeit W_n, daß das Spiel genau nach n Würfen (und nicht schon früher) zu Ende ist:

$$(2') \qquad W_n = \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right]^p - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right]^p.$$

Außig (Böhmen). stud. math. J. Krug.

2. Anfragen und Antworten.

30. Schon lange habe ich eine Formel zur Berechnung des Winkels θ gesucht, den die Mitteltransversale CF eines Dreiecks ABC und die Winkelhalbierende CE einschließen. Neulich habe ich eine hübsche Beziehung gefunden, die das Gewünschte leistet. Sie lautet:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2},$$

worin α, β, γ die Dreieckswinkel sind. Diese Formel läßt sich auf verschiedene Arten, auch rein geometrisch, herleiten. Ist sie schon bekannt?

Breslau, im September 1906. O. Gutsche.

31. Nach einer Bemerkung von R. Baltzer (Analyt. Geom. S. 98) rührt der Ausdruck „Exzentrizität eines Kegelschnittes" von Kepler her. Bei welcher Gelegenheit hat Kepler den genannnten Begriff eingeführt, und an welchen Stellen seiner Werke findet man Näheres darüber?

Charlottenburg. P. Zühlke.

3. Kleinere Notizen.

Beispiel isothermischer Lemniskatenscharen.

Die Figur stellt eine quadratische Einteilung der Ebene durch gewöhnliche Lemniskaten dar. Bekanntlich hat sie drei Entstehungsweisen, aus denen sich die Haupteigenschaften ergeben.

1. Man denke sich die Ebene quadratisch eingeteilt durch zwei Orthogonalscharen von Berührungskreisen, die sämtlich durch den Nullpunkt gehen. Die X- und Y-Achse seien die Zentrale und Potenzlinie der einen Schar, die z. B. durch die Punkte $\pm\frac{1}{0}, \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \cdots$ der ersteren (und zugleich durch den Nullpunkt) gehen. Wendet man darauf die Abbildung $z = \sqrt{Z}$ an, so gehen die entsprechenden Lemniskaten durch die Punkte

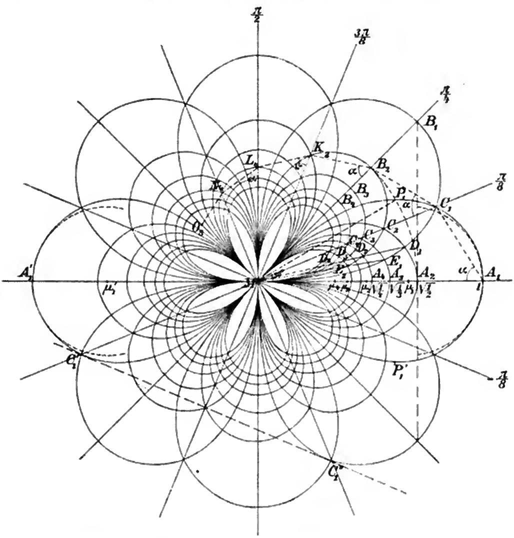
$$\pm\frac{1}{\sqrt{0}}, \pm\frac{1}{\sqrt{1}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{4}}, \cdots$$

der reellen, bezw. durch die Punkte

$$\pm\frac{i}{\sqrt{0}}, \pm\frac{i}{\sqrt{1}}, \pm\frac{i}{\sqrt{2}}, \pm\frac{i}{\sqrt{3}}, \pm\frac{i}{\sqrt{4}}, \cdots$$

der imaginären Achse. Die erste Schar entspricht den Kreisen, die ihre Mittelpunkte auf der positiven Hälfte der X-Achse haben, die andere denen, die sie auf der negativen Hälfte haben.

Verbindet man einen beliebigen Punkt P eines beliebigen Kreises mit M, halbiert man den Neigungswinkel von MP, und macht man die Halbierende MQ zur mittleren Proportionale zwischen MP und dem Durchmesser des Kreises, so erhält man in Q den entsprechenden Punkt der entsprechenden Lemniskate. So ist z. B. in der Figur der Punkt B_2 des über MA_1 errichteten Halbkreises in den Punkt C_1 der entsprechenden Lemniskate übergegangen, weil die Winkelhalbierende $MC_1 = \sqrt{MB_2 \cdot MA_1} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 1} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ gemacht ist.



Verlängert man MC_1 über M hinaus um die eigene Länge, so findet man den Antipodenpunkt C_1', der ebenfalls dem Punkte B_2 entspricht. Statt des Winkels $B_2MA_1 = \Theta$ kann man nämlich auch den Winkel $\Theta + 360^0$ halbieren. Die erste Halbierung gibt $\vartheta = \frac{1}{2}\Theta$, die andere gibt $\vartheta = \frac{1}{2}\Theta + 180^0$. Die Konstruktion ist also zweideutig. Daher entspricht dem Kreise eine aus zwei kongruenten Hälften entstehende Lemniskate. Dies reicht zur Konstruktion der ganzen Figur[1]) aus. Zur Konstruktion sollen einige Winke gegeben werden.

1) Durch ein Versehen ist diese Figur bereits S. 342 der im 10. Bande abgedruckten Notiz des Verfassers: „Über eine besondere isothermische Spiegelung" beigefügt worden. Red.

Der Linienzug $A_1\,C_1\,B_2\,K_2\,L_4\,N_4\,O_8\cdots$ gibt, mit M verbunden, lauter ähnliche Dreiecke. Die genannten Punkte, die paarweise der ersten, zweiten, vierten, achten, $\cdots$ Lemniskate jeder Schar angehören, liegen also auf einer logarithmischen Spirale von der Gleichung $^e\lg r = \frac{-2\vartheta}{\pi}\lg 2$ oder $r = e^{\frac{-2\vartheta}{\pi}\lg 2}$. Der parallele von $A_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ausgehende und gegen M perspektiviche Linienzug $A_2\,C_2\,B_4\,K_4\,L_8\,N_8\,O_{16}\cdots$ gibt Punktpaare der 2ten, 4ten, 8ten, 16ten, $\cdots$ Lemniskate jeder Schar, die der logarithmischen Spirale $r = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{-2\vartheta}{\pi}\lg 2}$ angehören. Ebenso gibt der von $A_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ausgehende parallele und perspektivische Linienzug Lemniskatenpunkte, die auf der logarithmischen Spirale $r = \sqrt{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{-2\vartheta}{\pi}\lg 2}$ liegen und der 3ten, 6ten, 12ten, 24ten,... Lemniskate jeder Schar paarweise angehören u. s. w. Diese Bemerkung erleichtert die Konstruktion des Lemniskatennetzes. Man erkennt, daß jede Lemniskatenschar aus ähnlichen und perspektivisch liegenden Kurven besteht. Jede Gerade durch M schneidet jede der benachbarten Lemniskatenscharen isogonal.

Weil die beiden Kreisscharen eine quadratische Einteilung geben, gilt dasselbe von den vier Lemniskatenscharen. Weil die „isogonalen Trajektorien" der beiden Kreisscharen wiederum Scharen von Berührungskreisen sind, müssen die der vier Lemniskatenscharen wieder Lemniskaten durch den Nullpunkt geben. Dies gilt z. B. von den Diagonalkurven unserer Figur, die eine ähnliche, durch den Faktor $\sqrt{2}$ vergrößerte, um $22\frac{1}{2}{}^0$ gedrehte Figur geben. Die Schnittpunkte der Diagonalkurven geben die Punkte der Lemniskaten, die man erhält, wenn man jedes der gezeichneten „Quadrate" isothermisch in vier Quadrate zerlegen, d. h. neue Kurven derselben Scharen einschalten will. — Daß die Punkte $C_1, C_2, C_3, \cdots$ auf der Geraden $\vartheta = 22\frac{1}{2}{}^0$ liegen, ist selbstverständlich.

Auch folgende Bemerkung erleichtert die Konstruktion. Ist D_1 der Schnittpunkt der Lemniskaten B_1 und A_2, so gibt die Gerade $D_1 M$ quadratische Eckpunkte $D_2, D_3, D_4, \cdots$, die Schnittpunkte der Lemniskaten durch B_2 und A_4, B_3 und A_4, D_3 und A_6, D_4 und A_8, $\cdots$ sind. Die Gerade $D_1 M$ ist also eine Diagonale von Rechtecken, die man Doppelquadrate nennen kann. Ist E_1 Schnittpunkt der Lemniskaten B_1 und A_3, so gibt die Gerade $E_1 M$ ebenso Schnittpunkte $E_2, E_3, E_4, \cdots$, die den Lemniskaten B_2 und A_6, B_3 und A_{12}, B_4 und A_{18} usw. angehören. Die Gerade $E_1 M$ ist also Diagonale von Rechtecken, von denen jedes aus drei Quadraten zusammengesetzt ist. In entsprechender Weise sind auch Geraden vorhanden, die Diagonalen von Rechtecken aus vierfachen, fünffachen, ... $n$fachen Quadraten sind.

Bekannt ist noch folgende Eigenschaft. Der um M gelegte Kreis vom Radius $\sqrt{\frac{1}{2}}$ schneidet die Lemniskate A_1 dort, wo sie horizontale Tangenten hat. Die entsprechende Gerade M hat, wie sich zeigen wird, die Neigung 30^0. Das Entsprechende für die gleich großen Lemniskaten ist leicht auszusprechen. Der betreffende Kreis geht durch die sog. Brennpunkte dieser Lemniskate, in bezug auf die sie der Gleichung $p_1 q_1 = k$ genügt. Für diese Lemniskate ist $pq = (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$. Für die zweiten Lemniskaten ist $p_2 q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}p_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}q_1 = \frac{1}{4}$, für die dritten $p_3 q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}p_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}}p_2 = \frac{1}{6}$, ebenso $p_4 q_4 = \frac{1}{8}$ usw.

2. Die gesamte Figur entsteht auch durch Inversion aus der Figur, die eine quadratische Einteilung der Ebene durch vier Scharen gleichseitiger Hyperbeln darstellt, die ihre Hauptachsen auf den Geraden $\vartheta = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ durch den Nullpunkt haben. Die Scheitelpunkte haben die Entfernungen $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$ von M. Der Krümmungsradius der gleichseitigen Hyperbel hat für den Scheitel die Länge der halben Hauptachse Die entsprechenden Krümmungsradien sind also der Reihe nach $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$ Der Krümmungskreis mit Radius $\sqrt{1}$ schneidet die Achse an den Stellen 1 und 3. Er geht durch Inversion in den Krümmungskreis der Lemniskate A_1 für diesen Punkt über. Dieser schneidet also die X-Achse an den Stellen 1 und $\frac{1}{3}$, sein Mittelpunkt liegt demnach an der Stelle $\mu_1 = \frac{2}{3}$. Der Kreis ist in der Figur angedeutet. Wie der der Hyperbel hat er mit der Kurve vier aufeinander folgende Punkte gemein. Seine Kenntnis erleichtert die Zeichnung erheblich. Für die Scheitel der kleinen Lemniskaten folgen die Lagen der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte so, daß die Reihe $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{4}}, \ldots$ entsteht. Jeder der Krümmungsradien ist also gleich dem dritten Teile der Halbachse jeder Lemniskate, also $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{2}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{4}, \ldots$

[Bei der Abbildung $Z = \frac{1}{z}$ entsprechen einander Kreise, aber nicht die Mittelpunkte der Kreise. Dem Kreise $p = c$ um den Punkt $a + bi$ entspricht ein Kreis $\frac{P_0}{P}\sqrt{a^2 + b^2} = c$, wobei der Radiusvektor P_0 vom Nullpunkte, der Radiusvektor P vom Punkte $\frac{1}{a + bi}$ ausgeht. Dem Kreise $q = c_1$ um den Punkt $-(a + bi)$ entspricht ein Kreis $\frac{Q_0}{Q}\sqrt{a^2 + b^2} = c$, wobei Q_0 wieder vom Nullpunkte, Q vom Punkte $\frac{1}{-(a + bi)}$ ausgeht. Demnach entspricht der Lemniskate A_1 oder $p \cdot q = \frac{1}{2}$, wobei p von $\sqrt{\frac{1}{2}}$, q von $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ ausgeht, eine Kurve $\frac{P_0}{P}\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 0^0} \cdot \frac{Q_0}{Q}\sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + 0^0} = \frac{1}{2}$. Da P_0 und Q_0 identisch sind und mit R bezeichnet werden können, ist also $\frac{R^2}{PQ}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ oder $\frac{R^2}{PQ} = 1$, eine Vektorengleichung der durch 1 gehenden gleichseitigen Hyperbel, wobei die Radii vectores R, Q und P von Null $\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)} = \sqrt{2}$ und $\frac{1}{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)} = -\sqrt{2}$, also vom Mittelpunkt und den Brennpunkten der gleichseitigen Hyperbel ausgehen. So findet man aus der Vektorengleichung der Lemniskate die entsprechende der gleichseitigen Hyperbel. Aus $Q - P = (\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 1) = 2$ und $P.Q = R^2$ folgen für die erste Hyperbel einfache Beziehungen zwischen Q und R bezw. P und Q.

Die Bemerkungen über die geradlinigen Punktreihen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ $D_1, D_2, D_3, \ldots$ und $E_1, E_2, E_3, \ldots$ gelten auch für das System der gleichseitigen Hyperbeln. Der logarithmischen Spirale durch die Punkte $A_1, C_1, B_2, K_2, L_4, N_4, \ldots$, deren Gleichung $r = e^{\frac{-2\vartheta}{\pi}\lg 2}$ war, entspricht in der

Ebene der Hyperbeln die Kurve $\frac{1}{R} = e^{\frac{2\Theta}{\pi}\lg 2}$ oder $R = e^{\frac{-2\Theta}{\pi}\lg 2}$. Die Gleichung ist identisch mit der ursprünglichen, d. h. diese Spirale ist eine Invariante. Überhaupt bleiben Spiralen von der Form $r = e^{b\vartheta}$ (die durch den Punkt 1 gehen) auch bei beliebigem Schnittwinkel durch das zu M gehörige Strahlenbüschel unverändert, wie die Gleichung $\frac{1}{R} = e^{-b\Theta}$ oder $R = e^{b\Theta}$ zeigt. Dagegen geht $r = ke^{b\vartheta}$ über in $R = \frac{1}{k} e^{b\vartheta}$, bleibt also nicht ungeändert und gibt nur eine geometrisch ähnliche Spirale.]

3. Die orthogonale Doppelschar paralleler Geraden

$$X = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad Y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

geht durch die Abbildung $Z = \frac{1}{z^2}$ aus unserer Figur hervor. Dabei folgt aus $X \pm iY = \frac{1}{(x \pm iy)^2}$

$$\text{I)} \qquad X = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad Y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

den genannten Graden entsprechen also unsere Lemniskaten

$$\text{II)} \qquad \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$\text{III)} \qquad \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Die Schar II gibt die Lemniskaten mit horizontaler Achse (+ entsprechend) und vertikaler Achse (— entsprechend), die Schar III gibt die schrägen Lemniskaten mit den Achsen $\pm 45^0$. Die Schreibweise ist die isothermische, denn die linken Seiten dieser Gleichungen genügen identisch der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$, wenn man die linke Seite gleich u setzt, was also auf $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ führt.

Die Diagonalkurven der quadratischen Einteilung haben, wie aus $Y \pm X = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$ folgt, die ebenfalls isothermischen Gleichungen

$$\text{IV)} \qquad \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \mp \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0, \pm a, \pm 2a, \pm 3a, \ldots$$

Das System ist dem der Figur ähnlich.

Allgemeiner entsprechen den Geraden $Y = AX + k$ oder $Y - AX = k$ und ihren Orthogonalen $Y + \frac{1}{A} X = k_1$ die orthogonalen Lemniskatenscharen

$$\text{V)} \quad \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} - A \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = k \text{ und } \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{A} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = k_1.$$

Nehmen die isothermischen Parameter k und k_1 Werte an, die einer arithmischen Reihenfolge angehören, so entsteht eine Einteilung in kleine „ähnliche Rechtecke“, bei geeigneten Reihen in kleine Quadrate, was wieder eine der unsrigen ähnliche Figur gibt.

Daß jeder Kurve $f(X, Y) = 0$ der Z-Ebene eine Kurve

$$\text{VI)} \qquad f\left[\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\right] = 0$$

der Lemniskatenebene entspricht, ist selbstverständlich.

Dem Kreise $R = c$ um den Nullpunkt der Z-Ebene entspricht der Kreis $\frac{1}{r^2} = c$ der Lemniskatenebene, der Geraden $\Theta = \gamma$ durch den Nullpunkt der Z-Ebene entsprechen die Geraden $-2\vartheta = \gamma$ und $-2\gamma + 180^0 = \gamma$. Denn es ist $R(\cos\Theta + i\sin\Theta) = \frac{1}{r^2(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta)} = \frac{1}{r^2}[\cos(-2\vartheta) + i\sin(-2\vartheta)]$, also $\Theta = -2\vartheta$ aber zugleich $\Theta \pm 360^0 = -2\vartheta$.

Der Kurve $f(R, \Theta) = 0$ der Z-Ebene entsprechen also die Kurven

$$\text{VII)} \qquad f\left[\frac{1}{r^2}, -2\vartheta\right] = 0 \quad \text{und} \quad f\left[\frac{1}{r^2}, -2\vartheta + 360^0\right] = 0$$

$$\text{oder} \quad f\left[\frac{1}{r^2}, -2(\vartheta - 180^0)\right] = 0,$$

von denen die zweite gegen die erste um 180^0 gedreht ist.

Der log. Spirale $R = e^{b\Theta}$ z. B. entspricht die log. Spirale $\frac{1}{r^2} = e^{-2b\vartheta}$ oder $r = e^{b\vartheta}$ der z-Ebene, die mit der erstgenannten identisch ist, so daß man in ihr dieselbe Invariante hat wie oben. Außerdem entspricht der ersteren auch die um 180^0 gedrehte zweite Spirale. So geht z. B. die durch die Punkte $A_1, C_1, B_2, K_2, L_4, N_4, \ldots$ gehende Spirale der Lemniskatenebene in die log. Spirale der Z-Ebene über, welche die Koordinatenachsen abwechselnd in den Punkten $+1, -2, -4, +8$ usw. schneidet, die mit der vorigen identisch ist. Man bemerke, daß die untere Hälfte der Parallelebene und der erste Quadrant der Lemniskatenebene einander entsprechen.

5. Denkt man sich die lemniskatische Einteilung durch die besprochenen Einschaltungen bis ins Kleinste fortgesetzt, so geht jeder um M gelegte Kreis durch lauter Quadrate von gleicher Größe, während jede Gerade die eine Lemniskatenschar in Punkten paralleler Tangenten schneidet. Dafür sind bekanntlich maßgebend der absolute Betrag und die Abweichung des Differentialquotienten der abbildenden Funktion.

Der Differentialquotient von $Z = \frac{1}{r^2}$ ist

$$Z' = \frac{-2}{z^3} \text{ oder } \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{-2}{r^3(\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta)}$$

$$= \frac{2(\cos 180^0 + i\sin 180^0)}{r^3(\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta)} = \frac{2}{r^3}\left[\cos(180^0 - 3\vartheta) + i\sin(180^0 - 3\vartheta)\right].$$

Der absolute Betrag des Differentialquotienten ist also $\varrho = \frac{2}{r^3}$, die Abweichung $\varphi = 180^0 - 3\vartheta$. Der eine Ausdruck ist konstant für jeden Kreis um den Nullpunkt der z-Ebene. Er zeigt an, daß den Quadraten, die er passiert, in der Z-Ebene solche entsprechen, welche $\frac{2}{r^3}$fache Seiten haben. Nun sind aber die letzteren gleich groß, also folgt: Die Quadratseiten unseres Lemniskatengebildes sind proportional der dritten Potenz des Abstandes von M, sobald die Einteilung bis ins Kleinste durchgeführt ist; die betreffende Verhältniszahl gegen die der Parallelebenen ist $\frac{r^3}{2}$. So ist z. B. das Vergrößerungsverhältnis bei A_1 gleich $\frac{1}{2}$ zu setzen.

Die Lemniskatentangente für jede Stelle P muß, wenn MP die Neigung ϑ hat, um $180^0 - 3\vartheta$ gedreht werden, um in die Lage der der Lemniskate entsprechenden Geraden zu gelangen. Für

C_1 z. B. ist die Neigung von $MC_1 = \frac{\pi}{8}$, also muß man um $180^0 - \frac{3\pi}{8}$ drehen, damit die dortige Tangente der Lemniskate A_1 in die senkrechte Lage gelange, die die entsprechende Gerade der Z-Ebene hat. Daraus folgt, daß die Tangente selbst die Neigung $90^0 + \frac{3\pi}{8}$ hat, also parallel zur Geraden $-\frac{\pi}{8}$ durch M ist. Im unteren Teile der Figur ist statt der Tangente die Parallele $C_1' C_1''$ gezogen, welche nun die Berührende der beiden Ovale ist, die dort die andere Schar schneiden. So hat man neue Punkte und Tangenten der Lemniskatenscharen gefunden.

Umgekehrt kann man z. B. fragen, wo die Lemniskate A_1 horizontale Tangenten hat. Für solche setze man $180^0 - 3\vartheta = 270^0$, woraus $\vartheta = -30^0$. Die Geraden $\pm 30^0$ und der Brennpunktkreis um M (mit Radius $MA_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$) geben die betreffenden vier Punkte an. Auf MP_1 und MP_2 liegen dann die entsprechenden Punkte für die ganze Schar.

6. Eine der physikalischen Deutungen ist die folgende: Man denke sich den ersten Quadranten der Ebene als homogene dünne leitende Platte. Längs ihrer Ränder leite man Elektrizität ein und leite diese im Punkte M ab. Die Lemniskaten der beiden die Ränder orthogonal schneidenden Scharen sind für den stationären Zustand Stromlinien, die Orthogonalschar gibt die Niveaulinien, d. h. die Kurven konstanten Potentials. Da in allen Kanälen gleichviel Elektrizität strömt, ist die Stromdichte proportional den Dimensionen der kleinen Quadrate, also umgekehrt proportional der dritten Potenz des Abstandes von M. Die Kreise um M sind Kurven konstanter Stromdichte, also Intensitätskurven, die Geraden durch M sind Kurven konstanter Stromrichtung. Die Sache ändert sich nicht, wenn man die Platte durch die Halblemniskate A_1 begrenzt.

Das „Vertauschungsproblem" kommt auf folgendes hinaus: Man leite in der Nachbarschaft von M Elektrizität ein und dicht dabei aus. Die Stromkurven werden die Lemniskaten der orthogonalen Schar, die Niveaulinien sind die vorigen Stromlinien. Die Kreise und Geraden behalten ihre Bedeutung.

7. Ähnliche Behandlung lassen alle Abbildungen der orthogonalen Parallelenscharen durch Funktionen von der Form $Z = z^{\pm n}$ zu, wobei n zunächst eine ganze Zahl sei. Bei sämtlichen treten die Geraden durch Null als Kurven paralleler Tangentenrichtungen und die zugehörigen Kreise als Kurven konstanten Vergrößerungsverhältnisses auf, auch spielen die logarithmischen Spiralen durch den Punkt $+1$ ihre Rolle als Invarianten. An Stelle der vorliegenden Lemniskaten 2ter Ordnung treten bei negativem Exponenten solche n^{ter} Ordnung, bei positivem dagegen kardioidische Kurvensysteme, im Falle $n = 2$ wirkliche Kardioiden.

In meiner Arbeit über die Abbildung $Z = \sqrt[n]{z}$ und die Lemniskaten n^{ter} Ordnung, Crelles Journal Bd. 83, hatte ich ebenso, wie in meinen isogonalen Verwandtschaften, den Fall der beiden Parallelscharen nicht berücksichtigt, der durch die Ähnlichkeit der entstehenden Kurven besonders instruktiv ist. Auch bei der Abbildung der Strahlen durch M und die konzentrischen Kreise, auch für die zugehörigen Scharen log. Spiralen behalten die konzentrischen Kreise und Strahlen den Charakter als Kurven gleicher Stromstärke und Stromrichtung.

8. Eine physikalische Angelegenheit ist der eigentliche Grund zu dieser Arbeit gewesen. Herr Prof. Adr. Guébhard hat um das Jahr 1881 in den Comptes Rendus der Académie des Sciences eine Reihe von Arbeiten über die nach ihm benannten Farbenringe veröffentlicht. Seine Deutung als Linien konstanten Potentials fand bei Helmholtz volle Zustimmung. Von anderer akademischer Seite wurde sie angefochten. Die Kurven wurden als Intensitätskurven bezeichnet. Bei den hier genannten Abbildungen zeigt sich nun, daß die Intensitätskurven konzentrische Kreise sind. Die gegnerischen Behauptungen sind dadurch geschlagen, denn Guébhards Ringe zeigen nichts von Kreisen. Helmholtz, mit dem ich auf der Königlichen Schulkonferenz von 1890 zusammenkam, sprach mit mir eingehend über das Unbegründete jener Gegnerschaft. Er teilte mir mit, daß er drei seiner Assistenten nacheinander mit endgültiger Prüfung der Sachlage betraut habe. Jedesmal aber hätten Änderungen in der Lebenslage der Herren die Vollendung der Arbeit gehindert. Er selbst wollte sie nun in die Hand nehmen, da er ja am 2. März 1882 in der Berliner Akademie über die Angelegenheit zustimmend gesprochen habe. Sein Tod hat dies verhindert. So ist denn der ihm von gewisser Seite gemachte Vorwurf, er habe Intensitäts- und Potentialkurven miteinander verwechselt, unerledigt geblieben. Über den Vorwurf selbst hatte er nur ein bezeichnendes Achselzucken und die Bemerkung, daß der Beweis dafür nicht gegeben sei.

Schon in der Zeitschrift für Math. u. Ph. Bd. 42 (1897) habe ich durch eine Abhandlung „Über einen Satz der Funktionentheorie und seine Anwendung auf isothermische Kurvensysteme und einige Probleme der math. Physik“ die Anregung zu einer Austragung der Meinungsverschiedenheit gegeben und für ganze Reihen solcher Probleme die Niveaulinien und die Intensitätskurven angegeben. Auch dem jetzigen Leiter der Annalen für Math. und Physik reichte ich eine solche ein. Dieser wollte jedoch den Streit nicht noch einmal anfachen. An dem Problem selbst haben E. Mach, W. Voigt. H. Meyer, V. Volterra, Róiti, Margules mit verschiedenem Erfolge gearbeitet, H. Weber in einem die Gegensätze versöhnenden Sinne. Erledigt ist aber die Sache nicht.

Einige Arbeiten schließen sich an Riemanns Behandlung der Nobilischen Farbenringe an, in der jedoch auf die Polarisationswirkung der Niederschläge nicht eingegangen wird. Die Versuche Guébhards haben ein anderes Arrangement. Man sieht die Ringe entstehen und auseinanderlaufen, wie die Wellen nach dem Einwerfen eines Steines in ruhiges Wasser. Plötzlich stockt die Ausdehnung und die Weiterbildung hört auf. Die Niederschläge haben einen Gegenstrom hervorgerufen, der die elektrische Strömung in der untersten Flüssigkeitsschicht vollständig aufhebt. In die Platte dringt dann, wie Helmholtz auseinandersetzte, überhaupt nichts mehr ein. Das physikalische Intensitätsgesetz für das Eindringen büßt seine Wirkung aus diesem Grunde ein. Das Problem ist also vom Riemannschen ganz und gar verschieden. Meines Wissens sitzen bei diesem die Spitzen der Elektroden auf der Metallplatte, und der Kontakt bleibt erhalten. Bei Guébhard schweben sie über dem Metall, und gerade unter ihnen bilden sich massige Niederschläge, die schließlich jedes Eindringen in die Platte verhindern. Die Polarisationswirkung ist also bei Guébhard das Entscheidende, bei Riemann wird sie ganz vernachlässigt.

Jedenfalls sind die Guébhardschen Ringe den Potentialkurven auffallend ähnlich, während sie von den Intensitätskurven durchaus abweichen. Die Ähnlichkeit in gewissen Feinheiten ist eine oft so auffallende, daß man wohl irgend einen grundsätzlichen Zusammenhang annehmen muß. Gerade bei dem hier dargestellten Problem ist ein einfaches Unterscheiden beider Kurvenarten möglich.

Finden Abweichungen statt, so ist dies besonders in den Fällen, bei denen die Theorie unendlich große Platten beansprucht, nichts Überraschendes, auch dann, wenn die Form der Platte, die homogen und überall von derselben geringen Dicke sein soll, mit der Form des Glastrogs nicht übereinstimmt. Und Abweichungen werden ja auch bei der Kirchhoffschen Bestimmungsmethode der Niveaulinien beobachtet. Man vgl. die Arbeit des Herrn Geffroy im Programm 1884 des st. Realgymnasiums zu Königsberg.

Herr Harald Schütz von der Kgl. Maschinenbauschule in Hagen machte auf meine Anregung Versuche und benutzte dabei den Platintiegel als Gefäß und Platte zugleich und erreichte gerade bei niedriger Flüssigkeitssäule, die das Problem möglichst zu einem zweidimensionalen macht, sehr gute Resultate. Ich möchte mir den Vorschlag erlauben, sie auch in einem halbkugelförmigen Platintiegel zu machen und in die Flüssigkeit einen nicht leitenden konzentrischen Körper soweit einzutauchen, daß man eine konzentrische Kugelschicht als Flüssigkeit hat. Dann würde man die stationäre Strömung in der Kugelfläche, später etwa auch in einem Troge, der einem halben Torus (Wulste) entspricht, nach Guébhards Methode für den Torus prüfen können.

Im übrigen scheint es an der Zeit zu sein, den betreffenden elektrolytischen Vorgang endlich soweit zu prüfen, daß man eine Theorie der Elektrolyse, die bis jetzt doch auf schwachen Füßen steht, erhält und dabei auch die Frage der Guébhardschen Ringe besser zu entscheiden versucht, als mit dem unbewiesenen Schlagworte „Intensitätskurven“. Der Mathematiker steht der Angelegenheit unparteiisch gegenüber und wird auch wohlbegründete negative Urteile zu schätzen wissen. Da es sich aber gerade um Helmholtz handelt, fühlte ich mich zur vorliegenden Anregung verpflichtet. Sonst würde ich wahrscheinlich den obigen elementaren Sonderfall nicht vorgelegt haben.

Hagen i. W. — G. Holzmüller.

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Herzog Albrecht-Allee 27.]

(Vacat.)

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Adler, A., Theorie der geometrischen Konstruktionen. Sammlung Schubert Nr. 52. Leipzig 1906, Göschen. VIII u. 301 S. ℳ 9

Ahrens, W., C. G. J. Jacobi als Politiker. Ein Beitrag zu seiner Biographie. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 45 S. ℳ 1,20.

Andoyer, H., Cours d'astronomie. Première partie: astronomie théorique. Paris 1906, A. Hermann. 221 S. fr. 9.

Annuaire pour l'an 1907 publié par le bureau des longitudes. Paris 1907, Gauthier-Villars. fr. 1,50.
Arnoux, G., Arithmétique graphique. Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques. 225 S. fr. 7,50.
Bahrdt, W., Physikalische Messungsmethoden. Sammlung Göschen Nr. 301. Leipzig 1906, Göschen. 145 S. *M.* 0,80
Bendt, F., Differential- und Integralrechnung. 3. Auflage. Webers illustrierte Handbücher Nr. 157. Leipzig 1906, J. J. Weber. 267 S. *M.* 8.
Börsch, A., Lotabweichungen. Heft III: Astronomisch-geodätisches Netz I. Ordnung nördlich der europäischen Längengradmessung in 52 Grad Breite. Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodät. Inst. Berlin 1906, P. Stankiewicz. 164 S.
Brillouin, M., Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. 1e partie: généralités, viscosité des liquides. Paris 1907, Gauthier-Villars. 228 S. fr. 9.
Duhem, P., Recherches sur l'élasticité. Paris 1906, Gauthier-Villars. 208 S. fr. 12.
Durège, H., Elemente d. Theorie d. Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. 5. Auflage neu bearb. von L. Maurer. Leipzig 1906, B. G. Teubner 397 S. *M.* 10.
Edwardson, H., Woher kam das Leben? Mähr.-Ostrau 1906, R. Papauschek. 50 S.
Fields, J. Ch., Theory of the algebraic functions of a complex variable. Berlin 1906, Mayer und Müller. 186 S. *M.* 12.
Fuchs, L., Gesammelte mathematische Werke. Herausg. v. R. Fuchs u. L. Schlesinger. II. Band: Abhandlungen (1875--1887). Berlin 1906, Mayer & Müller. 485 S. *M.* 30.
Gehrcke, E., Die Anwendung der Interferenzen in der Spektroskopie und Metrologie. Die Wissenschaft Heft 17. Braunschweig 1906, Vieweg u. S. 159 S. *M.* 6,20.
Geyger, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie I. Leipzig 1906, Göschen. 321 S.
Girndt, H., Technik und Schule. Beiträge zum gesamten Unterrichte an technischen Lehranstalten. In zwanglosen Heften herausgegeben. I. Band 1. Heft. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 64 S. *M.* 1,60.
Gob, A., Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Brüssel 1906, Hayez.
Grünbaum, F., und Lindt, R. Das Physikalische Praktikum des Nichtphysikers. Theorie und Praxis der vorkommenden Aufgaben für alle, denen Physik Hilfswissenschaft ist. Leipzig 1905, G. Thieme. 386 S. *M.* 6.
Henkler, P., Der Lehrplan für den Unterricht in Naturkunde. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 44 S. *M.* 1,00.
Hermes, O., und Spies, P. Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie. 5. Aufl. 73 S. *M.* 1,20.
Heun, K., Lehrbuch der Mechanik. I. Teil: Kinematik. Sammlung Schubert Nr. 37. Leipzig 1906, Göschen. XVI u. 338 S. *M.* 8.
Holliger, H., Kurze Anleitung zur Berechnung von Flächen und Körpern für Schule und Praxis. Leipzig 1906, E. E. Meyer. 53 S. *M.* 0,80.
Holzmüller, G., Elementare kosmische Betrachtungen über das Sonnensystem und Widerlegung der von Kant und Laplace aufgestellten Hypothesen über dessen Entwicklungsgeschichte. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 98 S. *M.* 1,80.
Huldschiner, Das Pendeln parallel geschalteter Wechselstrommaschinen. Sammlung elektrotechnischer Vorträge. Herausgeg. von Voit. Leipzig 1906, Encke.
Jochmann, Grundriß der Experimentalphysik und Elemente der Chemie sowie der Astronomie und mathematischen Geographie. Herausgeg. von Hermes und Spies. 16. Aufl. Berlin 1906, Winckelmann u. S. 512 S. *M.* 5,50.
Junker, F., Höhere Analysis. Erster Teil: Differentialrechnung. Sammlung Göschen Nr. 87. 3. Aufl. Leipzig 1906, Göschen. 204 S. *M.* 0,80.
Keindorff, A., Die Zustandsgleichung der Dämpfe, Flüssigkeiten und Gase. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 61 S. *M.* 2.
Kuhn, F., Fragen und Aufgaben aus dem Anfangskapitel der Planimetrie. München 1906, R. Oldenbourg. 48 S. *M.* 0,80.
Kultur der Gegenwart; herausgegeben von P. Hinneberg: W. v. Dyck, Die Naturwissenschaftliche Hochschulausbildung. — K. Kraepelin, Naturwissenschaftlich-technische Museen. — O. N. Witt, Naturwissenschaftlich-technische Ausstellungen. Sonderabdrücke. Leipzig 1905, B. G. Teubner.
Lafitte, Prosper de. Essai sur le carré magique de N à N nombres. Paris 1906, Gauthier-Villars. 23 S.
Langen, F., Die Aussichten der Gasturbine. Eine eingehende Studie vom Standpunkte des Turbinenpraktikers. Rostock 1906, E. Volckmann. 58 S. *M.* 1.

Leschanowsky, H., Gemeinverständliche erste Einführung in die höhere Mathematik und deren Anwendung. Wien 1907, C. Fromme. 85 S.

Laurent, H., La géométrie analytique générale. Paris 1906, A. Hermann. 147 S. fr. 6.

Mach, E., Space and geometry in the light of physiological, psychological and physical inquiry. From the German by Th. J. Mc Cormack. Chicago 1906, The open court publishing company. 148 S.

Mahler, G., Physikalische Formelsammlung, Sammlung Göschen Nr. 136. 3. Aufl. Leipzig 1906, Göschen. 182 S. ℳ 0,80.

Maillet, E., Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. Paris 1906, Gauthier Villars. 274 S. fr. 12.

Meissner, O., Die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung, Leipzig 1906, B. G. Teubner. 94 S. ℳ 2,60.

Manderli, S., Die Interpolation und ihre Verwendung bei der Benutzung und Herstellung mathematischer Tabellen. Solothurn 1906, Zapfel. 146 S.

Müller, H., Lehrbuch der Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. Ausgabe für bayerische Lehranstalten, herausgegeben zusammen mit M. Zwerger. Leipzig 1906, B. G. Teubner. I, 138 S., ℳ 1,60; II, 162 S., ℳ 2.

Müller, H. und Kutnewsky, M., Aufgabensammlung. Aufgaben für bayerische Lehranstalten. Herausgegeben zusammen mit M. Zwerger. Leipzig 1906. B. G. Teubner. 276 S. ℳ 2,60.

Neuberg, J., Notes sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. Brüssel 1906, Hayez.

Petit Bois, G., Tafeln unbest. Integrale. Leipzig 1906, B. G. Teubner. XII u. 154 S. ℳ 3.

Picard, E., et Simart, G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Paris 1906, Gauthier-Villars. 528 S. fr. 18.

Reye, Th., Die Geometrie der Lage. Zweite Abteilung. 4. Aufl. Stuttgart 1907, A. Kröner. 335 S. ℳ 12.

Richarz, F., und König, W. Zur Erinnerung an Paul Drude. Gießen 1906, Töpelmann. ℳ 1,40.

Rydberg, R. Elektron, der erste Grundstoff. Lund 1906. Ohlisson. 30 S. ℳ 1.

Sahulka, J., Erklärung der Gravitation, der Molekularkräfte, der Wärme, des Lichtes, der magnetischen und elektrischen Erscheinungen aus gemeinsamer Ursache auf rein mechanischem atomistischem Wege. Wien 1907, C. Fromme. 175 S. ℳ 5.

Schafheitlin, P., Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 96 S. ℳ 1,80.

Scheffers, G., Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Leipzig 1905, Veit u. Co. 682 S. ℳ 16.

Smith, D. E., History of modern mathematics. Mathematical monographs Nr. 1. 4. Aufl. New York 1906, J. Wiley & Sons. 81 S.

Strecker, K., Einheitliche Formelzeichen. Bericht des Ausschusses des elektrotechnischen Vereins. S. A. aus ETZ. Berlin 1906, Springer. 15 S.

Stuyvaert, M., Les nombres positifs, exposé des théories modernes de l'arithmétique élémentaire. Gand 1906, E. v. Goethem.

Thieme, H., Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Erster Teil: Die Unterstufe. Dritte Auflage. Leipzig 1907, E. Freytag. 128 S. ℳ 1.60.

Vessiot, F., Leçons de géométrie supérieure. Lyon 1906, Delaroche et Schneider. 322 S.

Weinstein, B., Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 543 S. ℳ 9.

Weitbrecht, W., Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Sammlung Göschen Nr. 302. Leipzig 1906, Göschen. 180 S. ℳ 0,80.

Wrobel, E., Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Erster Teil: Pensum der Tertia und Untersekunda, Elfte Auflage. ℳ 3,30. Zweiter Teil: Pensum der Obersekunda und Prima des Gymnasiums. Sechste Auflage. Rostock 1906, H. Koch. ℳ 1.60.

Wrobel, E., Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra enthaltend die Formeln, Lehrsätze und Auflösungsmethoden in systematischer Anordnung und eine große Anzahl von Fragen und Aufgaben. Anhang für höhere realistische Lehranstalten. Rostock 1906, H. Koch. ℳ 1.

Wrobel, E., Leitfaden der Stereometrie nebst einer großen Anzahl von Übungsaufgaben. Dritte vermehrte Auflage. Rostock 1906. H. Koch. ℳ 2.

Zühlke, P., Ausführung elementar-geometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Leipzig 1906. B. G. Teubner. 46 S. ℳ 1.

Geradlinige Polygone extremen Inhalts.

Von E. Study in Bonn.

Die Frage nach allen geschlossenen Polygonen von gegebener Seitenzahl, gegebenem Umfang und extremem Flächeninhalt scheint ungeachtet ihres elementaren Charakters noch nicht erschöpfend untersucht worden zu sein. Nach der modernen Anschauungsweise nämlich hat ein geschlossenes Polygon von endlicher Seitenzahl, auch wenn seine Seiten einander durchsetzen oder überdecken, immer einen bestimmten Flächeninhalt, und dieser ist eine sowohl positiver als negativer Werte fähige Größe, deren Vorzeichen abhängt von einem dem Polygon zugeschriebenen Umlaufssinn, nämlich von der Art, wie die Ecken zyklisch aufeinander folgen. Man findet nun alsbald, daß jedes extreme Polygon *regulär* sein muß, daß nämlich seine Ecken auf einem Kreise liegen und in gleichen Abständen auf einander folgen. Die Frage aber, ob ein solches reguläres Polygon tatsächlich eine extreme Fläche hat, scheint bis jetzt nur behandelt worden zu sein für den Fall der einfachen Polygone der älteren Elementargeometrie, die die Ebene in zwei Teile zerlegen. Zwar hat Weierstraß in einer Vorlesung über Variationsrechnung vom Jahre 1879, die dem Verfasser durch eine Ausarbeitung bekannt geworden ist, seiner Untersuchung den erwähnten modernen Begriff des Flächeninhaltes zugrunde gelegt. Er scheint jedoch nur nach Extremis extremorum gefragt zu haben, so daß von ihm die überschlagenen Polygone nachträglich wieder ausgeschlossen werden. Unmittelbar ersichtlich scheint für diese nur so viel zu sein, daß ein reguläres Polygon mit z. B. positivem Flächeninhalt nicht einem Minimum dieses Inhaltes entsprechen kann, und daß ein Sternpolygon (wie das Pentagramma mysticum) mit stumpfen Winkeln zwischen aufeinander folgenden (orientierten) Seiten auch nicht zu einem Maximum des Flächeninhaltes gehören kann.

Wir reproduzieren zunächst den Gedankengang von Weierstraß, soweit er die durch einmaliges Differentiieren zu erlangenden Bedingungen des Extremums betrifft. Allerdings handelt es sich dabei

um eine Methode, die einer Ausdehnung auf Probleme ähnlicher Art nicht fähig zu sein scheint. Diese Methode ist aber ein wahres Kabinetstückchen analytischer Eleganz und verdient daher allgemeiner bekannt zu werden. Die weitere Entwicklung bildet dann eine Anwendung gewisser zyklischer Determinanten; sie dürfte, als ein Beispiel zur allgemeinen Theorie der Maxima und Minima, auch dann einiges Interesse behalten, wenn es gelingen sollte, mit einer wesentlich einfacheren Betrachtung zum Ziele zu kommen.

1. Sind $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten der Ecken irgend eines geschlossenen Polygons, so ist dessen doppelter Flächeninhalt, auch dem Vorzeichen nach, gegeben durch den Ausdruck

$$(1) \qquad 2F = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + \cdots + x_n y_1 - x_1 y_n.$$

Setzen wir dann

$$(2) \qquad s_\lambda = \sqrt{(x_\lambda - x_{\lambda-1})^2 + (y_\lambda - y_{\lambda-1})^2},$$

wobei modulo n kongruente Indizes als äquivalent zu erachten sind und für die Wurzelgröße das positive Vorzeichen zu wählen ist, verstehen wir ferner unter s irgend eine positive Konstante, so wird die Forderung eines unveränderlichen Umfangs des Polygons $(1, 2, \ldots n)$ ausgedrückt durch die Gleichung

$$(3) \qquad s_1 + s_2 + \cdots + s_n - s = 0.$$

Ist dann

$$(4) \qquad G = 2F + \varepsilon\{s_1 + \cdots + s_n - s\},$$

so liefern die Gleichungen $\dfrac{\partial G}{\partial x_\lambda} = 0$, $\dfrac{\partial G}{\partial y_\lambda} = 0$, oder

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_{\lambda+1} - y_{\lambda-1} + \varepsilon\left\{\frac{x_\lambda - x_{\lambda-1}}{s_\lambda} + \frac{x_\lambda - x_{\lambda+1}}{s_{\lambda+1}}\right\} &= 0, \\ -x_{\lambda+1} + x_{\lambda-1} + \varepsilon\left\{\frac{y_\lambda - y_{\lambda-1}}{s_\lambda} + \frac{y_\lambda - y_{\lambda+1}}{s_{\lambda+1}}\right\} &= 0 \end{aligned} \right.$$

nach Elimination von ε, und unter Zuziehung der Bedingung (3), notwendige Bedingungen für einen extremen Wert der Größe F.

Der erwähnte Gedanke von Weierstraß besteht nun darin, die Gleichungen (5) dadurch übersichtlicher zu gestalten, daß man sie zu zweien zusammenfaßt und als Gleichungen zwischen *komplexen* Größen darstellt. Setzt man nämlich

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} z_\lambda &= (x_\lambda - x_{\lambda-1}) + (y_\lambda - y_{\lambda-1})i, \\ \bar{z}_\lambda &= (x_\lambda - x_{\lambda-1}) - (y_\lambda - y_{\lambda-1})i, \end{aligned} \right.$$

so wird

$$z_\lambda \bar{z}_\lambda = s_\lambda^2;$$

die Gleichungen (5) aber lassen sich schreiben:

$$z_{\lambda+1} + z_\lambda + \varepsilon\left\{\frac{z_\lambda}{s_\lambda} - \frac{z_{\lambda+1}}{s_{\lambda+1}}\right\} i = 0. \tag{7}$$

Man hat also

$$z_{\lambda+1}\left\{1 - \frac{\varepsilon i}{s_{\lambda+1}}\right\} = - z_\lambda\left\{1 + \frac{\varepsilon i}{s_\lambda}\right\},$$

$$\bar{z}_{\lambda+1}\left\{1 + \frac{\varepsilon i}{s_{\lambda+1}}\right\} = - \bar{z}_\lambda\left\{1 - \frac{\varepsilon i}{s_\lambda}\right\},$$

$$s_{\lambda+1}^2\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{s_{\lambda+1}^2}\right\} = s_\lambda^2\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{s_\lambda^2}\right\},$$

$$s_{\lambda+1}^2 = s_\lambda^2. \tag{8}$$

Die Seiten des zu suchenden Polygons haben demnach alle dieselbe Länge $\frac{s}{n}$. Die Gleichung (7) nimmt jetzt die Form an

$$\frac{z_{\lambda+1}}{z_\lambda} = \frac{n\varepsilon i + s}{n\varepsilon i - s}. \tag{9}$$

Die Paare aufeinander folgender Seiten des Polygons schließen daher alle denselben Winkel ein. *Das Polygon ist folglich regulär.*

2. Wir betrachten zunächst wieder ein beliebiges geschlossenes Polygon, mit den positiven Seitenlängen $s_1, \ldots s_n$. Auf den geradlinigen Träger der λten Seite dieses Polygons fällen wir vom Anfangspunkte der Koordinaten aus eine Senkrechte, und dieser schreiben wir eine solche positive Richtung zu, daß durch deren im positiven Sinne ausgeführte Drehung um einen rechten Winkel die dem Umlaufssinne des Polygons entsprechende positive Richtung der Polygonseite erhalten wird. Der Träger dieser Polygonseite erhält dann eine Gleichung der Form

$$\cos\Theta_\lambda \cdot x + \sin\Theta_\lambda \cdot y - p_\lambda = 0, \tag{10}$$

worin Θ_λ den mod. 2π bestimmten Winkel zwischen der positiven Richtung der x-Achse und der, wie angegeben, orientierten Normale bedeutet, p_λ aber den Abstand der orientierten Polygonseite vom Anfangspunkte der Koordinaten bezeichnet, gemessen im positiven Sinne der Normale. Der gemeinsame Endpunkt der λten und der $(\lambda + 1)$ten Polygonseite erhält nun die Koordinaten x_λ, y_λ, wofern

$$\left\{\begin{aligned} \sin(\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda)\cdot x_\lambda &= p_\lambda \sin\Theta_{\lambda+1} - p_{\lambda+1}\sin\Theta_\lambda, \\ \sin(\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda)\cdot y_\lambda &= - p_\lambda \cos\Theta_{\lambda+1} + p_{\lambda+1}\cos\Theta_\lambda \end{aligned}\right. \tag{11}$$

gesetzt wird. Für die Länge der Seite s_λ aber ergibt sich der positive Wert

$$s_\lambda = (y_\lambda - y_{\lambda-1}) \cdot \cos \Theta_\lambda - (x_\lambda - x_{\lambda-1}) \cdot \sin \Theta_\lambda$$

oder

$$(12) \qquad s_\lambda = \frac{p_{\lambda+1} - p_\lambda \cos(\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda)}{\sin(\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda)} + \frac{p_{\lambda-1} - p_\lambda \cos(\Theta_\lambda - \Theta_{\lambda-1})}{\sin(\Theta_\lambda - \Theta_{\lambda-1})}.$$

Wie übrigens auch unmittelbar evident, wird demnach der Umfang des Polygons, wenn kein gestreckter Winkel $\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda$ vorkommt, gegeben durch den Ausdruck

$$(13) \qquad s = \sum \left\{ \operatorname{tg} \frac{\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda}{2} + \operatorname{tg} \frac{\Theta_\lambda - \Theta_{\lambda-1}}{2} \right\} p_\lambda,$$

während für den doppelten Flächeninhalt $2F = \sum p_\lambda s_\lambda$ sich die ebenfalls leicht geometrisch abzuleitende Formel

$$(14) \quad 2F = \frac{1}{2} \sum \left\{ (p_{\lambda+1} + p_\lambda)^2 \operatorname{tg} \frac{\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda}{2} - (p_{\lambda+1} - p_\lambda)^2 \operatorname{ctg} \frac{\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda}{2} \right\}$$

findet. Ist das Polygon insbesondere regulär, und verlegt man den Anfangspunkt der Koordinaten in seinen Mittelpunkt, so kann man in der Regel $\operatorname{tg} \frac{\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda}{2} = t$, $p_\lambda = p$ setzen, wodurch die einfachen Gleichungen

$$(15) \qquad s = 2npt, \quad F = np^2 t$$

entstehen. Ausgenommen ist nur, bei geraden Werten der Zahl n, der triviale Fall $\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda \equiv \pi$, mod. 2π. Das Polygon reduziert sich dann auf ein n-mal überdecktes Stück einer geraden Linie. Sein Flächeninhalt ist gleich Null und kann also nicht Extremum sein. Wir dürfen diesen singulären Fall fernerhin ausschließen.

Wir gehen jetzt zu einem dem singulären Polygon „benachbarten" Polygon über, indem wir

$$\operatorname{tg} \frac{\Theta_{\lambda+1} - \Theta_\lambda}{2} = t + \eta_\lambda, \quad p_\lambda = p + h_\lambda$$

setzen. Da bei der Variation des Polygons die Summe der Winkel $\operatorname{arctg}(t + \eta_\lambda)$ konstant bleiben muß, so hat man, bei hinreichend kleinen Werten von $\eta_1, \ldots \eta_n$

$$(16) \qquad (1 + t^2) \sum \eta_\lambda - t \sum \eta_\lambda^2 + \cdots = 0,$$

und da auch der Umfang des Polygons konstant bleiben soll, so ist außerdem, zufolge (13),

$$(17) \qquad 2p \cdot \sum \eta_\lambda + 2t \cdot \sum h_\lambda + \sum \eta_\lambda (h_\lambda + h_{\lambda+1}) = 0.$$

Unter Benutzung dieser Formeln erhält man für den vierfachen Zuwachs $4\Delta F$ der Polygonfläche den Ausdruck

$$-\frac{4p^2t}{1+t^2}\cdot\sum\eta_\lambda^2+t\cdot\sum(h_\lambda+h_{\lambda+1})^2-\frac{1}{t}\cdot\sum(h_{\lambda+1}-h_\lambda)^2+\cdots,$$

wobei die nicht hingeschriebenen Glieder in den als hinreichend klein vorauszusetzenden Größen η_λ, h_λ von höherer als der zweiten Ordnung sind. Bezeichnen wir also schließlich mit 2Θ den im positiven Sinne gemessenen Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Seiten des orientierten regulären Polygons, so erhalten wir die Gleichung

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}&2\Delta F\cdot\sin 2\Theta=\\&-p^2\cdot\sin^2 2\Theta\cdot\sum\eta_\lambda^2-2\cos 2\Theta\cdot\sum h_\lambda^2+2\sum h_\lambda h_{\lambda+1}+\cdots,\end{aligned}\right.$$

deren Inhalt wir nun näher zu untersuchen haben werden. Es kommt dabei offenbar zunächst an auf das Vorzeichen der rechts in (18) stehenden quadratischen Form, deren Argumente durch die Gleichungen (16) und (17) verbunden sind, für hinreichend kleine Werte dieser Argumente. Wählen wir diese nun so klein, daß wir ihre Quadrate und Produkte vernachlässigen und die Reihe (16) schon nach dem ersten Gliede abbrechen dürfen, so liefern uns die Gleichungen (16) und (17) die einfacheren Beziehungen

$$(19)\qquad \sum\eta_\lambda=0,\quad \sum h_\lambda=0.$$

Es genügt, das Vorzeichen der quadratischen Form in (18) unter dieser Voraussetzung zu bestimmen. Diese quadratische Form aber setzt sich zusammen aus einer definiten und zwar negativen Form, die nur von den Größen η_λ abhängt, und einer zweiten quadratischen Form, die nur von den Größen h_λ abhängt.[1])

Sollte sich also finden, daß auch diese zweite Form definit ist, so würde das betrachtete reguläre Polygon eventuell einem Extremum des Flächeninhalts entsprechen, nämlich dann und nur dann, wenn auch die zweite Form nur negativer Werte fähig wäre. Findet sich zweitens, daß die zweite quadratische Form indefinit (semidefinit) ist, aber positive Werte nicht annehmen kann, so liefern die quadratischen

1) Übrigens ist es nützlich zu bemerken, daß die Gleichung $\sum h_\lambda=0$ und mit ihr die Gleichung

$$\Delta F\cdot\sin 2\Theta=-\cos 2\Theta\cdot\sum h_\lambda^2+\sum h_\lambda h_{\lambda+1}$$

nicht nur in der Grenze, sondern allgemein gilt, wenn man von vorn herein sämtliche Zuwachse η_λ gleich Null setzt.

Glieder allein noch keine Entscheidung. Findet sich endlich, daß die zweite Form sowohl positiver als negativer Werte fähig ist, so kann kein Extremum vorliegen.

Es wird nun die aus den Größen h_λ zusammengesetzte quadratische Form definit sein oder semidefinit, oder endlich indefinit, aber nicht semidefinit, je nachdem die Gleichung $(n-1)$ten Grades

$$\begin{vmatrix} 2\cos 2\Theta-\varrho, & -1, & 0, & \ldots & 0, & -1, & 1 \\ -1, & 2\cos 2\Theta-\varrho, & -1, & \ldots & & 0, & 1 \\ 0, & -1, & 2\cos 2\Theta-\varrho, & \ldots & & 0, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \ldots & & -1, & 1 \\ -1, & 0, & 0, & \ldots & & 2\cos 2\Theta-\varrho, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & \ldots & & 1, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

deren Wurzeln $\varrho_1, \ldots \varrho_{n-1}$ sämmtlich reell sind, ausschließlich positive von Null verschiedene Wurzeln, oder auch verschwindende oder endlich negative Wurzeln zuläßt.

Um den Wert $\Phi(\varrho)$ der angeführten $(n+1)$-reihigen Determinante zu ermitteln, schreiben wir r an Stelle von $2\cos 2\Theta - \varrho$ und addieren dann die n ersten Reihen zur letzten. So ergibt sich

$$(r-2)\cdot\Phi(\varrho) = -n\cdot\begin{vmatrix} r & -1 & 0 & \ldots & -1 \\ -1 & r & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & r & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ -1 & 0 & 0 & \ldots -1 & r \end{vmatrix}.$$

Die nur n-reihige Determinante rechts in dieser Gleichung ist eine sogenannte Zirkulante. Ihr Wert kann, wie bekannt, leicht dadurch berechnet werden, daß man sie mit einer zweiten Determinante, nämlich mit dem Differenzenprodukt der $n$ten Einheitswurzeln multipliziert. Setzt man, unter ε irgend eine $n$te Einheitswurzel verstehend,

$$\varphi(\varepsilon) = r - \varepsilon - \varepsilon^{n-1},$$

so ergibt sich als Wert der Zirkulante das über sämtlliche $n$te Einheitswurzeln erstreckte Produkt

$$\varphi(\varepsilon_0)\cdot\varphi(\varepsilon_1)\ldots\varphi(\varepsilon_{n-1});$$

als Wert der vorgelegten Determinante erhält man also schließlich,

wenn $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{n-1}$ die von der Einheit verschiedenen $n$ten Einheitswurzeln bezeichnen, den Ausdruck

$$(20) \qquad \Phi(\varrho) = -n \cdot \prod_{1}^{n-1}{}_j \left\{ 2 \cos 2\Theta - \varrho - \varepsilon_j - \varepsilon_j^{n-1} \right\}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $\Phi(\varrho) = 0$ sind also, bei gegebenem Werte

$$\Theta = \frac{2k\pi}{n}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

die Größen

$$(21) \qquad \varrho_j = 2\left\{ \cos \frac{2k\pi}{n} - \cos \frac{2j\pi}{n} \right\}. \qquad (j = 1, 2, \ldots n-1)$$

Hat also die (nach Voraussetzung übrigens von $\frac{n}{2}$ verschiedene) Zahl k keinen der Werte 1, $n-1$, so finden sich unter den Wurzeln ϱ_j immer negative: *Keines der überschlagenen, insbesondere auch keines der mehrfach umlaufenen regulären Polygone gehört zu einem Extremum des Flächeninhaltes.* Ist aber $k = 1$ oder $k = n-1$, so liegt der zweite der oben unterschiedenen drei Fälle vor. Dann hat man es mit einem einfachen Polygon zu tun, das die Ebene in zwei Teile zerlegt. Die zugehörige quadratische Form ist offenbar negativ-semidefinit. Wollten wir jetzt auf dem betretenen Wege weitergehen, so würden auch die Glieder höherer Ordnung in dem Ausdruck von ΔF zu berücksichtigen sein, und eine solche Untersuchung würde schwerlich sehr einfach ausfallen, angesichts des Umstandes, daß anscheinend viel einfachere Probleme ähnlicher Art schon ernsthafte Schwierigkeiten bieten.

Hier setzt nun, wie man sagen darf, glücklicherweise, eine andere Argumentation ein, derzufolge für den Fall einfacher Polygone die *Existenz* regulärer Extreme im voraus erschlossen werden kann, so daß eine weitere Untersuchung entbehrlich wird. Weierstraß hat auch dieses, in der erwähnten Vorlesung, ausführlich dargelegt. Da aber die hierbei angewendete Schlußfolge gegenwärtig Gemeingut aller Mathematiker geworden ist, so glauben wir nicht weiter auf den Gegenstand eingehen zu sollen.

Die entsprechende Frage der Variationsrechnung würde die sein, ob ein mehrfach umlaufener Kreis eine extreme Fläche hat. Sie ist im Augenblicke im negativen Sinne zu beantworten.

Angenäherte Berechnung eines Bogens, von dem man den Sinus und den Cosinus kennt.

Von PAUL STÄCKEL in Hannover.

1. Für die Berechnung eines Bogens x kleiner als $\frac{1}{2}\pi$, von dem man den Sinus und Cosinus kennt, hat Nicolaus Cusanus eine Näherungsformel angegeben, die in moderner Bezeichnung besagt, daß der Bogen x näherungsweise gleich

$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$$

ist. Hiervon ausgehend hat E. Lampe, *Mathesis (2) 7 (1897), S. 130* eine Reihe weiterer Näherungsformeln entwickelt, indem er die Aufgabe stellte, in den Ausdrücken

$$L_n(x) = x - (a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots + a_n \sin nx)$$

und

$$L_{n,r}(x) = x - \frac{b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots + b_n \sin nx}{c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_r \cos rx}$$

die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ und $c_1, c_2, \ldots, c_r$ so zu bestimmen, daß die Entwicklung nach Potenzen von x mit einer möglichst hohen Potenz beginnt.[1]) Während Lampe die Ermittelung von $L_n(x)$ für beliebiges n und von $L_{n,r}(x)$ für kleinere Werte von n und r mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten durchgeführt hatte, habe ich in einer kürzlich erschienenen Note, *Mathesis (3) 6 (1906), S. 89*, gezeigt, daß man $L_n(x)$ auf einem anderen Wege fast ohne Rechnung finden kann, und daß sich dabei eine merkwürdige Eigenschaft der Funktionen $L_n(x)$ und $L_{n,r}(x)$ ergibt. Da es mir inzwischen

1) Einer freundlichen Mitteilung Lampes entnehme ich, daß nach A. Aubry, *J. de math. spéc. (4) 2 (1893), S. 184, 198, (4) 3 (1894), S. 202* der Näherungsausdruck $L_{2,1}$ schon bei I. Newton vorkommt, und daß, ebenfalls nach A. Aubry, *El Progreso mat. (2) 2 (1900), S. 289* Chr. Kramp die Näherungsausdrücke $L_{2,2}$, $L_{3,2}$, $L_{3,3}$ und $L_{4,3}$ aufgestellt und die obere Grenze der Abweichung für Winkel bis zu 60° bestimmt hat. Aubry verweist dabei auf den fünften Band der *Annales de Gergonne* vom Jahre 1814. Dieser Band enthält in der Tat astronomische Abhandlungen von Kramp, jedoch hat Lampe in ihnen jene Formeln nicht entdecken können. In diesem Zusammenhange mögen endlich auch die eleganten Rechnungen in Erinnerung gebracht werden, die J. Fourier in seiner *Théorie analytique de la chaleur,* Paris 1822, Section VI, § 207—218 angestellt hat.

gelungen ist, die Betrachtungen noch weiter zu vereinfachen, erlaube ich mir, den Lesern des Archivs meine Ergebnisse mitzuteilen, die für Übungen in der Differential- und Integralrechnung mit Nutzen Verwendung finden können.

2. Setzt man

$$x = 2u,$$

so wird:

$$L_n(2u) = 2u - (a_1 \sin 2u + a_2 \sin 4u + a_3 \sin 6u + \cdots + a_n \sin 2nu),$$

und es ist daher

$$\frac{dL_n(2u)}{du} = 2 - (2a_1 \cos 2u + 4a_2 \cos 4u + 6a_3 \cos 6u + \cdots + 2na_n \cos 2nu).$$

Beginnt aber die Entwicklung von $L_n(2u)$ mit der möglichst hohen Potenz von u, so gilt dasselbe von der Ableitung nach u. Nun ist $\cos 2\alpha u$ eine ganze rationale Funktion des Grades 2α von $\sin u$, mithin wird die Ableitung eine ganze Funktion des Grades $2n$ von $\sin u$. Unter allen ganzen Funktionen $2n^{\text{ten}}$ Grades von $\sin u$ beginnt aber die Entwicklung der Funktion

$$A \sin^{2n} u,$$

wo A eine Konstante bedeutet, mit der höchsten, nämlich der $2n^{\text{ten}}$ Potenz von u, folglich ist

$$\frac{dL_n(2u)}{du} = A \sin^{2n} u,$$

also

$$L_n(2u) = A \int_0^u \sin^{2n} u \, du,$$

wo A eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet. Um die Integration auszuführen, hat man die bekannte Formel

$$\sin^{2n} u = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^\alpha \binom{2n}{n-\alpha} \cos 2\alpha u$$

zu benutzen, und erhält sofort:

$$L_n(2u) = \frac{A}{2^{2n}} \binom{2n}{n} u + \frac{A}{2^{2n-1}} \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^\alpha \binom{2n}{n-\alpha} \frac{\sin 2\alpha u}{2\alpha}$$

und hieraus:

$$(1) \qquad L_n(x) = \frac{A}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} x + \frac{A}{2^{2n}} \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^\alpha \binom{2n}{n-\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha}.$$

Der Koeffizient von x in $L_n(x)$ soll gleich 1 sein, mithin ist

$$A = \frac{2^{2n+1} \cdot n!\, n!}{(2n)!},$$

und so ergibt sich schließlich:

$$L_n(x) = x + \frac{2 \cdot n!\, n!}{(2n)!} \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^\alpha \binom{2n}{n-\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha},$$

genau wie bei Lampe.

Da die Ableitung

$$\frac{d L_n(x)}{dx} = \frac{2^{2n} \cdot n!\, n!}{(2n)!} \sin^{2n} \frac{x}{2}$$

ist, also stets positive Werte hat, wächst der Fehler, den man begeht, wenn man x durch

$$\frac{2 \cdot n!\, n!}{(2n)!} \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \binom{2n}{n-\alpha} \frac{\sin \alpha x}{\alpha}$$

ersetzt, mit wachsendem x, bei kleinem x aber wird er näherungsweise gleich dem ersten Gliede sein, das in der Entwicklung dieses Ausdruckes nach Potenzen von x hinter x selbst wirklich auftritt. Dieses Glied hat die Form $C_n x^{2n+1}$. Um den Koeffizienten C_n zu bestimmen, braucht man nur zu beachten, daß die Entwicklung von $\frac{d L_n(x)}{dx}$ nach Potenzen von x mit $-C_n(2n+1)x^{2n}$ beginnt, folglich ist:

$$(2n+1)\, C_n = -\frac{n!\, n!}{(2n)!},$$

und daher

$$C_n = -\frac{n!\, n!}{(2n+1)!};$$

bei Lampe war C_n nur für $n = 2, 3, 4, 5$ bestimmt worden.

3. Um angenäherte Werte des Bogens als Funktion der zugehörigen Werte des Sinus und Cosinus zu finden, ersetzt Lampe in $L_n(x)$ $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x, \ldots$ durch ihre Werte in $\sin x$ und $\cos x$ und erhält so

$$L_n(x) = x - \sin x\,(A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos^2 x + A_3 \cos^3 x + \cdots + A_{n-1} \cos^{n-1} x); \tag{2}$$

für $n = 2, 3, 4, 5$ führt er die mühsame Rechnung wirklich durch. Aus der Formel für die Ableitung von $L_n(x)$:

$$\frac{d L_n(x)}{dx} = \frac{2^{2n} \cdot n!\, n!}{(2n)!} \sin^{2n} \frac{x}{2} \tag{3}$$

aber ergibt sich ein einfaches Verfahren, die Koeffizienten A_0, A_1, ... durch Rekursion zu ermitteln. Es ist nämlich einerseits nach (3):

$$\frac{d L_n(x)}{dx} = \frac{2^n \cdot n!\, n!}{(2n)!}(1 - \cos x)^n,$$

andererseits nach (2):

$$\frac{d L_n(x)}{dx} = 1 - \cos x (A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos^2 x + \cdots + A_{n-1} \cos^{n-1} x)$$
$$+ (1 - \cos^2 x)(A_1 + 2A_2 \cos x + 3A_3 \cos^2 x + \cdots + (n-1) A_{n-1} \cos^{n-2} x),$$

und durch Vergleichung der beiden rechten Seiten ergibt sich, da die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von $\cos x$ übereinstimmen müssen, das System linearer Gleichungen:

$$n A_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{2^n \cdot n!\, n!}{(2n)!},$$

$$(n-1) A_{n-2} = (-1)^{n-2} \binom{n}{1} \frac{2^n \cdot n!\, n!}{(2n)!},$$

$$(n-2) A_{n-3} = (-1)^{n-3} \binom{n}{2} \frac{2^n \cdot n!\, n!}{(2n)!} + (n-1) A_{n-1},$$

. . . .

$$(n - \alpha + 1) A_{n-\alpha} = (-1)^{n-\alpha} \binom{n}{\alpha - 1} \frac{2^n \cdot n!\, n!}{(2n)!} + (n - \alpha + 2) A_{n-\alpha+2},$$

. . . .

$$2 A_1 = - \binom{n}{2} \frac{2^n \cdot n!\, n!}{(2n)!} + 3 A_3,$$

$$1 A_0 = + \binom{n}{1} \frac{2^n \cdot n!\, n!}{(2n)!} + 2 A_2;$$

dazu kommt noch, bei Vergleichung der absoluten Glieder, die Relation:

$$A_1 = \frac{2^n \cdot n!\, n!}{(2n)!} - 1,$$

die man zur Prüfung der Rechnung benutzen kann.

4. Wenn man in

$$L_{n,r}(x) = x - \frac{b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx}{c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_r \cos rx}$$

Zähler und Nenner nach Potenzen von x entwickelt, so beginnt die Entwicklung des Nenners mit dem Gliede

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_r,$$

das als von Null verschieden vorausgesetzt werden möge; bei der Bestimmung von $c_0, c_1, \ldots, c_n$ nach der Methode der Reihenentwicklung mit unbestimmten Koeffizienten ergibt sich in der Tat immer eine von Null verschiedene Summe dieser Koeffizienten.

Soll jetzt die Entwicklung von $L_{n,r}(x)$ nach Potenzen von x mit einer möglichst hohen Potenz von x beginnen, so gilt dasselbe von der Ableitung nach x, die sich als ein Bruch mit dem Nenner

$$(c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_r \cos rx)^2$$

ergibt, während der Zähler sich als eine ganze Funktion von $\cos x$ des Grades $n+r$ darstellen läßt; denn wenn m eine ganze positive Zahl ist, so wird $\cos mx$ eine ganze Funktion des Grades m von $\cos x$, $\sin mx$ aber gleich $\sin x$ mal einer ganzen Funktion des Grades $m-1$ von $\cos x$. Die Entwicklung der Ableitung von $L_{n,r}(x)$ nach Potenzen von x beginnt aber, weil $c_0 + c_1 + \cdots + c_r$ von Null verschieden ist, mit derselben Potenz, wie die des Zählers, folglich muß man dafür sorgen, daß diese mit einer möglichst hohen Potenz von x anfängt. Setzt man wieder

$$x = 2u,$$

so wird der Zähler eine ganze Funktion des Grades $2(n+r)$ von $\sin u$, mithin muß er die Form

$$B \sin^{2(n+r)} u$$

haben, wo B eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet.

Hieraus folgt, daß die merkwürdige Formel gilt:

$$\frac{d L_{n,r}(x)}{dx} = \frac{B \sin^{2(n+r)} \frac{x}{2}}{(c_0 + c_1 \cos x + \cdots + c_r \cos rx)^2}; \tag{4}$$

ist z. B. $n = 2$, $r = 1$, so erhält man:

$$\frac{d}{dx}\left(x - \frac{28 \sin x + \sin 2x}{18 + 12 \cos x}\right) = -\frac{192 \sin^6 \frac{x}{2}}{(18 + 12 \cos x)^2}.$$

Aus den von Lampe gefundenen Funktionen $L_{n,r}(x)$ kann man so interessante Aufgaben der Differentialrechnung entnehmen; um das Auftreten des halben Bogens zu vermeiden, wird man gut tun, $x = 2u$ einzuführen. Dagegen ergibt sich auf diesem Wege nicht die unmittelbare Bestimmung der Konstanten $b_1, \ldots, b_n$; $c_0, \ldots, c_r$; B. Man könnte zwar den Ausdruck (4) für die Ableitung von $L_{n,r}(x)$ dazu benutzen, allein die Gleichungen, die man erhält, sind so verwickelt, daß ohne Zweifel die Methode der Reihenentwicklung mit unbestimmten Koeffizienten den Vorzug verdient.

Hannover, im Juni 1906.

Einige neue Formeln zur angenäherten Berechnung des Bogens aus dem Sinus.

Von EMIL LAMPE in Berlin.

Seit der Veröffentlichung des Aufsatzes, zu dem Herr Stäckel in dem vorangehenden Artikel eine elegante Vereinfachung in der Herleitung der dort gegebenen Formeln mitteilt, habe ich in Verallgemeinerung der Beziehung, auf welche sich die Huygenssche Näherungskonstruktion für die Länge eines Kreisbogens zurückführen läßt, einige neue Formeln für meine Übungen in der höheren Mathematik aufgestellt, die ich bei dieser Gelegenheit zu gleichem Gebrauche für andere Lehrer abdrucken lasse.

Man setze das Produkt:

$$(a^2-1)(a^4-1)(a^6-1)\dots(a^{2n}-1)=P_n,$$

also

$$P_1=a^2-1,\quad P_2=(a^2-1)(a^4-1),\quad P_3=(a^2-1)(a^4-1)(a^6-1),$$

so ist:

$$\frac{1}{P_1}\left(-\sin x+a^3\sin\frac{x}{a}\right)=x-\frac{x^5}{a^2\cdot 5!}+\cdots,$$

$$\frac{1}{P_2}\left(\sin x-a^3\frac{a^4-1}{a^2-1}\sin\frac{x}{a}+a^8\sin\frac{x}{a^2}\right)=x+\frac{x^7}{a^6\cdot 7!}+\cdots,$$

$$\frac{1}{P_3}\left(-\sin x+a^3\frac{a^6-1}{a^2-1}\sin\frac{x}{a}-a^8\frac{a^6-1}{a^2-1}\sin\frac{x}{a^2}+a^{15}\sin\frac{x}{a^3}\right)=x-\frac{x^9}{a^{12}\cdot 9!}+\cdots,$$

$$\frac{1}{P_4}\left(\sin x-a^3\frac{a^8-1}{a^2-1}\sin\frac{x}{a}+a^8\cdot\frac{a^8-1}{a^2-1}\cdot\frac{a^6-1}{a^4-1}\sin\frac{x}{a^2}\right.$$
$$\left.-a^{15}\cdot\frac{a^8-1}{a^2-1}\sin\frac{x}{a^3}+a^{24}\sin\frac{x}{a^4}\right)=x+\frac{x^{11}}{a^{20}\cdot 11!}+\cdots,$$

$$\frac{1}{P_5}\left(-\sin x+a^3\cdot\frac{a^{10}-1}{a^2-1}\sin\frac{x}{a}-a^8\cdot\frac{a^{10}-1}{a^2-1}\cdot\frac{a^8-1}{a^4-1}\sin\frac{x}{a^2}\right.$$
$$\left.+a^{15}\cdot\frac{a^{10}-1}{a^2-1}\cdot\frac{a^8-1}{a^4-1}\sin\frac{x}{a}-a^{24}\cdot\frac{a^{10}-1}{a^2-1}\sin\frac{x}{a^4}+a^{35}\sin\frac{x}{a^5}\right)$$
$$=x-\frac{x^{13}}{a^{30}\cdot 13!}+\cdots.$$

Diese Formeln erweisen sich als besondere Fälle der folgenden:

$$\frac{(-1)^n}{P_n}\Big(\sin x - a^{1\cdot 3}\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\sin\frac{x}{a} + a^{2\cdot 4}\cdot\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\cdot\frac{a^{2n-2}-1}{a^4-1}\sin\frac{x}{a^2}$$

$$- a^{3\cdot 5}\cdot\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\cdot\frac{a^{2n-2}-1}{a^4-1}\cdot\frac{a^{2n-4}-1}{a^6-1}\sin\frac{x}{a^3}$$

$$+ a^{4\cdot 6}\cdot\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\cdot\frac{a^{2n-2}-1}{a^4-1}\cdot\frac{a^{2n-4}-1}{a^6-1}\cdot\frac{a^{2n-6}-1}{a^8-1}\sin\frac{x}{a^4}$$

$$- \cdots + (-1)^n a^{n(n+2)}\sin\frac{x}{a^n}\Big) = x + \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{a^{n(n+1)}(2n+3)!} + \cdots.$$

Setzt man $a=2$ und x gleich einem aliquoten Teile von π, dessen Sinus bekannt ist, z. B. $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$ usw., so lassen sich die Sinus von $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{4}x$, $\frac{1}{8}x$, ... leicht berechnen, und man kann daher die vorstehenden Formeln zur angenäherten Berechnung von π benutzen.

Für $a=2$ lauten die obigen Formeln:

$$\tfrac{1}{3}\Big(-\sin x + 8\sin\frac{x}{2}\Big) = x - \frac{x^5}{2^2\cdot 5!} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{45}\Big(\sin x - 40\sin\frac{x}{2} + 256\sin\frac{x}{4}\Big) = x + \frac{x^7}{2^6\cdot 7!} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2835}\Big(-\sin x + 168\sin\frac{x}{2} - 5376\sin\frac{x}{4} + 32768\sin\frac{x}{8}\Big) = x - \frac{x^9}{2^{12}\cdot 9!} + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{722925}\Big(\sin x - 680\sin\frac{x}{2} + 91392\sin\frac{x}{4} - 2785280\sin\frac{x}{8} + 16777216\sin\frac{x}{16}\Big)$$

$$= x + \frac{x^{11}}{2^{20}\cdot 11!} + \cdots.$$

Berlin, den 7. März 1907.

Über die größte Schwankung einer analytischen Funktion in einem Kreise.

Von Edmund Landau in Berlin und Otto Toeplitz in Göttingen.

1. Es sei $\varphi(x)$ eine für $|x| \leq R$ reguläre analytische Funktion. Es sei D ihre größte Schwankung auf der Grenze, d. h. der größte Wert von $|\varphi(a)-\varphi(b)|$ für $|a| = R$, $|b| = R$. Dann ist, wie Herr Schottky[1]) bewiesen hat,

$$|\varphi'(0)| \leq \frac{2}{\pi}\frac{D}{R}$$

1) „Über die Wertschwankungen der harmonischen Funktionen zweier reellen Veränderlichen und der Funktionen eines komplexen Arguments", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 117, 1897, S. 253.

und, wie E. Landau[1]) bewiesen hat, sogar

$$|\varphi'(0)| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{D}{R}.$$

Es fragt sich nun, ob die Konstante $\frac{1}{\sqrt{3}}$ durch eine noch kleinere ersetzt werden kann, und, wenn dies der Fall ist, welches die kleinstmögliche Konstante ist. D. h. es fragt sich, welche Konstante α den beiden Bedingungen genügt:

1) Jede für $|x| \leqq R$ reguläre Funktion erfüllt die Beziehung

$$|\varphi'(0)| \leqq \alpha \frac{D}{R}.$$

2) Es gibt bei gegebenem $\delta > 0$ eine Funktion $\varphi(x)$, welche in einem Kreise $|x| \leqq R$ regulär ist, und für welche

$$|\varphi'(0)| > (\alpha - \delta) \frac{D}{R}$$

ist.

Es ist jedenfalls

$$\alpha \geqq \frac{1}{2},$$

da für eine lineare Funktion

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

und beliebiges $R > 0$

$$D = 2R\,|a_1|,$$

also

$$|\varphi'(0)| = |a_1| = \frac{1}{2} \frac{D}{R} > \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \frac{D}{R}$$

ist. Ferner ist nach Herrn Schottky

$$\alpha \leqq \frac{2}{\pi} = 0{,}636\ldots$$

und nach E. Landau

$$\alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577\ldots,$$

also

$$0{,}5 \leqq \alpha \leqq 0{,}577\ldots$$

Es ist uns nun die Bestimmung von α gelungen, und zwar ist

$$\alpha = \frac{1}{2},$$

---

1) „Über einige Ungleichheitsbeziehungen in der Theorie der analytischen Funktionen“, Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 11, 1906, S. 35.

wie wir im Folgenden beweisen wollen. Die Behauptung lautet also: „Wenn $\varphi(x)$ für $|x| \leqq R$ regulär ist, so ist

$$|\varphi'(0)| \leqq \frac{1}{2}\frac{D}{R}.\text{“} \tag{1}$$

Anders ausgedrückt: „Wenn

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots$$

für $|x| \leqq R$ regulär ist, so gibt es ein Zahlenpaar a, b, für welches

$$|a| = R, \quad |b| = R$$

und

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \geqq 2R\,|a_1| \tag{2}$$

ist“.

Wir werden sogar zeigen, daß (2) stets für ein passend gewähltes Zahlenpaar a, b erfüllt ist, das den Bedingungen

$$|a| = R, \quad b = -a$$

genügt.

In der Tat ist für $|x| \leqq R$ die Funktion

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2x} = a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \cdots$$

regulär; da der absolute Betrag einer für $|x| \leqq R$ regulären Funktion seinen größten Wert des Gebietes $|x| \leqq R$ in mindestens einem Punkte der Peripherie $|x| = R$ erreicht, gibt es ein a, für das

$$|a| = R,$$

$$\left|\frac{\varphi(a) - \varphi(-a)}{2a}\right| \geqq |a_1|$$

ist, also

$$|\varphi(a) - \varphi(-a)| \geqq 2R\,|a_1|,$$

was zu beweisen war.

2. Diese Tatsache läßt sich auch durch folgende Schlüsse begründen, bei deren Ausführung uns eine Mitteilung des Herrn Fejér über ein anderes Problem[1]) beeinflußt hat. Es ist

$$2\pi i \varphi'(0) = \int \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx,$$

1) Dasselbe bezog sich auf Funktionen reeller Variablen.

wo x den Kreis $Re^{\vartheta i}$ in positivem Sinne durchläuft, also

$$2\pi i\varphi'(0) = \frac{i}{R}\int_0^{2\pi}\varphi(Re^{\vartheta i})e^{-\vartheta i}d\vartheta,$$

$$2\pi R\varphi'(0) = \int_0^{2\pi}\varphi(Re^{\vartheta i})e^{-\vartheta i}d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(Re^{(\pi+\Theta)i})e^{-(\pi+\Theta)i}d\Theta$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(-Re^{\Theta i})e^{-\Theta i}d\Theta = -\int_0^{2\pi}\varphi(-Re^{\Theta i})e^{-\Theta i}d\Theta,$$

folglich

$$4\pi R\varphi'(0) = \int_0^{2\pi}(\varphi(Re^{\vartheta i}) - \varphi(-Re^{\vartheta i}))e^{-\vartheta i}d\vartheta$$

und daher, wenn D' das Maximum von $|\varphi(a) - \varphi(-a)|$ für $|a| = R$ bezeichnet,

$$4\pi R|\varphi'(0)| \leqq 2\pi \cdot D',$$

$$|\varphi'(0)| \leqq \frac{1}{2}\frac{D'}{R} \leqq \frac{1}{2}\frac{D}{R}.$$

3. Nachdem wir diese Beweise der Relation

$$|\varphi'(0)| \leqq \frac{1}{2}\frac{D}{R}$$

gefunden hatten, vermuteten wir, daß in ihr das Gleichheitszeichen nur für die lineare Funktion

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x$$

(und beliebiges R) gilt, daß also für jede andere Funktion und jedes R

$$|\varphi'(0)| < \frac{1}{2}\frac{D}{R}$$

ist. Wir teilten den Inhalt der obigen Nummern **1** und **2** sowie diese Vermutung Herrn Hartogs mit und verdanken ihm folgenden Beweis jener Tatsache, also des Satzes:

„Wenn

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $|x| \leqq R$ regulär und

$$|a_1| = \frac{1}{2}\frac{D}{R}$$

ist, so ist

$$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \cdots = 0.“$$

Aus der Vorraussetzung folgt wegen

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x}=a_1+a_3x^2+a_5x^4+\cdots$$

zunächst, daß

$$a_3=a_5=a_7=\cdots=0$$

ist, da sonst in einem passend wählbaren Punkte der Peripherie

$$\left|\frac{\varphi(a)-\varphi(-a)}{2a}\right|>|a_1|,$$

also

$$D>2R\,|a_1|$$

wäre. Demnach ist

$$\varphi(x)-\varphi(-x)=2a_1x.$$

Wenn $\varphi(x)$ nicht a_0+a_1x ist, ist $\varphi'(x)$ nicht konstant; daher läßt sich, falls $a_1 \neq 0$ ist[1]), a so wählen, daß $|a|=R$ und[2]) $\bar{a}_1\varphi'(a)$ nicht reell ist. Wird

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_nx^n=\bar{\varphi}(x)$$

gesetzt, so ist für reelle ϑ

$$|\varphi(ae^{\vartheta i})-\varphi(-a)|^2=|\varphi(ae^{\vartheta i})-\varphi(a)+2aa_1|^2$$
$$=\{\varphi(ae^{\vartheta i})-\varphi(a)+2aa_1\}\ \{\bar{\varphi}(\bar{a}e^{-\vartheta i})-\bar{\varphi}(\bar{a})+2\bar{a}\bar{a}_1\},$$

$$\frac{d\{|\varphi(ae^{\vartheta i})-\varphi(-a)|^2\}}{d\vartheta}$$
$$=aie^{\vartheta i}\varphi'(ae^{\vartheta i})\ \{\bar{\varphi}(\bar{a}e^{-\vartheta i})-\bar{\varphi}(\bar{a})+2\bar{a}\bar{a}_1\}$$
$$-\bar{a}ie^{-\vartheta i}\bar{\varphi}'(\bar{a}e^{-\vartheta i})\ \{\varphi(ae^{\vartheta i})-\varphi(a)+2aa_1\}$$
$$=2\mathfrak{R}\ \{aie^{\vartheta i}\varphi'(ae^{\vartheta i})\,(\bar{\varphi}(\bar{a}e^{-\vartheta i})-\bar{\varphi}(\bar{a})+2\bar{a}\bar{a}_1)\}.$$

Der Wert dieser Ableitung für $\vartheta=0$ ist

$$=2\mathfrak{R}\,(ai\varphi'(a)\cdot 2\bar{a}\bar{a}_1)=4R^2\mathfrak{R}\,(i\bar{a}_1\varphi'(a)),$$

also von Null verschieden. Daher gibt es ein reelles ϑ, für welches

$$|\varphi(ae^{\vartheta i})-\varphi(-a)|^2>|\varphi(a)-\varphi(-a)|^2=4R^2\,|a_1|^2,$$
$$|\varphi(ae^{\vartheta i})-\varphi(-a)|>2R\,|a_1|$$

ist, sodaß, entgegen der Voraussetzung,

$$D>2R\,|a_1|$$

wäre.

---

1) Für $a_1=0$ ist die Behauptung trivial.

2) $\bar{z}$ bezeichne im Folgenden die zu z konjugierte komplexe Größe.

4. Wir wollen nunmehr folgenden allgemeineren Satz beweisen: „Wenn $\varphi(x)$ für $|x| \leqq R$ regulär ist und D_r die größte Schwankung von $\varphi(x)$ für $|x| = r$ bezeichnet, wo $0 < r \leqq R$ ist, so nimmt $\frac{D_r}{r}$ mit wachsendem r niemals ab, d. h. für $0 < r < \bar{r} \leqq R$ ist

$$\frac{D_r}{r} \leqq \frac{D_{\bar{r}}}{\bar{r}}.\text{“} \tag{3}$$

Hierin ist die in **1** und **2** bewiesene Relation (1) enthalten, da offenbar

$$\lim_{r=0} \frac{D_r}{r} = 2\,|\varphi'(0)| \tag{4}$$

ist und aus (3) und (4)

$$2\,|\varphi'(0)| \leqq \frac{D_R}{R}$$

folgt.

Die Behauptung (3) beweisen wir folgendermaßen. Die Funktion zweier Variablen

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(xy)}{x}$$

ist für $|x| \leqq R$, $|y| \leqq 1$ regulär; das Maximum ihres absoluten Betrages für $|x| = r$, $|y| = 1$ ist also kleiner oder eben so groß als das Maximum ihres absoluten Betrages für $|x| = \bar{r}$, $|y| = 1$, wo $0 < r < \bar{r} \leqq R$ ist, womit die Relation (3) bewiesen ist.

Den 7. Oktober 1906.

Das Abrollen von Kurven bei geradliniger Bewegung eines Punktes.

Bemerkungen zu dem Aufsatze gleichen Titels von P. Kokott [Archiv (3) **11**, 1906, 60—63].

Von H. WIELEITNER in Speyer.

An der angeführten Stelle hat Herr Kokott mehrere Beispiele gegeben für den Fall, daß eine Kurve auf einer andern abrollt, wobei ein fester Punkt der Ebene der ersten Kurve eine Gerade beschreibt. Es war dem Verfasser dabei offenbar entgangen, daß alle diese Beispiele, mit Ausnahme vielleicht von Nr. 7, bereits bekannt sind. Sie sind, mehr oder minder explizit, z. B. enthalten in E. Cesàros *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, Leipzig (Teubner) 1901. Da sie

aber auch dort nur gelegentlich auftreten, ist es für die Leser des Archivs vielleicht von Interesse, wenn ich im folgenden, unter Hervorhebung eines alle Beispiele umfassenden Satzes, der bei Herrn Kokott ebenfalls fehlt, eine Zusammenstellung versuche, wie sie unserer heutigen Kenntnis entsprechen mag.

Das Band, das alle derartigen Sätze verknüpft, ist das Theorem von Habich[1]):

Wenn bei der Abwicklung einer Kurve K *auf einer Geraden* Γ *ein in der Ebene der Kurve fester Punkt* P *eine Kurve* Λ *beschreibt, so läßt die Fußpunktkurve* Φ *von* K *in bezug auf* P, *wenn sie auf* Λ *abrollt, den Punkt* P *die Gerade* Γ *beschreiben.*

Ist nun K eine Sinusspirale[2]), P ihr Pol, so wird Λ zu einer bestimmten Ribaucourschen Kurve, Φ ist aber wieder eine andere Sinusspirale, und so erhält man als Spezialfall des Habichschen Theorems den Satz:

Rollt eine Sinusspirale vom Index n *auf einer Ribaucourschen Kurve vom Index* $2n-1$, *so beschreibt ihr Pol die geradlinige Direktrix der letzteren.*

Diese beiden Sätze, im Verein mit der Nr. 7 des Herrn Kokott, die sich nicht recht einfügt (s. unten Nr. 7) geben zu folgenden Beispielen Veranlassung, wo bekannte Kurven aufeinander rollen.

1. Ist K ein Kreis, so beschreibt ein beliebiger Punkt P seiner Ebene eine Zykloide (1. verschlungene — 2. gespitzte — 3. geschweifte). Φ ist dann eine Pascalsche Schnecke (1. mit Knoten — 2. mit Spitze = Kardioide — 3. mit isoliertem Punkt). P ist der Doppelpunkt der Schnecke; er beschreibt die Direktrix der Zykloide (Kokott Nr. 2 und **3**).

2a. Ist K ein Kegelschnitt (1. Ellipse — 2. Parabel — 3. Hyperbel), so beschreibt ein Brennpunkt P eine Delaunaysche Kurve (1. elliptische — 2. gemeine — 3. hyperbolische Kettenlinie). Die Fußpunktkurve ist ein Kreis oder im Falle 2 eine Gerade (Kokott Nr. **6**). P ist ein beliebiger Punkt der Ebene des Kreises oder der Geraden.

2b. Es sei P der Mittelpunkt eines Kegelschnittes K. Dann ist Λ eine Sturmsche Kurve. Φ ist eine Boothsche Lemniskate, deren Mittelpunkt P ist. Spezieller Fall: K gleichseitige Hyperbel, Φ Bernoullische Lemniskate, Λ Ribaucoursche Kurve vom Index 3 (Kokott Nr. **1**).

3a. K sei eine Zykloidale (gespitzte Epi- oder Hypozykloide). Der Mittelpunkt P des Basiskreises beschreibt eine Ellipse Λ. Die

1) *Sur les roulettes.* — Mathesis **2**, 1882, 145—148.

2) Bez. Definition und Eigenschaften dieser und der anderen hier erwähnten Kurven sehe man das Buch von G. Loria, *Spezielle Kurven*, Leipzig (Teubner) 1902.

Fußpunktkurve Φ ist eine sternförmige Trochoidale (Rosen-Kurve (Kokott Nr. 5)).

3b. K sei eine gewöhnliche (gespitzte) Kreisevolvente, dann ist Λ eine Parabel, Φ eine Archimedische Spirale (verschlungene Kreisevolvente). Dies ist der von Herrn Kokott unter Nr. 7 erwähnte spezielle Fall.

3c. Ist K eine Pseudozykloidale[1]) (1. Parazykloide — 2. Hyperzykloide), so beschreibt der Mittelpunkt P des Basiskreises eine Hyperbel Λ mit Γ als (1. reeller — 2. imaginärer) Achse. Die Fußpunktkurve Φ ist eine spezielle Pseudotrochoide (1. Differenzenspirale — 2. Summenspirale). Spezieller Fall: K eine Pseudozykloide, Λ eine gleichseitige Hyperbel; ebenfalls zwei Arten.

4. Rollt eine logarithmische Spirale K auf einer Geraden Γ, so beschreibt der Pol P der Spirale eine Gerade Λ, deren Neigungswinkel ω gegen Γ durch die Gleichung $\operatorname{tg} \omega = k$ gegeben ist, wenn die Gleichung der logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten $\varrho = Ce^{k\theta}$ ist. Φ ist zu K kongruent.[2])

Bemerkung. Die logarithmische Spirale kann als zwischen Para- und Hyperzykloiden stehend betrachtet werden (Cesàro S. 58). Die Hyperbel Λ ist dann in ein Linienpaar ausgeartet; die Hyperbelachsen vertauschen sich beim Übergange.

5. Die Sinusspirale vom Index $n = -\frac{1}{3}$ ist die sogenannte Tschirnhausensche Kubik (Loria S. 401, 614 und 666). Der Pol P teilt die Strecke vom Knoten bis zum Scheitel der Schleife im Verhältnis 8 : 1. Dieser beschreibt beim Rollen auf einer Geraden nach einem Satze von Bonnet eine Ribaucoursche Kurve vom Index $\frac{n-1}{n+1} = -2$, d. i. eine Parabel. Gleichzeitig ist die Tschirnhausensche Kubik die negative Fußpunktkurve einer kongruenten Parabel für den Brennpunkt als Pol (Salmon-Fiedler, *Höhere Kurven*, 2. Aufl. Leipzig (Teubner) 1882, S. 135.)[3]) Φ und Λ sind also zwei kongruente Parabeln, P der Brennpunkt der einen (Kokott Nr. 4).

6. Wenn eine gleichseitige Hyperbel Φ auf einer Sinusspirale Λ vom Index $n = -5$ rollt, so beschreibt der Mittelpunkt P der Hyperbel

1) Ausführliche Literaturangaben bei E. Wölffing, *Über Pseudotrochoiden*, Zeitschr. Math. Phys. 44, 139—166, 1899.

2) Der Winkel $\omega = 45^0$, den Herr Kokott irrtümlich als für alle log. Spiralen geltend hingestellt, entspricht nur der Spirale $\varrho = Ce^{\theta}$.

3) Bei Loria (S. 86/87), der bei der Fülle des Stoffes offenbar die Identität der so definierten Kubik mit den an den anderen zitierten Stellen behandelten Kurven übersah, wird sie als »Trisektrix von Catalan« aufgeführt. Außerdem teilt mir Herr E. Köstlin mit, daß der von Herrn Loria (S. 93) flüchtig erwähnte Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die eine Parabel berühren und durch deren Brennpunkt gehen, ebenfalls die Tschirnhausensche Kubik sei.

eine Gerade Γ (Cesàro S. 96). Die vermittelnde Kurve K ist hier die negative Fußpunktkurve der gleichseitigen Hyperbel in bezug auf den Mittelpunkt, eine wenig beachtete Linie.

7. In Nr. 7 stellt Herr Kokott einen Satz auf, den man so aussprechen kann: Rollt eine Spirale höheren Grades Φ mit der Gleichung in Polarkoordinaten $\varrho^n = a^n \theta$ auf einer Parabel höheren Grades Λ mit der kartesischen Gleichung $x = \frac{n}{n+1} \frac{y^{n+1}}{a^n}$, so beschreibt der Pol P der Spirale ($\varrho = 0$) eine Gerade Γ. Es ist interessant hier die Kurvenfamilie K zu bestimmen, die im Sinne des Habichschen Theorems vermittelt. Das sind die negativen Fußpunktkurven der Spiralen höheren Grades in bezug auf den Scheitel, Kurven, die für ein allgemeines n offenbar noch nicht untersucht sind. Ich will daher wenigstens ihre Gleichungen aufstellen.

Das Lot auf einem Radiusvektor hat die Gleichung

$$x \cos\theta + y \sin\theta = a\theta^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

Sind also u und v Plückersche Linienkoordinaten, so ist

$$au = -\theta^{-\frac{1}{n}} \cos\theta, \quad av = -\theta^{-\frac{1}{n}} \sin\theta, \tag{2}$$

woraus sofort die Gleichung in Linienkoordinaten folgt:

$$a^n \sqrt{(u^2 + v^2)^n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{v}{u} = 1. \tag{3}$$

In kartesischen Koordinaten erhält man eine Parameterdarstellung, indem man (1) nach θ differenziert. Dies gibt die Gleichung

$$-x \sin\theta + y \cos\theta = \frac{1}{n} a\theta^{\frac{1-n}{n}}. \tag{4}$$

Nimmt man hierzu (1), so ergibt sich für die gesuchten Kurven

$$x = \frac{a}{n}\theta^{\frac{1-n}{n}} (n\theta\cos\theta - \sin\theta), \quad y = \frac{a}{n}\theta^{\frac{1-n}{n}} (n\theta\sin\theta + \cos\theta). \tag{5}$$

Man erkennt hier für $n = 1$ sofort die gewöhnliche Kreisevolvente, die negative Fußpunktkurve der Archimedischen Spirale $\varrho = a\theta$ (Nr. 3b).

Um eine Darstellung in natürlichen Koodinaten s (Bogen) und R (Krümmungsradius) zu bekommen, berechne man $\frac{ds}{d\theta}$ aus (5) und bedenke, daß θ als Tangentialwinkel genommen werden kann (höch-

stens abgesehen von einer additiven Konstanten), sodaß $R = \frac{ds}{d\theta}$ gesetzt werden darf. Man erhält

$$(6)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = -\frac{a}{n^2}\theta^{\frac{1-2n}{n}} \sin\theta\,(1 - n + n^2\theta^2) \\ \frac{dy}{d\theta} = -\frac{a}{n^2}\theta^{\frac{1-2n}{n}} \cos\theta\,(1 - n + n^2\theta^2) \end{cases}$$

und hieraus $\frac{ds}{d\theta}$ oder

$$(7)\qquad R = \frac{a}{n^2}\theta^{\frac{1-2n}{n}}(1 - n + n^2\theta^2)$$

$$(7^*)\qquad s = \frac{a}{n(n+1)}\theta^{\frac{1-n}{n}}(1 + n + n^2\theta^2).$$

Diese beiden Gleichungen (7) und (7*) geben eine Parameterdarstellung in natürlichen Koordinaten; es genügt aber schon eine, etwa (7), um die in Rede stehenden Kurven zu charakterisieren. Wenn nun der Exponent $\frac{1-2n}{n}$ gleich einer positiven ganzen Zahl g (0 eingeschlossen) wäre, so wäre gemäß dieser Darstellung die fragliche Kurve eine $(g+2)^{\text{te}}$ Kreisevolvente.[1]) Zu diesem Zwecke ist nur $n = \frac{1}{g+2}$ zu nehmen, also gleich einem Stammbruch. Wie wir schon wissen, ist auch noch der Fall $g = -1$ mit einschließbar, welcher der ersten Kreisevolvente entspricht. Die als Ort des Mittelpunktes P des Grundkreises vom Radius a aufretende Parabel höheren Grades hat dann die Gleichung $(g+3)\,x^{g+2} = y^{g+3}$. Dieser Satz ist aber nur ein spezieller Fall eines allgemeineren Theorems, das ich in der nächsten Nummer aufstellen will.

8. Es sei die abrollende Kurve Φ eine algebraische Spirale mit der Gleichung

$$\varrho = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \cdots + a_n\theta^n.$$

Der Pol P ($\varrho = 0$), der für die Spirale ein n-facher Punkt ist, soll eine Gerade Γ beschreiben. Dann hat man für die feste Kurve Λ nach dem Verfahren des Herrn Kokott $\varrho\, d\theta = dx$, also

$$(9)\qquad x = a + a_0\theta + \tfrac{1}{2}a_1\theta^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_n\theta^{n+1},$$

dazu

$$(9^*)\qquad y = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \cdots + a_n\theta^n.$$

---

1) Vgl. H. Onnen, *Discussion d'un système de spirales d'après leurs équations essentielles.* Arch. Néerl. **10**, 1875, S. 361—379.

Diese beiden Gleichungen geben eine Parameterdarstellung der Basiskurve Λ, die hiernach eine algebraische, sog. »rational-ganze Kurve«[1] $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Γ ist identisch mit $y=0$. Um K zu erhalten, suche ich wieder die negativen Fußpunktkurven von (8). Man hat die beiden Gleichungen

$$(10)\qquad \begin{cases} x\cos\theta + y\sin\theta = a_0 + a_1\theta + \cdots + a_n\theta^n \\ -x\sin\theta + y\cos\theta = a_1 + 2a_2\theta + \cdots + na_n\theta^{n-1} \end{cases}$$

und hieraus

$$(11)\qquad \begin{cases} x = (a_0 + a_1\theta + \cdots + a_n\theta^n)\cos\theta - (a_1 + 2a_2\theta + \cdots + na_n\theta^{n-1})\sin\theta \\ y = (a_0 + a_1\theta + \cdots + a_n\theta^n)\sin\theta + (a_1 + 2a_2\theta + \cdots + na_n\theta^{n-1})\cos\theta, \end{cases}$$

ferner

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = -[(a_0+2a_2) + (a_1+6a_3)\theta + \cdots + (a_{n-2} + n(n-1)a_n)\theta^{n-2} \\ \qquad\qquad + a_{n-1}\theta^{n-1} + a_n\theta^n]\sin\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \quad [(a_0+2a_2) + (a_1+6a_3)\theta + \cdots + (a_{n-2} + n(n-1)a_n)\theta^{n-2} \\ \qquad\qquad + a_{n-1}\theta^{n-1} + a_n\theta^n]\cos\theta, \end{cases}$$

also

$$(13)\qquad \frac{ds}{d\theta} = R = (a_0+2a_2) + (a_1+6a_3)\theta + \cdots + (a_{n-2}+n(n-1)a_n)\theta^{n-2} + a_{n-1}\theta^{n-1} + a_n\theta^n.$$

Das ist aber die natürliche Gleichung einer ganz allgemeinen n^{ten} Kreisevolvente. So haben wir nicht nur den Satz, *daß die Fußpunktkurve einer n^{ten} Kreisevolvente in bezug auf den Mittelpunkt des Grundkreises eine algebraische Spirale von der Gleichungsform* (8) *ist*, sondern vermittels des Habichschen Theorems auch den folgenden: *Rollt eine n^{te} Kreisevolvente auf einer Geraden, so beschreibt der Mittelpunkt ihres Grundkreises eine rational-ganze algebraische Kurve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung.*

Unter diesen höheren Kreisevolventen ist besonders eine eingehender betrachtet worden, nämlich ein spezieller Fall der zweiten, d. i. die sog. Sturmsche Spirale (oder Spirale von Norwich) mit der natürlichen Gleichung

$$(14)\qquad 9as^2 = (R+2a)^2(R-a).$$

Da man für $R=0$ $s=\pm\frac{2}{3}ai$ erhält, sind ihre beiden Spitzen imaginär und sie hat ungefähr die Form einer Archimedischen Spirale. Indem ich nun

$$R = a(\theta-\mu)(\theta-\nu)$$

1) S. A. Brill, *Über Singularitäten ebener algebraischer Kurven und eine neue Kurvenspezies,* Math. Ann. **16**, 348—408, 1880, bes. § 1.

setze, mit der Bedingung, daß $s = \int_0^\theta R\,d\theta$ für $\theta = \mu$ bezw. $\theta = \nu$ gleich $\pm \frac{2}{3} a i$ werde, bekomme ich schließlich $\mu = -\nu \sqrt[3]{i}$, dabei

(15) $$R = a(1 + \theta^2), \quad s = \frac{a}{3}\theta(3 + \theta^2),$$

woraus in der Tat durch Elimination von θ wieder (14) folgt. Infolgedessen erhält die rollende Spirale, die Fußpunktkurve der Sturmschen Spirale, die Gleichung

(16) $$\varrho = a\theta^2 - a.$$

Das ist eine Galileische Spirale. Für die Basiskurve erhält man die Darstellung

(17) $$x = -\frac{a}{3}\theta(3 - \theta^2), \quad y = -a(1 - \theta^2)$$

und hieraus

(18) $$9ax^2 = (y + a)(y - 2a)^2.$$

Das ist aber eine Tschirnhausensche Kubik, deren Pol in $x = 0$, $y = -\frac{2}{3}a$ liegt, wie man durch Transformation zu der bekannten Gleichungsform leicht feststellt.

Demnach hat man die Sätze: *Rollt eine Sturmsche Spirale auf einer Geraden, so beschreibt der Mittelpunkt ihres Grundkreises eine Tschirnhausensche Kubik. — Rollt eine bestimmte Galileische Spirale auf einer geeigneten Tschirnhausenschen Kubik, so beschreibt ihr Pol* ($\varrho = 0$) *eine Gerade.*

Bemerkung. Nimmt man als feste Kurve eine rational-ganze algebraische Kurve von der speziellen Gleichungsform

(19) $$x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots + a_n y^n,$$

so erhält man für die rollende Kurve

$$\theta = \int \left(\frac{a_1}{\varrho} + 2a_2 + 3a_3\varrho + \cdots + na_n\varrho^{n-2}\right) d\varrho$$

oder

(20) $$\theta = a_0' + a_1 \log\varrho + 2a_2\varrho + \frac{3}{2}a_3\varrho^2 + \cdots + \frac{n}{n-1}a_n\varrho^{n-1},$$

woraus man die schon erwähnten Resultate für die logarithmische Spirale ($a_2 = \cdots = a_n = 0$) und die Archimedische Spirale ($a_1 = a_3 = \cdots = a_n = 0$) wieder ablesen kann. Allgemein aber scheinen weder die Spiralen (20) noch ihre negativen Fußpunktkurven behandelt zu sein.

Jede Bewegung kann bekanntlich umgekehrt werden. Es hat zuerst M. Chasles darauf hingewiesen, daß, wenn ein Punkt P einer bewegten Ebene ε auf einer festen Ebene η eine Kurve Γ beschreibt, bei der umgekehrten Bewegung, wo η als beweglich, ε als fest gedacht wird,

die Kurve Γ immer durch P geht.[1]) Demnach kann man das Habichsche Theorem in folgender Weise umkehren: *Wenn bei der Abwicklung einer Kurve* K *auf einer Geraden* Γ *ein in der Ebene von* K *fester Punkt* P *eine Kurve* Λ *beschreibt, und es rollt* Λ *auf der Fußpunktkurvee* Φ *von* P *in bezug auf* K *ab, so geht die mit* Λ *festverbundene Gerade* Γ *immer durch* P (Cesàro § 68). Wir können so jedem der oben aufgeführten Sätze einen dualistischen gegenüberstellen.

Speyer, 28. Nov. 1906.

Über singuläre Punkte von Raumkurven.

Von Otto Biermann in Brünn.

Wir wollen Raumkurven betrachten, die eine Darstellung gefunden haben:

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0$$

und wollen etwa die Variable x als Unabhängige hinstellen und die Kurve in der Umgebung ihres Punktes (x_0, y_0, z_0) durch die beiden Reihen darstellen:

$$y - y_0 = \frac{1}{1!}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \cdots,$$

$$z - z_0 = \frac{1}{1!}\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \cdots$$

Diese Reihen haben die Eigenschaft, die Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ identisch zu erfüllen, d. h. es wird

$$F(x, y, z) = (F)_0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \cdots \equiv 0,$$

$$G(x, y, z) = (G)_0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{dG}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2G}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \cdots \equiv 0.$$

Man hat deshalb:

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{dG}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2G}{dx^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}\right)_0 \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)_0 \left(\frac{dz}{dy}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_0 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_0 \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0 = 0$$

---

1) *Aperçu historique etc.*, Paris 1875, S. 408.

und kann aus dem ersten, bezw. zweiten Paare dieser Gleichungen im allgemeinen die ersten bezw. zweiten Ableitungen von y und z nach x an der Stelle (x_0, y_0, z_0) eindeutig bestimmen, usw.

Wenn aber diese Bestimmung nicht eindeutig möglich ist, so heiße der Punkt ein *singulärer* Punkt. Diese Definition ist von der sonst üblichen verschieden, wenn nämlich die Art des Verhaltens der Schmiegungsebene an verschiedenen Stellen der Kurve in Betracht gezogen wird.

In dem singulären Punkte unserer Art muß also, wenn wir die Ableitungen von F und G nach x, y, z an der Stelle (x_0, y_0, z_0) mit $F_x, F_y, F_z, G_x, G_y, G_z$ bezeichnen, die Determinante

$$F_y G_z - F_z G_y$$

verschwinden, und damit eine Unbestimmtheit des Gleichungssystemes für $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = y_0'$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = z_0'$ eintrete, muß noch eine der beiden Determinanten

$$F_z G_x - F_x G_z, \qquad F_x G_y - F_y G_x$$

null sein. Doch wir sehen, daß dann, wenn die erste und eine der beiden letzten Determinanten verschwindet, auch die dritte null sein muß. Die singulären Punkte sind somit die Punkte, für welche diese Determinanten und die Funktionen F und G gleichzeitig verschwinden.

Nun aber können wir sagen, daß die Raumkurve an einer singulären Stelle mehrere (wenn auch imaginäre) Fortschreitungsrichtungen besitzen wird, und daß deshalb an der Stelle (x_0, y_0, z_0) nicht am Ende bloß ein Paar von Werten für die zweiten Ableitungen von y und z nach x besteht. Wenn zum Beispiel neben dem zweiten Paare der früheren Gleichungen die Determinante

$$F_y G_z - G_y F_z$$

gleich null ist, so müssen zum Eintritt der Unbestimmtheit der Lösungen noch die folgenden zwei Determinanten verschwinden:

$$\begin{vmatrix} F_{xx} + 2F_{xy}y_0' + 2F_{xz}z_0' + F_{yy}y_0'^2 + F_{zz}z_0'^2, & F_z \\ G_{xx} + 2G_{xy}y_0' + 2G_{xz}z_0' + G_{yy}y_0'^2 + G_{zz}z_0'^2, & G_z \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} F_{xx} + 2F_{xy}y_0' + 2F_{xz}z_0' + F_{yy}y_0'^2 + F_{zz}z_0'^2, & F_y \\ G_{xx} + 2G_{xy}y_0' + 2G_{xz}z_0' + G_{yy}y_0'^2 + G_{zz}z_0'^2, & G_y \end{vmatrix}.$$

Danach sind aber die Fortschreitungsrichtungen und somit y_0', z_0' in einem singulären Kurvenpunkte durch zwei Gleichungen zweiten Grades zu bestimmen, *und es gibt darum in einem solchen Punkte vier Fort-*

schreitungsrichtungen, bei welchem einfachsten Falle eines singulären Punktes wir stehen bleiben werden.

Ob aber in einem singulären Kurvenpunkte vier reelle Fortschreitungsrichtungen existieren können, oder ob nur zwei oder gar keine solchen bestehen, dafür sind aus den Resultanten der zuletzt in Rede gebrachten zwei Gleichungen in y_0' und z_0' Aufschlüsse zu erholen.

Diese Resultanten sind ganze Funktionen vierten Grades in y_0' und z_0', etwa

$$a_0 y_0'^4 + a_1 y_0'^3 + a_2 y_0'^2 + a_3 y_0' + a_4,$$

beziehungsweise

$$b_0 z_0'^4 + b_1 z_0'^3 + b_2 z_0'^2 + b_3 z_0' + b_4,$$

die sich mit Rücksicht auf die Relationen

$$\frac{d}{dx}(F_z G_x - F_x G_z) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}(F_x G_y - F_y G_x) = 0$$

auf eine veränderte, aber — soviel ich ersehe — nicht vorteilhaftere Form bringen lassen.

Aus der Resultante ist zu ersehen, ob und wann der einzelne Koeffizient an einer der singulären Stellen null wird, und unter welchen Umständen an einer besonderen singulären Stelle die in zusammengesetzter Form anzugebenden Nullstellen der Resultante reell oder komplex sind.

Zur Beurteilung der Kurvenbeschaffenheit in einem singulären Punkte sollen danach nur die folgenden Bemerkungen gemacht werden:

I. Es sollen drei Koeffizienten der Resultante in y_0' an einer zu untersuchenden singulären Stelle verschwinden.

1a, 1b. Wenn die aufeinanderfolgenden Koeffizienten a_1, a_2, a_3 null sind, a_0 und a_4 aber ein gleiches Zeichen haben, so muß es vier komplexe Nullstellen für die erste Ableitung y_0' geben, und der Kurvenpunkt wird ein isolierter; wenn aber a_0 und a_4 von entgegengesetzten Zeichen sind, so gibt es zwei und nur zwei komplexe Nullstellen derselben Ableitung, und die Kurve geht darum durch den singulären Punkt in zwei reellen Zweigen hindurch.

Nun können auch die Koeffizienten a_1, a_3, a_4 oder a_1, a_2, a_4, endlich a_2, a_3, a_4 verschwinden und entsprechend werden:

I. 2a. Zwei Wurzeln null und zwei komplex, wenn sgn a_0 = sgn a_2 ist. Aber:

I. 2b. Es werden zwei Wurzeln null und zwei reell, wenn $\operatorname{sgn} a_0 = -\operatorname{sgn} a_2$ ist.

I. 3. Im nächsten Falle ist eine Wurzel null, eine zweite reell und die weiteren zwei sind komplex, also geht die Kurve in zwei reellen Zügen durch den singulären Punkt.

I. 4. Es sind drei Wurzeln null und die vierte ist reell, sodaß jetzt von dem Kurvenpunkte vier reelle Kurvenzüge ausgehen, von denen aber drei die gleiche Fortschreitungsrichtung haben.

II. Jetzt lassen wir zwei der Koeffizienten a_1, a_2, a_3, a_4 verschwinden.

II. 1. Fallen zuerst zwei aufeinanderfolgende Koeffizienten aus, so gibt es mindestens zwei komplexe Wurzeln, und der singuläre Kurvenpunkt wird ein „Knotenpunkt", durch den zwei Zweige gehen, oder er wird ein isolierter Punkt.

Bevor wir weiter den Fall setzen, daß zwei nicht aufeinander folgende Koeffizienten null sind, sprechen wir von dem Falle, wo in der Resultante nur ein Koeffizient verschwindet.

III. 1. Haben die Benachbarten dem verschwindenden Koeffizienten gleiche Zeichen, so gibt es mindestens zwei komplexe Nullstellen, und der singuläre Kurvenpunkt ist wie früher ein Knotenpunkt, oder er ist ein isolierter Punkt.

III. 2. Haben die dem verschwindenden Koeffizienten benachbarten Koeffizienten der Resultante ein ungleiches Zeichen, so gibt es vier oder zwei oder keine reelle Nullstellen, und es gehen entsprechend viele reelle Kurvenzüge durch den singulären Punkt hindurch.

IV. 1. Wenn die Koeffizienten a_1 und a_3 null aber a_0, a_2, a_4 alle gleich bezeichnet sind, so wird es vier komplexe Wurzeln geben.

IV. 2. Existiert aber in der Reihe der Zeichen von a_0, a_2, a_4 ein Zeichenwechsel, so kann der Kurvenpunkt entweder ein Knotenpunkt oder ein isolierter sein.

IV. 3. Wenn zwei Zeichenwechsel in der Reihe der Zeichen der letzten Koeffizienten bestehen, so kann der Kurvenpunkt entweder ein isolierter oder ein Knotenpunkt von der früheren Art oder ein Punkt sein, durch den die Kurve viermal hindurchtritt.

V. 1. Wenn $a_1 = a_4 = 0$, $\operatorname{sgn} a_0 = \operatorname{sgn} a_2$ ist, so wird der singuläre Punkt ein solcher, durch den zwei reelle Kurvenzweige hindurchgehen.

V. 2. Doch wenn $a_1 = a_4 = 0$, $\operatorname{sgn} a_0 = -\operatorname{sgn} a_2$ ist, so gehen möglicherweise vier, auf jeden Fall aber zwei reelle Kurvenzüge durch den singulären Punkt.

Wenn die bisherigen Sätze keinen Aufschluß darüber erteilen, wie viel reelle Züge durch den einzelnen singulären Kurvenpunkt hindurch-

gehen, wenn also z. B. der Resultante überhaupt keine Glieder fehlen, so kann nur die Anwendung des Sturmschen Satzes zeigen, wie viele reelle oder komplexe Fortschreitungsrichtungen existieren.

Die Untersuchung der Diskriminante hat zu lehren, welche der reellen Züge mehrfach zählen.

Der Schnitt einer Fläche mit zweifachen Flächenpunkten, unter denen der biplanare, uniplanare, isolierte Punkt, der konische Knotenpunkt, das Dornende und das gemeinsame Ende eines Doppeldornes existiert[1]), mit einer anderen Fläche gleicher Art zeigt die verschiedenartigen Vorkommnisse der singulären Punkte von Raumkurven, die hier allein gesetzt wurden.

Brünn, 12. Dezember 1905.

Über Krümmungskreise von Kegelschnitten.

Von Rudolf Schüssler in Graz.

(Mit einer Figurentafel.)

Fast alle Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes für einen Kegelschnittpunkt p lassen sich nach Pelz mit Hilfe der Steinerschen Parabel herleiten; diese berührt alle Geraden, die zu den Strahlen des Büschels p normal konjugiert sind, insbesondere die Achsen des Kegelschnittes, die Normalen zu den Leitstrahlen in den Brennpunkten, die Tangente und Normale von p und zwar letztere im Krümmungsmittelpunkte.[2])

Auch die häufig bei elementaren Konstruktionen, z. B. bei der Bestimmung des Schattens ins Innere einer Kegelfläche oder des zentralen Schattens der Kugel oder der zentralen Projektion des Kreises auftretende Aufgabe: „die Achsen eines Kegelschnittes zu finden, wenn zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten und der Mittelpunkt bekannt sind“, läßt sich auf die Steinersche Parabel zurückführen.[3]) Der Satz, daß die normalen konjugierten Geraden zu den

1) Archiv der Mathematik und Physik, (3) 5, 245. „Über die zweifachen Punkte von Flächen“, von Otto Biermann.

2) Steiner-Schröter, die Theorie der Kegelschnitte 1898 pag. 206. Cranz, Synth. geom. Theorie der Krümmung 1886 pag. 21. Pelz, die Krümmungshalbmesser-Konstruktionen der Kegelschnitte als Korollarien eines Steinerschen Satzes. (Sitzungsber. d. Kgl. böhm. Ges. d. W. 1879).

3) Pelz, Zur wissensch. Behandlung d. orthog. Axonometrie III. pag. 11. (Sitzungsber. d. K. Akad. d. W. 1884). Pelz, Beiträge zur wiss. Behandlung d.

Strahlen eines Büschels p eine Parabel umhüllen, gilt nämlich auch, wenn p nicht ein Punkt des Kegelschnittes ist[1]); dann gehören zu den Tangenten dieser Parabel: die Achsen des Kegelschnittes, die Symmetralen H_1, H_2 der durch p zu den Brennpunkten gezogenen Strahlen, die Berührungssehne der aus p an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten, die Symmetrale der Berührungspunkte t_1, t_2 dieser Tangenten, die Kurvennormalen in den Berührungspunkten t_1, t_2 dieser Tangenten, die Normalen zu pf und pf' in den Brennpunkten f und f'; die Leitlinie dieser Parabel ist der durch p gehende Durchmesser des Kegelschnittes, und der Brennpunkt der Parabel wird als Diagonalecke des durch die Achsen und Symmetralen H_1, H_2 gebildeten Vierseites erhalten. Dieser Brennpunkt liegt auf dem Kreise, welcher durch p und die Berührungspunkte t_1, t_2 geht und ist zu p bezüglich t_1, t_2 harmonisch konjugiert; ebenso liegt er auf dem Kreise durch p, f, f' und ist zu p bezüglich f, f' harmonisch konjugiert.[2])

Im folgenden soll für diesen Satz eine elementare Herleitung gegeben werden, um die daraus sich ergebenden einfachen Resultate auch jenen zugänglich zu machen, welche mit der projektiven Geometrie nicht vertraut sind.

1. Bringt man (Fig. 1) die Normalen zweier Punkte t_1, t_2 eines zentralen Kegelschnittes mit der Hauptachse in o_1, o_2 zum Schnitt, so sind o_1 und o_2 die Mittelpunkte zweier den Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise mit den Radien $o_1 t_1$ und $o_2 t_2$. Ihr Ähnlichkeitskreis K (d. i. der Kreis, welcher die beiden Ähnlichkeitszentren zu Endpunkten eines Durchmessers hat) geht durch den Schnittpunkt p der Kurventangenten in t_1 und t_2 und trennt die Brennpunkte harmonisch[2]), ist also durch p, f, f' eindeutig bestimmt.

Bringt man die Normalen in t_1 und t_2 mit der Nebenachse in o_1', o_2' zum Schnitt, so sind o_1' und o_2' die Mittelpunkte zweier die Kurve

orthog. Axon. pag. 4. (Sitzungsber. d. Kgl. böhm. Ges. d. W. 1885). Pelz, Über die Bestimmung der Achsen von Zentralprojektionen des Kreises. (Sitzungsber. d. Kgl. böhm. Ges. d. W. 1872).

1) In dieser Form spricht den Satz schon Chasles aus (Traité des sections coniques p. 145). Steiner fand, daß die Normalen zweier beliebiger Punkte eines Kegelschnittes, ihre Verbindungslinie und die Achsen Tangenten einer Parabel sind (Steiner-Schröter, pag. 205). Auch bei der Konstruktion von Kegelschnittnormalen aus einem Punkte gelangte Steiner zu dieser Parabel (Ges. Werke II. 629) und ebenso Chasles.

2) Pelz „Über die Achsenbestimmung der Kegelschnitte." (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. 1876). Pelz „Über die Achsenbestimmung von Zentralprojektionen der Flächen 2. Grades" (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. 1872).

doppelt berührenden Kreise mit den Radien $o_1' t_1$ und $o_2' t_2$; ihr Ähnlichkeitskreis K' geht durch den Schnittpunkt p der Tangenten von t_1 und t_2 und durch die Brennpunkte, ist also durch p, f, f' eindeutig bestimmt.[1])

Die beiden Ähnlichkeitskreise K und K' schneiden sich in p und in einem Punkte s, welcher identisch ist mit dem Brennpunkte der zum Punkte p gehörigen Steinerschen Parabel; daß er die diesem Brennpunkte zukommenden Eigenschaften besitzt, ergibt sich elementar aus folgender Betrachtung.

Jeder der beiden Punkte p und s hat als Punkt eines Ähnlichkeitskreises zweier Kreise von deren Mittelpunkten Entfernungen, welche sich wie die Kreisradien verhalten und wie die Längen der Tangenten an beide Kreise. Demnach ist

$$\frac{pt_1}{pt_2} = \frac{o_1 t_1}{o_2 t_2} = \frac{o_1' t_1}{o_2' t_2} = \frac{o_1 o_1'}{o_2 o_2'} = \frac{so_1}{so_2} = \frac{so_1'}{so_2'},$$

daraus folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke $so_1 o_1'$ und $so_2 o_2'$ und die Gleichheit der entsprechenden Winkel. (Die Kreise über $so_1 o_2$ und $so_1' o_2'$ gehen durch n, den Schnittpunkt der beiden Normalen in t_1 und t_2).

Ferner folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke $st_1 o_1$ und $st_2 o_2$ aus der Gleichheit der Winkel bei o_1 und o_2 und dem gleichen Verhältnisse der in o_1 und o_2 zusammenstoßenden Seiten; daher ist $\widehat{st_1 o_1} = \widehat{st_2 o_2}$, oder der Kreis K_p über $pt_1 t_2$, welcher auch n enthält, geht durch s; wegen $st_1 : st_2 = (o_1 t_1 : o_2 t_2) = pt_1 : pt_2$ *sind s und p auf dem Kreise K_p bezüglich t_1, t_2 harmonisch konjugiert.*[2]) Mithin schließen die Geraden ps

---

1) Vergl. meine Abhandlung „Über Kreise, welche Kegelschnitte doppelt berühren" (Archiv d. Math. u. Phys. (3) **2**, 1—42, 1902).

2) Definiert man eine Gruppe von vier Kreispunkten $abcd$ als harmonisch, wenn $ac : ad = bc : bd$ ist, so folgt daraus (Fig. 2): 1) Die Winkelhalbierenden in a und b treffen cd in denselben Punkten o und o_1, welche cd harmonisch trennen; der Kreis über $oo_1 a$ enthält auch b; — oder 2) die Winkelhalbierenden von a und b schneiden den Kreis in den Endpunkten $d_1 d_2$ des zu d normalen Durchmessers; um daher zu a bezüglich cd den harmonisch konjugierten Punkt b zu finden, sucht man für das vollständige Vierseit, dessen Seiten die Winkelhalbierenden in a, die Gerade cd und deren Symmetrale sind, das Diagonaldreiseit; eine Diagonalseite ist die Gerade, welche a mit dem Halbierungspunkte m von cd verbindet, die gegenüberliegende Diagonalecke ist b; — oder 3) o ist der Höhenschnittpunkt des Dreieckes $d_1 d_2 o_1$; dann sind die Höhen die Winkelsymmetralen des aus den Höhenfußpunkten gebildeten Dreieckes, d. h. $\widehat{dab} = \widehat{cam} = \widehat{dcb}$ oder $\widehat{cab} = \widehat{dam} = \widehat{cdb}$, und $\widehat{amd} = \widehat{dmb}$; jede dieser Gleichungen kann zur Konstruktion von b verwendet werden; — oder 4) bringt man eine Winkelhalbierende von a mit cd und ihrer Symmetralen zum Schnitt und legt durch die Schnittpunkte und m einen Kreis, so geht er durch b; — oder 5) die Tangenten in a und b

und ph (wo h der Halbierungspunkt von $t_1 t_2$ ist) mit den Kurventangenten aus p und daher auch mit den Geraden pf und pf' gleiche Winkel ein; da ph ein Durchmesser der Kurve ist und also durch m geht, bilden auch die auf dem Kreise K' liegenden Punkte p, s, f, f' *eine harmonische Gruppe*, was auch unmittelbar daraus folgt, daß p und s die Schnittpunkte der beiden Ähnlichkeitskreise K und K' sind. Das waren aber die Eigenschaften, welche früher vom Brennpunkte der Steinerschen Parabel hervorgehoben wurden.

Diese Resultate führen zu folgenden Sätzen: „*Legt man an alle Kegelschnitte mit den Brennpunkten f, f' aus dem Punkte p die Tangentenpaare und durch jedes Paar $t_1 t_2$ der Berührungspunkte und p einen Kreis K_p, so schneiden sich alle diese Kreise in einem Punkte s, welcher auf dem Kreise durch pff' liegt und zu p bezüglich f, f' und bezüglich aller Paare von Berührungspunkten harmonisch konjugiert ist.*"

„*Für alle Kegelschnitte, welche zwei Gerade in denselben Punkten t_1, t_2 berühren, liegen die Brennpunkte mit dem Schnittpunkte p der beiden Geraden auf Kreisen, welche sich noch in einem Punkte s schneiden; s liegt auf dem Kreise durch $pt_1 t_2$ und ist zu p bezüglich t_1, t_2 und bezüglich aller Paare von Brennpunkten harmonisch konjugiert.*"

Daraus ergibt sich zufolge der Eigenschaften einer Gruppe harmonischer Punkte am Kreise die Achsenkonstruktion eines Kegelschnittes, wenn zwei Tangenten mit ihren Berührungspunkten t_1, t_2 und auf dem zu $t_1 t_2$ konjugierten Durchmesser der Kurvenmittelpunkt m gegeben sind: Man sucht zum Schnittpunkte p der Tangenten auf dem Kreise $pt_1 t_2$ den harmonischen Punkt s bezüglich $t_1 t_2$; der Winkel pms wird durch die Achsen halbiert.

Es sei noch erwähnt, daß die Berührungssehne $t_1 t_2$ den zu $t_1 t_2$ konjugierten Durchmesser in zwei Teile trennt; auf dem Teile, welcher den Schnitt der Tangenten enthält, liegen die Mittelpunkte der Hyperbeln, auf dem anderen die Mittelpunkte der Ellipsen. Für die einzige Parabel, welche unter den die beiden Geraden in t_1 und t_2 berührenden

---

schneiden cd im Halbierungspunkte o' von oo_1 (wegen $\widehat{o_1 o a} = \widehat{o_1 a o}$); a und b liegen mit diesem Schnittpunkte auf einem Kreise, welcher durch den Kreismittelpunkt ω und m geht; der Kreis, welcher den gegebenen in a normal schneidet und seinen Mittelpunkt auf cd hat, geht durch b; — oder 6) Errichtet man in o eine Normale auf ao, so schneidet sie die Seiten ac und ad in den Punkten 1 und 2; die Dreiecke $a\,12$ und $d_1 cd$ sind ähnlich als gleichschenklige Dreiecke mit gleichem Scheitelwinkel, ebenso die Dreiecke aob und $d_1 mb$ wegen Gleichheit der Winkel, also sind die Vierecke $cd_1\,db$ und $1a2b$ ähnliche Figuren, d. h. $1a2b$ ist ein Sehnenviereck, der Kreis über $a\,12$ (welcher in ao seinen Mittelpunkt hat) geht durch b, woraus sich wieder eine Bestimmung von b ergibt usw.

Kegelschnitten vorkommt, halbiert (wie später bewiesen wird) der Brennpunkt die Strecke ps.

2. Verbindet man (Fig. 1) den Schnittpunkt n der Kurvennormalen von t_1 und t_2 mit p, so erhält man einen Durchmesser des durch s gehenden Kreises K_p; daher ist $\widehat{psn}$ ein Rechter, also für alle konfokalen Kegelschnitte konstant; bringt man die zu pf und pf' in f und f' errichteten Normalen zum Schnitt, so erhält man einen Punkt r des durch s gehenden Kreises K', und es ist $\widehat{psr}$ ein Rechter d. h.:

„Legt man an alle Kegelschnitte mit den Brennpunkten f und f' aus einem Punkte p die Tangentenpaare und in deren Berührungspunkten die Kurvennormalen, so schneiden sich diese Normalenpaare auf einer Geraden, welche den Kreis über pff' in dem zweiten Endpunkte des durch p gehenden Kreisdurchmessers und in dem zu p bezüglich ff' harmonisch konjugierten Punkte s schneidet.“

Wählt man insbesondere unter den konfokalen Kegelschnitten jene, welche durch den Punkt p gehen, so fallen für diese die Tangentenberührungspunkte t_1 und t_2 mit p zusammen, die Normalen in t_1 und t_2 werden unendlich benachbart, ihr Schnittpunkt wird zum *Krümmungsmittelpunkte μ des Punktes p; dieser wird demnach auf der Kurvennormalen von p durch die Gerade ausgeschnitten, welche in s auf sp normal steht oder durch jenen Kreis K_p, welcher in p die Kurve berührt und durch s geht* (Fig. 3).

Aus den Eigenschaften der harmonischen Punktgruppe $psff'$ ergeben sich eine Reihe von Konstruktionen für den Krümmungsmittelpunkt (Fig. 3):

Sind nicht die Brennpunkte sondern die Kegelschnittachsen und ein Kurvenpunkt p samt Tangente T gegeben, so verbindet man p mit dem Kurvenmittelpunkte m und sucht zu dieser Geraden je die symmetrische bezüglich einer Achse und der Tangente T; die so erhaltenen Geraden schneiden sich in s; die Normale in s zu sp enthält den Krümmungsmittelpunkt.

Der Kreis K_p, welcher in p die Kurve berührt, durch s geht und μ enthält, schneidet die beiden Leitstrahlen pf und pf' in den Punkten 1 und 2, sodaß 12 durch o, den Schnittpunkt der Kurvennormalen und Hauptachse, geht.[1]) Da 12 normal zu po, und $\mu 1$ normal zu pf ist, gibt dies die bekannte Konstruktion von μ: Man bringt die Kurvennormale mit der Hauptachse in o zum Schnitt, zieht durch o die Parallele zur Kurventangente bis zum Schnitt 1 mit einem Leitstrahle und errichtet auf diesen in 1 die Normale; diese enthält μ.

1) Vgl. die Anmerkung S. 321 Punkt 6.

Die Dreiecke pso' und pom sind ähnlich, da die Winkel bei p gleich sind und die Winkel bei m und o' gleich $\widehat{smo}$ sind; $s\mu$ ist normal zu sp, und od normal zu op; daher teilt μ die Strecke $o'p$ im gleichen Verhältnisse wie d die Strecke mp, d. h. $d\mu$ ist parallel der Nebenachse. Dies gibt eine bekannte Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes: Man bringt die Kurvennormale von p mit der Hauptachse in o zum Schnitt, zieht durch o die Parallele zur Tangente, bis sie den Durchmesser mp in d trifft; durch d zieht man die Parallele zur Nebenachse, so schneidet diese die Kurvennormale im Krümmungsmittelpunkte.

Bringt man den Kreis über $moso'$ mit sr in x zum Schnitt, so sind die Dreiecke $o'xo$ und omo' kongruent, weil $\widehat{xoo'} = \widehat{xso'} = \widehat{pso} = \widehat{oo'm}$ ist. Bestimmt man zu x den symmetrischen Punkt y bezüglich des Durchmessers oo', so sind die Dreiecke oyo' und $o'mo$ kongruent, d. h. oy ist parallel der Nebenachse und $o'y$ parallel der Hauptachse; die zu xs symmetrische Gerade $y\mu$ steht auf der zu ps symmetrischen Geraden pm normal. Dies liefert die folgende bekannte Konstruktion von μ: Man bringt die Kurvennormale mit den Achsen in o und o' zum Schnitt, zieht durch o und o' die Parallelen zu den Achsen und fällt vom Schnittpunkte y dieser Parallelen die Normale auf den Durchmesser mp; diese Normale enthält μ.

Diese Beispiele zeigen die Möglichkeit, eine Reihe bekannter einfacher Konstruktionen für den Krümmungsmittelpunkt elementar herzuleiten. Umgekehrt liefern diese Konstruktionen wieder die Lösung der Aufgabe: „einen Kegelschnitt zu konstruieren, wenn ein Krümmungskreis k mit seinem Berührungspunkte p unter den Bestimmungselementen auftritt.“ Einige Fälle seien angeführt (Fig. 3):

1. Gegeben k mit p und der Kurvenmittelpunkt m. Man konstruiert über $p\mu$ den Kreis K_p, sucht zu pm die bezüglich $p\mu$ symmetrisch liegende Gerade und bringt sie mit K_p in s zum Schnitt; die Achsen des Kegelschnittes halbieren den Winkel pms. Liegen m und μ auf derselben Seite der Tangente von p, so erhält man eine Ellipse, sonst eine Hyperbel.

2. Gegeben k mit p und eine Achse. Man bringt die Tangente und Normale von p mit der Achse in t und n zum Schnitt; der Kreis K über tn als Durchmesser schneidet den Kreis K_p über $p\mu$ in s; die zu ps bezüglich der Normalen symmetrisch liegende Gerade trifft die Achse im Kurvenmittelpunkte m. Man erhält eine Ellipse (Hyperbel), wenn s und n auf derselben (verschiedener) Seite des durch p gehenden Durchmessers P von K liegen; für die Parabel liegt s in P.

3. Gegeben k mit p und ein Brennpunkt f. Man konstruiert über $p\mu$ als Durchmesser einen Kreis K_p, schneidet ihn mit pf und zieht durch den Schnittpunkt die zu $p\mu$ normale Sehne; sie trifft $p\mu$ in einem Punkte der Hauptachse, den Kreis K_p in einem Punkte des zweiten Leitstrahles. Man erhält eine Hyperbel, wenn f und μ auf entgegengesetzten Seiten der Tangente T von p liegen, oder wenn f innerhalb des Kreises π gewählt wird, welcher den Krümmungskreis in p von innen berührt und zum Durchmesser den halben Krümmungsradius besitzt; man erhält eine Ellipse, wenn f mit μ auf derselben Seite von T aber außerhalb des Kreises π liegt, und man erhält eine Parabel, wenn f unendlich fern ist oder auf dem Kreise π liegt (wie später gezeigt wird).

4. Gegeben k mit p, der durch p gehende Durchmesser D und die Achsenrichtungen (Fig. 4). Die zu D bezüglich der Normalen symmetrische Gerade schneidet den Kreis über $p\mu$ in s; m wird nun so auf D bestimmt, daß D und sm mit der Achsenrichtung gleiche, entgegengesetzte Winkel einschließen.[1])

1) Wenn man s als Brennpunkt der Steinerschen Parabel ansieht, welche von allen konjugierten Normalen zu den Strahlen des Büschels p eingehüllt wird, und die Parabeleigenschaft benützt, daß jeder Kreis, der einem Tangentendreiecke umschrieben ist, durch den Brennpunkt geht, so kann auch die Konstruktion eines Kegelschnittes durchgeführt werden, wenn außer dem Krümmungskreise k mit Berührungspunkt p gegeben sind: a) Eine Tangente A mit Berührungspunkt a (Fig. 5). Zu den Tangenten der Steinerschen Parabel gehören die Tangente T und Normale N von p, dann die Normale zu pa durch den Schnitt von T und A; der diesem Tangentendreiecke umschriebene Kreis schneidet den Kreis K_p (dessen Durchmesser $p\mu$ ist) in s; der durch p gehende Kurvendurchmesser D ist symmetrisch zu ps bezüglich N; der durch den Schnitt von T und A gehende Kurvendurchmesser D halbiert pa; daraus ergeben sich m und die Achsen. b) Zwei Tangenten A_1 und A_2 (Fig. 6): Verbindet man ihren Schnittpunkt a mit p, so erhält man den Pol x von ap als Schnitt von T mit der zu ap bezüglich A_1, A_2 harmonisch konjugierten Geraden, d. h. schneiden A_1 und A_2 die Tangente T in x_1 und x_2, so ist x zu p bezüglich $x_1 x_2$ harmonisch konjugiert. Die Normale durch x zu ap ist Parabeltangente und bildet mit TN ein Dreieck, dessen umschriebener Kreis den Kreis K_p in s schneidet; die zu ps bezüglich N symmetrische Gerade ist ein Kurvendurchmesser D; einen zweiten erhält man z. B. mittels der Polaren von x_1; diese steht auf der durch x_1 gehenden Tangente T_1 der Steinerschen Parabel normal und trifft A_1 im Berührungspunkte a_1; der durch x_1 gehende Kurvendurchmesser D_1 halbiert pa_1. (T_1 wird leicht gefunden, da der Brennpunkt s und die Leitlinie D der Parabel gegeben sind: Man sucht auf D den Punkt s_1, sodaß $x_1 s_1 = x_1 s$ ist; T_1 steht dann auf ss_1 normal, oder pa_1 ist parallel zu ss_1). c) Zwei Punkte q_1 und q_2 (Fig. 7). Die Gerade $q_1 q_2$ schneidet T in q; für q läßt sich die Polare Q finden, da sie durch p geht und $q_1 q_2$ in dem zu q harmonisch konjugierten Punkte schneidet. Die Normale durch q zu dieser Polaren Q ist Parabeltangente und bildet mit TN ein Dreieck, dessen umschriebener Kreis

3. Es soll noch erwähnt werden, welche Veränderungen die vorangehenden Betrachtungen für die Parabel erleiden.

Bringt man für zwei Parabelpunkte t_1, t_2, deren Tangenten sich in p schneiden, die Normalen mit der Parabelachse in o_1 und o_2 zum Schnitt, so sind o_1 und o_2 die Mittelpunkte zweier die Parabel doppelt berührender Kreise mit den Radien $o_1 t_1$ und $o_2 t_2$. Ihr Ähnlichkeitskreis K hat den Brennpunkt f zum Mittelpunkte und geht durch p.[1]) Der bei zentralen Kegelschnitten auftretende zweite Ähnlichkeitskreis mit dem Mittelpunkte auf der Nebenachse zerfällt hier in die unendlich ferne Gerade und die Gerade pf. Es soll nämlich gezeigt werden, daß der zweite Endpunkt s des Durchmessers pf von K die Eigenschaften des Brennpunktes der Steinerschen Parabel, welche zu p gehört, besitzt.[2])

Die Schnittpunkte der Tangente und Normale eines Parabelpunktes t_1 mit der Achse liegen zu f symmetrisch, daher ist (Fig. 8) $f1 = fo_1$ und wegen $pf = sf$ ist so_1 parallel $p1$ d. h. $t_1\widehat{o_1}s$ ein Rechter und aus denselben Gründen $t_2\widehat{o_2}s$ ein Rechter. Für s als Punkt eines Ähnlichkeitskreises ist $so_1 : so_2 = o_1 t_1 : o_2 t_2$; daher sind die Dreiecke $st_1 o_1$ und $st_2 o_2$ ähnlich und $s\widehat{t_1}o_1 = s\widehat{t_2}o_2$, d. h. $t_1 st_2 n$ und p liegen auf einem Kreise K_p. Da auch p dem Ähnlichkeitskreise angehört, ist $pt_1 : pt_2 = o_1 t_1 : o_2 t_2 = st_1 : st_2$ (wegen Ähnlichkeit der Dreiecke $st_1 o_1$ und $st_2 o_2$); daher bilden $pst_1 t_2$ eine harmonische Gruppe, und s ist durch $pt_1 t_2$ eindeutig bestimmt.

Für die Parabel gelten also die Sätze: „*Unter allen Kegelschnitten, welche zwei Gerade in denselben Punkten t_1, t_2 berühren, gibt es eine Parabel; ihr Brennpunkt f halbiert die Strecke ps, wenn s der zu p harmonisch konjugierte Punkt bezüglich t_1, t_2 auf dem Kreise durch $pt_1 t_2$ ist.*“

„*Legt man an alle Parabeln mit demselben Brennpunkte f aus dem Punkte p die Tangentenpaare, so liegen die Paare $t_1 t_2$ von Berührungspunkten mit p auf Kreisen (K_p), welche eine gemeinsame Sehne ps besitzen, deren Halbierungspunkt f ist.*“

---

den Kreis K_p in s schneidet; die zu ps bezüglich N symmetrische Gerade D_1 ist ein Kurvendurchmesser; um einen zweiten Durchmesser D zu erhalten, sucht man z. B. den Pol x von pq_1, welcher auf der zu pq_1 normalen Parabeltangente liegt (zieht man durch s eine Parallele zu pq_1 und schneidet sie mit D in s_1, so muß $xs_1 = xs$ sein); der durch x gehende Durchmesser D_1 halbiert pq_1.

1) Vgl. die früher zitierte Abhandlung „Über Kreise, welche Kegelschnitte doppelt berühren.“

2) Vgl. Pelz „Die Krümmungshalbmesser-Konstruktionen“ pag. 18. Die Leitlinie der Steinerschen Parabel ist der durch p gehende Durchmesser der gegebenen Parabel, also ihre Achse die Scheiteltangente der Steinerschen Parabel.

„Wenn man an alle Parabeln mit dem Brennpunkte f in den Punktepaaren t_1, t_2, deren Tangenten sich in demselben Punkte p schneiden, die Normalen zieht, so liegen die Schnittpunkte dieser Normalenpaare auf einer Geraden, welche pf in s normal schneidet, wobei f der Halbierungspunkt von ps ist.“

Wählt man insbesondere jene Parabel, welche durch p geht, so erhält man ein Paar unendlich naher Kurvennormalen, deren Schnittpunkt der Krümmungsmittelpunkt μ von p ist; μ liegt auf der Normale in s auf ps oder auf dem Kreise K_p, welcher in p die Kurve berührt und durch s geht (Fig. 9). Dies ist die bekannte Konstruktion der Krümmungsradien für Parabelpunkte: die Normale in f auf pf schneidet die Parabelnormale des Punktes p in c, sodaß pc der halbe Krümmungsradius ist, oder der Durchmesser des Kreises, welcher die Parabel in p berührt und durch f geht, ist gleich dem halben Krümmungsradius. Auch andere Bestimmungsarten des Krümmungsmittelpunktes lassen sich leicht herleiten:

Bringt man die Normale des Punktes p mit der Leitlinie L in b zum Schnitt (Fig. 9) und zieht den zur Achse parallelen Leitstrahl pg, so sind die Dreiecke pgb und pfc kongruent, also pb, d. i. das Stück der Normale zwischen p und der Leitlinie, gleich dem halben Krümmungsradius.

Errichtet man in f zur Parabelachse die Normale und schneidet sie in a mit der Kurvennormale von p, so sind die Dreiecke afo und cfp kongruent, daher $ao = pc$; d. h. für jeden Parabelpunkt ist das Stück der Normale zwischen der Achse und der zur Achse normalen Geraden durch f gleich dem halben Krümmungsradius.

Umgekehrt liefern diese Resultate ein Mittel für die Konstruktion einer Parabel, wenn als Bestimmungsstück ein Krümmungskreis k mit dem Mittelpunkte μ und dem Radius ϱ auftritt. Es sei außerdem gegeben:

1. Der Berührungspunkt p und die Achsenrichtung. Der nicht zur Achse parallele Leitstrahl schneidet den Kreis K_p, dessen Durchmesser $p\mu$ ist, in s; f halbiert die Strecke ps.[1])

---

1) Ist der Berührungspunkt p und eine Tangente A gegeben (Fig. 10), so zieht man durch p eine Parallele A_1 zu A und sucht zu A_1 den Pol a_1 bezüglich der Parabel; a_1 liegt auf der Tangente T von p, und zwar wird $\overline{a_1 p}$ durch A halbiert. Die Normale von a_1 auf A_1 ist eine Tangente der Steinerschen Parabel und bildet mit T und N ein Dreiseit, dessen umschriebener Kreis den Kreis K_p über $p\mu$ in s schneidet; ps wird durch f halbiert.

2. Die Leitlinie L (Fig. 9). Der zum Krümmungskreis konzentrische Kreis, dessen Radius $\frac{3\varrho}{2}$ beträgt, schneidet die Leitlinie in b; $b\mu$ enthält den Berührungspunkt p des Krümmungskreises[1]); daraus ergibt sich die Parabeltangente in p, das Leitstrahlenpaar von p und der Brennpunkt f. Die Aufgabe ist zweideutig und gibt nur Lösungen, wenn der Abstand der Leitlinie L von μ nicht größer als $\frac{3\varrho}{2}$ ist. Hat L von μ die Entfernung $\frac{3\varrho}{2}$, so ist k der Krümmungskreis im Scheitel der Parabel, und diese ist eindeutig bestimmt.

3. Der Brennpunkt f. Man sucht jenen Kreis, dessen Durchmesser gleich dem halben Krümmungsradius ist, welcher durch f geht und k berührt; sein Berührungspunkt mit k ist der gesuchte Berührungspunkt p mit der Parabel. Oder man sucht jene Sehne von k, welche durch f im Verhältnisse $1:3$ geteilt wird; der dem kleineren Abschnitte angehörige Endpunkt ist der Berührungspunkt p der Parabel. Die Aufgabe ist zweideutig und ist nur möglich, wenn f innerhalb des Kreisringes liegt, welcher durch k und den konzentrischen Kreis mit dem halben Radius begrenzt wird. Der letztere Kreis ist der geometrische Ort der Brennpunkte jener Parabeln, für welche k der Krümmungskreis des Scheitels ist.

Graz, November 1903.

Periodische Kettenbrüche.

Von L. Saalschütz in Königsberg i. P.

In dem 5. Bande (1903) dieser Zeitschrift S. 47—55 hat Herr Matthiessen[2]) einen Aufsatz über die Periodizität der Kettenbrüche veröffentlicht, der zu einigen Bemerkungen herausfordert. Nachdem der Herr Verfasser die im Lehrbuche von Serret aufgeführten Sätze über die periodischen Kettenbrüche übersichtlich zusammengestellt und teilweise in einfacher Art neu bewiesen hat, fügt er noch zwei Theoreme VI und VII hinzu. In diesen läßt aber der verdienstvolle Verfasser des Werkes „über die literalen Gleichungen" an Inhalt und Fassung etwas zu wünschen übrig.

1) Vgl. Speth „Die Krümmungskreise der Kegelschnitte" pag. 54. (Jahresber. d. Realschule in Trautenau 1893.)

2) Derselbe ist inzwischen gestorben.

Das Theorem VI lautet:

VI. „Wenn innerhalb der Periode eines Kettenbruches, welcher durch die Entwicklung einer Irrationalen zweiten Grades entsteht, in der Gleichung der vollständigen Quotienten (9) $2E_n$ durch D_n teilbar wird, so ist der Quotient [d. h. $2E_n : D_n$] gleich dem unvollständigen Quotienten a_n, die Periode symmetrisch und a_n der Anfang oder die Mitte derselben."[1])

Der erste Teil dieses Satzes ist *nur* richtig, wenn die quadratische Form $(D_n, E_n, -D_{n-1})$ nicht nur ambigue, sondern auch reduziert ist, und folgt für diesen Fall direkt aus der Theorie der quadratischen Formen. Z. B. ist $(6, 15, -50)$ eine ambigue, aber keine reduzierte Form und die positive Wurzel der Gleichung $6x^2 - 30x - 50 = 0$ enthält 6 (nicht 5) Einheiten.

Was aber den 2. Teil betrifft, so ist allerdings für die positive Wurzel der Matthiessenschen Gleichung $5x^2 - 15x - 13 = 0$ die Periode (3, 1, 2, 2, 1), welche bei Verschiebung des Anfangspunktes die symmetrische Gestalt (2, 1, 3, 1, 2) annimmt; aber für die positive Wurzel der Gleichung $x^2 - 124x - 121 = 0$ ist die Periode (124, 1, 30, 2, 30, 1), oder verschoben (2, 30, 1, 124, 1, 30), und dieselbe läßt sich (im Gegensatze zu derjenigen der oberen Gleichung) weder so ordnen, daß sie aus einem Einzelgliede und einer *geraden* Anzahl anderer besteht, noch auch so, daß um ein einzelnes Mittelglied die anderen sich symmetrisch anordnen lassen.

Das Theorem VII sagt aus:

VII. „Wenn innerhalb der Periode eines Kettenbruches, welcher durch die Entwicklung der irrationalen Wurzel einer quadratischen Gleichung entsteht, $D_n = D_{n-1}$ wird, so ist die Periode symmetrisch und besitzt zwei gleiche mittlere Glieder und umgekehrt."

Dieser Satz kann nicht als vollständig bezeichnet werden, denn bei der Matthiessenschen Gleichung $5x^2 - 11x - 5 = 0$ ist die Periode für die positive Wurzel allerdings (2, 1, 1, 2) mit zwei gleichen Mittelgliedern, bei der Gleichung $17x^2 - 14x - 17 = 0$ ist sie aber (1, 2, 36, 2, 1) mit einem einzelnen Mittelgliede.

Soll aber nur darauf Gewicht gelegt werden, daß bei den Gleichungen angegebener Art symmetrische Perioden oder solche mit einem Schlußgliede (bez. Anfangsgliede) entstehen, so ist zum Beweise dafür das Serretsche Theorem IV vollkommen ausreichend.

---

1) Die Gl. (9) des Herrn Matthiessen für den vollständigen Quotienten x_n lautet:

$$D_n x_n^2 - 2E_n x_n - D_{n-1} = 0.$$

Bei den Zahlenbeispielen am Ende der Abhandlung sind die Perioden übrigens nicht klar erkennbar, ebenso wie der Ausdruck, daß „die symmetrische Periode auch *ein* oder *zwei* Endglieder" haben kann.

Doch soll gern anerkannt werden, daß schon der Hinweis des Herrn Matthiessen auf die beiden besonderen Formen seiner Gleichung (9) von Wichtigkeit ist.

Alle bezüglichen Fragen werden vollständig und präzise mit Hilfe der Lehre von den quadratischen Formen beantwortet, und ich lasse die *Resultate* meiner Untersuchungen hier folgen.

1. Wir bezeichnen einen Kettenbruch als echt oder unecht, je nachdem er die Form

$$\frac{1}{a+}\ddots \qquad \text{oder} \qquad g+\frac{1}{a+}\ddots$$

besitzt. Die Periode rein periodischer Kettenbrüche beginnt im ersten Falle mit a, im zweiten mit g.

Wir geben ferner folgenden vier Periodenarten die beigesetzten Namen:

$a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ \ a_0,\ \ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$ *scharfe Umkehrperiode,*

$a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$ *flache Umkehrperiode,*

$a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ \ a_0,\ \ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ b$ *scharfe Abschlußperiode,*

$a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ b$ *flache Abschlußperiode.*

Man erkennt dabei leicht, daß eine scharfe Umkehrperiode durch Verlegung des Periodenanfangs zu einer flachen Abschlußperiode, und umgekehrt, wird, daß aber eine flache Umkehrperiode, sowie eine scharfe Abschlußperiode bei solcher Verlegung des Periodenanfangs ihren Charakter nicht ändert.

Alle Perioden allgemeinerer Art fassen wir in der Benennung *asymmetrische Perioden* zusammen.

2. Ein echter Kettenbruch mit reiner (scharfer oder flacher) Umkehrperiode läßt sich durch die positive Wurzel einer Gleichung vom Aussehen

(A) $$Mx^2 + 2\,Lx - M = 0$$

summieren.

Ein echter Kettenbruch mit reiner (scharfer oder flacher) Abschlußperiode läßt sich durch die positive Wurzel einer Gleichung vom Aussehen

(B) $$Mx^2 + 2\,Mpx - N = 0,$$

worin $M(1+2p)-N$ positiv sein muß, summieren. In diesen Gleichungen bedeuten M, L, N, Mp, $2p$ positive ganze Zahlen.

Dieselben Sätze gelten auch für die sogenannten *„ersten Wurzeln"* ω der Form $(M, L, -M)$, welche wir eine *reziproke* nennen wollen, und Ω der Form $(M, Mp, -N)$, welche eine *ambigue* heißt, nur daß die Kettenbrüche nicht *echt*, sondern *unecht* sind.

Läßt sich die quadratische Gleichung mit ganzen Koeffizienten:

$$Py^2 + 2Qy + R = 0 \tag{1}$$

vermöge der Substitution $y = \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}$, worin α, β, γ, δ ganze Zahlen, und $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$

a) auf eine Gl. (A), aber auf keine Gl. (B) zurückführen,
b) „ „ „ (B), „ „ „ „ (A) „ ,
c) „ „ „ (A) und auch auf eine „ (B) „ ,
d) weder auf (A) noch auch auf (B) „ ,

so bilden die periodischen Teile der Kettenbruchentwicklungen für die Absolutwerte der Wurzeln der Gl. (1)

ad a) eine flache Umkehrperiode,
ad b) eine scharfe Abschlußperiode,
ad c) eine scharfe Umkehrperiode oder
eine flache Abschlußperiode, je nach Wahl des Periodenanfangs,
ad d) eine asymmetrische Periode.

Die Gl. (1) kann in den ersten drei Fällen auch mit einer Gl. (A) oder einer Gl. (B) identisch sein.

3. Bezeichnen wir mit D die Determinante der Form $(M, L, -M)$, beziehungsweise der Form $(M, Mp, -N)$, also

$$D = M^2 + L^2, \quad \text{bez.} \quad D = M^2p^2 + MN,$$

und mit σ den Teiler der betreffenden Form, und stellen die Gl.

$$t^2 - Du^2 = -\sigma^2 \tag{C}$$

auf, so ist diese bekanntlich mitunter für t und u in ganzen Zahlen lösbar, in anderen Fällen nicht lösbar. Dies Verhalten ist auch für den vorliegenden Gegenstand der Betrachtung von entscheidender Wichtigkeit; es gelten die Sätze:

Die positive Wurzel der Gl. (A) *oder die erste Wurzel* ω *der reziproken Form besitzt, wenn* (C) *lösbar ist, eine scharfe, wenn* (C) *nicht lösbar ist, eine flache Umkehrperiode.*

Die positive Wurzel der Gl. (B) *oder die erste Wurzel* Ω *der ambiguen Form besitzt, wenn* (C) *lösbar ist, eine flache, wenn* (C) *nicht lösbar ist, eine scharfe Abschlußperiode.*

Insbesondere folgt hieraus:

Die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D} - \lambda$, wenn λ die größte in $\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl ist, besitzt eine flache oder eine scharfe Abschlußperiode, je nachdem die Gleichung $t^2 - Du^2 = -1$ in ganzen Zahlen für t und u lösbar ist oder nicht lösbar ist.

Das letztere ist immer der Fall, wenn sich D nicht in die Summe zweier Quadrate zerlegen läßt, also z. B. wenn D die Gestalt $4k + 3$ hat.

4. Wird nun gefragt, welche Art der Periode dem Absolutwerte einer Wurzel der allgemeinen Gleichung

$$Px^2 + 2\,Qx + R = 0,$$

worin P, Q, R ganze Zahlen sind, zu eigen ist, so ist zunächst vorauszusetzen, daß die Determinante D der Form (P, Q, R) positiv ist, da anderenfalls die Wurzeln der Gl. (2) imaginär sind. Dann sehe man nach, ob unter den reduzierten Formen zur Determinante D, welche der Form (P, Q, R) äquivalent sind, sich eine reziproke vom Aussehen $(M, L, -M)$, mit der ersten Wurzel ω, oder $(-M, L, M)$ findet oder eine ambigue vom Aussehen $(M, Mp, -N)$ mit der ersten Wurzel Ω, oder $(-M, Mp, N)$. In den ersten beiden Fällen laufen die Entwicklungen beider Wurzeln der Gl. (2), absolut genommen, in die Periode von ω, in den letzten beiden Fällen in die Periode von Ω aus, welche im vorigen Paragraph charakterisiert sind. Tritt keiner dieser vier Fälle ein, so haben die Wurzeln von (2) asymmetrische Perioden.

Zusatz. Ist die Form (P, Q, R) ambigue, so läßt sie sich immer in eine ihr äquivalente reduzierte, *ebenfalls ambigue* Form transformieren, und man kann von vornherein die entscheidende Gleichung (C) aufstellen und aus ihrer Lösbarkeit oder Nichtlösbarkeit die im vorigen Paragraph angegebenen Schlüsse ziehen.[1])

Ebenso, wenn (P, Q, R) eine reziproke Form ist.

Königsberg, April 1904.

---

1) Wir unterscheiden, ob $2\,Q : P = m$ ungerade oder gerade, und in jedem der beiden Fälle, ob die Determinante D kleiner oder größer als ein gewisser Grenzwert ist. Die zu erzielende reduzierte Form sei (P', Q', R'), die zur Trans-

Analytisch-geometrische Ableitung der Realitätsbedingungen für die Wurzeln der Gleichungen vierten Grades.

Von Ernst Eckhardt in Homburg v. d. H.

(Schluß.)

6. In der bisherigen Untersuchung der Gleichungen vierten Grades mit Hilfe der Pascalschen Schnecke mußte zunächst der Fall $|b| > 2r_1e_1^2$ und zugleich $a^2 + 12c > 0$ ausgeschlossen werden. Er läßt sich durch die Konchoide des Nikomedes erledigen. Bei ihr tritt an die Stelle der kreisförmigen Basis der Schnecke die Gerade L. Die von L aus auf den durch den Pol P, Fig. 1, gehenden Strahlen abzutragende Strecke sei wieder e und $PQ = 2r$ das von P auf L gefällte Lot. Nimmt man P als Anfangspunkt der Koordinaten, die Richtung von PQ als *negative* x-Achse und das Lot in P auf PQ als y-Achse, so lautet die Gleichung der Konchoide:

$$(x^2 + y^2) \cdot (x + 2r)^2 = e^2x^2.$$

---

formation dienenden Substitutionskoeffizienten nennen wir α, β, γ, δ, und den Quotienten $2Q' : P'$ bezeichnen wir mit μ.

I. m ungerade.

$D < \frac{P^2}{4}$. Man wähle ζ als positive ungerade Zahl, so daß

$$\zeta^2 D < \frac{P^2}{4}, \quad (\zeta + 2)^2 D > \frac{P^2}{4};$$

dann ist: $\mu = -\zeta$; $\gamma = 2$, $\alpha = -m$, $\delta = \mu$, $2\beta = -1 - m\delta$.

$D > \frac{P^2}{4}$. Man wähle ζ als positive ungerade Zahl, so daß:

$$\frac{P^2}{4}\zeta^2 < D, \quad \frac{P^2}{4}(\zeta + 2)^2 > D;$$

dann ist: $\mu = \zeta$; $\gamma = 0$, $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $2\beta = \mu - m$.

II. m gerade.

$D < P^2$. Man wähle ζ als positive ganze Zahl, so daß

$$\zeta^2 D < P^2, \quad (\zeta + 1)^2 D > P^2;$$

dann ist: $\mu = -2\zeta$; $\gamma = 1$, $\alpha = -\frac{m}{2}$, $\delta = \frac{\mu}{2}$, $2\beta = -m\delta - 2$.

$D > P^2$. Man wähle ζ als positive ganze Zahl, so daß

$$P^2\zeta^2 < D, \quad P^2(\zeta + 1)^2 > D;$$

dann ist: $\mu = 2\zeta$; $\gamma = 0$, $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $2\beta = \mu - m$.

Wählt man dagegen die Mitte O von PQ zum Ausgangspunkt, so erhält sie die Form

$$[(x-r)^2+y^2]\cdot(x+r)^2=e^2(x-r)^2$$

oder

$$x^4+(y^2-e^2-2r^2)x^2+2r(y^2+e^2)x+r^2(y^2-e^2+r^2)=0.$$

Diese Kurve besteht bekanntlich aus zwei sich ins Unendliche erstreckenden Zweigen. Ist $e>2r$, so hat sie eine Schleife mit P als Doppelpunkt. Für $e<2r$ ist keine Schleife vorhanden, P ist ein isolierter Punkt. Ist $e=2r$, so erhält man in P eine Spitze.

Ist eine Schleife vorhanden, so ist die größte Ordinate y_1 dieser Schleife kleiner als $e-2r$.

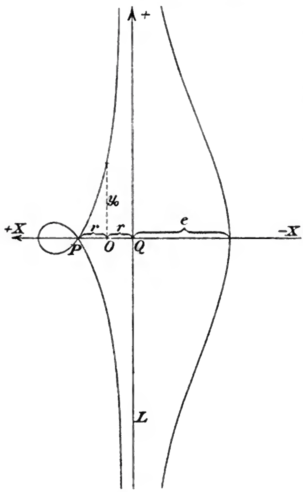


Fig. 1.

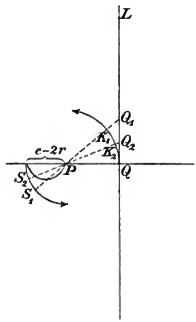


Fig. 2

Zum Beweise beschreibe man mit PQ, Fig. 2, um P einen Kreisbogen und ziehe durch P ein Strahlenbüschel, das den Bogen in $K_1, K_2, K_3 \ldots$ und die Gerade L in $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ schneidet. Ist nun $PQ_1=e$, so wird der untere Teil der Schleife dadurch erzeugt, daß man auf Q_1P, $Q_2P, \ldots$ von $Q_1, Q_2 \ldots$ aus die Strecke e abträgt. Schneidet man nun von $K_1, K_2, \ldots$ auf den Strahlen dieselbe Strecke e ab, so liegen die Endpunkte $S_1, S_2, S_3 \ldots$ auf einem Kreise mit dem Radius $e-2r$ um P, und dieser Kreis schließt nach seiner Entstehung die Schleife völlig ein; es ist also in der Tat $y_1<e-2r$.

Hieraus folgt, daß jede Parallele zur x-Achse, für die $y^2 \geqq e^2 - 4r^2$, *die Schleife nicht schneidet;* denn da $e > 2r$, so ist stets $4er > 8r^2$ und also $e^2 - 4r^2 > (e-2r)^2$. Für $x = 0$ ergibt sich aus der Kurvengleichung $y_0^2 = e^2 - r^2$. Da nun $e^2 - r^2 > e^2 - 4r^2$, so kann auch eine Parallele zur x-Achse im Abstande $y = \pm\sqrt{e^2 - r^2}$ die Schleife nicht treffen.

Nach diesen Feststellungen kann die Untersuchung der Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ für den Fall $D < 0\ (b > 2r_1 e_{1,2}^2)$ und $a^2 + 12c \geqq 0$ durchgeführt werden. b kann als positiv vorausgesetzt werden; wäre es negativ, so brauchte man bloß x durch $-x$ zu ersetzen, um wieder einen positiven Koeffizienten zu erhalten.

Identifiziert man nun die Koeffizienten der Gleichung der Konchoide mit denen der gegebenen Gleichung vierten Grades, so erhält man zur Bestimmung von r, e, y die Beziehungen

$$y^2 - e^2 - 2r^2 = a; \quad 2r(y^2 + e^2) = b, \quad r^2(y^2 - e^2 + r^2) = c.$$

Die hieraus gefundenen Werte von r und e bestimmen die Konchoide. Die zu $\pm y$ gehörigen Abszissen stellen die Wurzeln der biquadratischen Gleichung dar. Man findet zunächst

$$r_{1,2}^2 = \tfrac{1}{6}\left(-a + \sqrt{a^2 + 12c}\right), \quad e^2 - y^2 = \tfrac{1}{3}\left(-2a - \sqrt{a^2 + 12c}\right) = e_{1,2}^2;$$

$$r_{3,4}^2 = \tfrac{1}{6}\left(-a - \sqrt{a^2 + 12c}\right), \quad e^2 - y^2 = \tfrac{1}{3}\left(-2a + \sqrt{a^2 + 12c}\right) = e_{3,4}^2.$$

Es sei nun

7. $a < 0,\ c > 0,\ a^2 - 4c \geqq 0,\ b > 2r_1 e_{1,2}^2$. — Da $r_{3,4}$ unter diesen Bedingungen imaginär ist, so kommen zur Bestimmung von e und y nur die reellen Größen $r_{1,2}$ und $e_{1,2}$ in Betracht. Von $r_{1,2}$ wird zur Konstruktion nur das positive r_1 gebraucht. Aus $e^2 - y^2 = e_{1,2}^2$ und $e^2 + y^2 = \frac{b}{2r_1}$ ergibt sich $e^2 = \frac{b + 2r_1 e_{1,2}^2}{4r_1}$, $y^2 = \frac{b - 2r_1 e_{1,2}^2}{4r_1}$. Da $b > 2r_1 e_{1,2}^2$ oder $D < 0$, so sind e und y reell. r_1 und e bestimmen die Konchoide, und da wegen $c > 0$ $y^2 > e^2 - r^2$ ist, so trifft die Parallele im Abstande y zur x-Achse die Kurve nur in zwei reellen Punkten. Ihre Abszissen sind die Wurzeln der biquadratischen Gleichung.

Die Parallele im Abstande $-y$ würde zwei symmetrische Punkte mit denselben Abszissen ergeben.

Wegen $y^2 > y_0^2$ sind beide negativ. *Unter den gegebenen Bedingungen hat also die Gleichung vierten Grades nur zwei reelle Wurzeln.*

Ob die Kurve eine Schleife hat oder nicht, braucht wegen $y^2 > e^2 - r^3$ gar nicht untersucht zu werden.

8. $a < 0,\ c < 0,\ a^2 + 12c > 0,\ b > 2r_1 e_{1,2}^2$. — Es sind jetzt sowohl $r_{1,2}^2$ und $e_{1,2}^2$ als auch $r_{3,4}^2$ und $e_{3,4}^2$ reell. Da aber der Fall $-2r_3 e_{3,4}^2 < b < 2r_3 e_{3,4}^2$ bereits erledigt ist, so werden zur Berechnung von e^2 und y^2 wieder bloß r_1 und $e_{1,2}$ verwendet. Die sich ergebenden Ausdrücke sind dieselben wie in Nr. 6 und müssen gleichfalls reell und positiv sein. Die Konchoide existiert also. Aus

$$r_1^2 < e_{1,2}^2 < 4r_1^2, \quad \text{oder} \quad r_1^2 < e^2 - y^2 < 4r_1^2$$

folgt nun, daß $e > r_1$, daß also der eine Zweig der Kurve die x-Achse links von O schneidet.

Die letzten Ungleichungen lassen ferner erkennen, daß

$$e^2 - y_1^2 < y^2 < e^2 - r_1^2.$$

Die Parallele im Abstande $+y$ kann also wieder nur *zwei reelle* Punkte aus der Konchoide ausschneiden, mag diese eine Schleife haben oder nicht. Ihre Abszissen sind die Wurzeln der biquadratischen Gleichung, sie haben wegen $y^2 < y_0^2$ das entgegengesetzte Zeichen.

9. $c > 0,\ b \geqq |2r_2 e_{1,2}^2|$ und 1) $a > 0$ und $a^2 - 4c \gtrless 0$, oder 2) $a < 0$ und $a^2 - 4c < 0$. — $r_{3,4}$ wird imaginär, r_1 ist reell, $e_{1,2}^2 < 0$.

Infolge der Beziehung $b \geqq |2r_1 e_{1,2}^2|$ müssen auch jetzt die Ausdrücke für e^2 und y^2 reell und positiv sein. Die Konchoide ist also ebenfalls reell und wird wegen $e^2 - y^2 = e_{1,2}^2 < 0,\ y^2 > e^2 > e^2 - r^2$ *durch die Parallele im Abstande* $+y$ *nur in zwei reellen Punkten mit negativen Abszissen geschnitten.*

Ist $b = |2r_1 e_{1,2}^2|$, also $e = 0$, so fallen die beiden Zweige der Konchoide mit der Geraden L zusammen, die Parallele im Abstande y liefert daher zwei zusammenfallende Punkte mit den Abszissen $x = -r_1$.

Faßt man die Resultate unter Nr. 7, 8, 9 zusammen, so kann man sagen:

Im Falle $a^2 + 12c > 0$ *und* $b > |2r_1 e_{1,2}^2|$ *oder* $D < 0$ *hat die biquadratische Gleichung nur zwei reelle Wurzeln.*

10. $a^2 + 12c < 0$. — Zur Erledigung dieses Falles muß erst der Verlauf zweier Kurven festgestellt werden, die durch Verallgemeinerung eines Grenzfalles der Pascalschen Schnecke und der Konchoide des Nikomedes entstehen.

a) Die der Hauptuntersuchung zugrunde liegende Pascalsche Schnecke nimmt für $e = 2r$ die Form an

$$S \equiv x^4 - 6r^2x^2 + 8r^3x \cos\alpha - 3r^4 = 0.$$

Diese Kurve hat in P, Fig. 3, eine Spitze und besteht aus einem einfachen Zuge ohne Schleife. Von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 180^0$ nimmt x der Konstruktion der Kurve gemäß stetig zu. Betrachtet man nun die Kurve

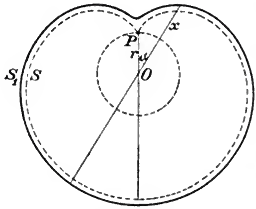


Fig. 3.

$$S_1 \equiv S - k^4 = 0,$$

wo k reell und positiv sein soll, so muß $S_1 = 0$ ganz außerhalb von $S = 0$ liegen, da S im Inneren von $S = 0$ *negativ* ist.

Ferner kann $S_1 = 0$ nicht aus einem zweifachen getrennten oder zusammenfallenden Zuge bestehen, da das absolute Glied von $S_1 = 0$ *negativ* ist und $S_1 = 0$ also nicht zwei positive und zwei negative Wurzeln haben kann.

Wohl aber könnte eine Schleife vorhanden sein. Um das zu entscheiden, bilde man

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{2r^3x \sin\alpha}{x^3 - 3r^2x + 2r^3\cos\alpha} = \frac{2r^3x^2 \sin\alpha}{3r^2x^2 - 6r^3x\cos\alpha + 3r^4 + k^4}$$

und hieraus

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{x\,d\alpha}{dx} = \frac{3r^2x^2 - 6r^3x\cos\alpha + 3r^4 + k^4}{2r^3x\sin\alpha},$$

wo ϑ der Winkel ist, den die Tangente in irgend einem Punkte der Kurve mit dem Radiusvektor x bildet. Wäre nun eine Schleife vorhanden, so müßte ϑ sicher einmal verschwinden, der Zähler also Null werden können. *Dies ist aber nicht möglich, da* $k^4 > 0$.

Für $\alpha = 0^0$ und $\alpha = 180^0$ wird $\vartheta = 90^0$, während x hierfür seinen kleinsten und größten Wert erreicht. Der Nenner von $\frac{dx}{d\alpha}$ bleibt wegen $x > r$ stets positiv, x nimmt also von $\alpha = 0^0$ bis $\alpha = 180^0$ stetig zu.

Da ϑ *nicht Null* werden kann, so kann auch die für kleine Werte von k^4 sicher vorhandene Wendetangente nicht durch O gehen.

$S_1 = 0$ *besteht also aus einem einfachen* $S = 0$ *einschließenden Zuge ohne Spitze* (Fig. 3).

b) Für $e = 2r$ wird die Konchoide des Nicomedes durch die punktierte Kurve in Fig. 4 dargestellt. Sie hat in P eine Spitze und ihre Gleichung lautet:

$$C \equiv x^4 + (y^2 - 6r^2)x^2 + 2r(y^2 + 4r^2)x + r^2(y^2 - 3r^2) = 0.$$

Ist k eine reelle positive Größe, so ergibt sich wie in a), daß die Kurve $C_1 \equiv C - k^4 = 0$ die punktierte Kurve einschließt.

Sind y und y_1 die zu demselben x gehörigen Ordinaten der Kurven C und C_1, so gilt von $x = -3r$ bis $x = +r$ die Beziehung $y_1^2 = y^2 + \frac{k^4}{(x+r)^2}$. Da nun y^2 in den Intervallen $x = -r$ bis $x = +r$ und $x = -r$ bis $-3r$ stetig abnimmt von ∞^2 bis 0, so ist dies bei y_1^2 in derselben Weise der Fall von ∞^2 bis $\frac{k^4}{4r^2}$.

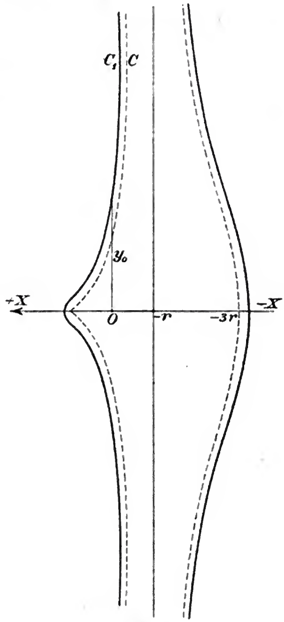


Fig. 4.

Die Entscheidung über den Verlauf von C_1 in den Intervallen

$$x = r \text{ bis } r + |x_1|$$

und

$$\alpha = -3r - |x_1|,$$

wo

$$r + |x_1| \quad \text{und} \quad -3r - |x_1|$$

die Abszissen der Schnittpunkte von C_1 mit der x-Achse sind, gibt die Ableitung

$$\frac{d(y_1^2)}{dx} = -\frac{2}{(x+r)^2} \cdot$$

$$\{(x+r)y_1^2 + 2(x-r)\cdot[x(x+r) - 2r^2]\}\cdot$$

Die rechte Seite bleibt, wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt, für jeden Wert von $x \geqq r$ und ebenso für jedes $x \leqq -3r$ negativ. y_1^2 nimmt also stetig weiter ab von $\frac{k^4}{4r^2}$ bis 0.

Diese Art der Untersuchung setzt die stetige Abnahme von y^2 als bekannt voraus. Will man unabhängig von y^2 den Verlauf von C_1 feststellen, so muß man nachweisen, daß der Ausdruck in der äußeren Klammer auf der rechten Seite nicht verschwinden kann, daß also die Gleichung

$$(x+r)y_1^2 + 2(x-r)\cdot[x(x+r) - 2r^2] = 0$$

nur imaginäre Wurzeln hat. Ersetzt man in ihr y_1^2 durch x aus $C_1 = 0$, so erhält man

$$x^4 + 2rx^3 - 10r^3x + 7r^4 + k^4 = 0$$

und hieraus die reduzierte Form

$$x^4 - \tfrac{3}{2}r^2x^2 - 9r^3x + 11\tfrac{13}{16}r^4 + k^4 = 0.$$

Ihre Diskriminante ist

$$\begin{aligned} 27D &= 4 \cdot 12^3(12r^4 + k^4)^3 - 108^2 \cdot r^4(32r^4 + k^4)^2 \\ &= 4 \cdot 12^3[(12r^4 + k^4)^3 - 12r^4(12r^4 + \tfrac{3}{8}k^4)^2]. \end{aligned}$$

Da nun

$$(12r^4 + k^4)^3 > (12r^4 + \tfrac{3}{8}k^4) \cdot (12r^4 + \tfrac{3}{8}k^4)^2,$$

so ist umsomehr

$$(12r^4 + k^4)^3 > 12r^4(12r^4 + \tfrac{3}{8}k^4)^2$$

und also $D > 0$.

Da nun außerdem $a < 0$, $c > 0$, $a^2 - 4c < 0$, so hat die betrachtete Gleichung in der Tat nach Nr. 4 *vier imaginäre* Wurzeln.

Der Ausdruck A in der äußeren Klammer auf der rechten Seite von $\frac{d(y_1^2)}{dx}$ kann also sein Zeichen nicht wechseln, und da er für $x = 0$ positiv ist, ist er überhaupt *positiv.*

Daraus folgt aber, daß y_1^2 in den Intervallen $-r$ bis $r + |x_1|$ und $-r$ bis $-3r - |x_1|$ stetig abnimmt von ∞^2 bis 0.

Aus $\frac{dy_1}{dx} = -\frac{2A}{y_1(x+r)}$ schließt man ferner, daß für $y_1 = 0$ $\frac{dy_1}{dx} = -\infty$ ist, daß also die Kurve C_1 die Abszissenachse rechtwinklig schneidet.

Die Kurve $C_1 = 0$ besteht also aus einem linken und rechten einfachen Zweige ohne endliches Maximum oder Minimum.

Es sei nun

11. $a \geqq 0$, $c < 0$, $a^2 + 12c < 0$. — Durch Identifizierung der Koeffizienten der Kurve $C_1 = 0$ mit den Koeffizienten a, b, c der biquadratischen Gleichung erhält man zur Berechnung von r, k, y die Beziehungen

$$y^2 - 6r^2 = a, \quad 2r(y^2 + 4r^2) = b, \quad r^2(y^2 - 3r^2) - k^4 = c.$$

Hieraus folgt für r die Gleichung $r^3 + \frac{a}{10}r - \frac{b}{20} = 0$. Da b wieder als positiv vorausgesetzt werden darf, so liefert die letzte Gleichung stets einen positiven reellen Wert für r, der ein positives $y_1^2 > 6r^2$ und also wegen $c < 0$ auch ein positives k^4 im Gefolge hat.

Durch r und k^4 ist die Kurve $C_1 = 0$ bestimmt. Auf dieser Kurve entsprechen $y_1 = +\sqrt{a + 6r^2}$ *zwei* Punkte, deren Abszissen die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind.

Für die Ordinate $+y_0$ des Anfangspunktes gilt $r^2(y_0^2 - 3r^2) - k^4 = 0$, für $+y_1$ ist $r^2(y_1^2 - 3r^2) - k^4 < 0$, demnach muß $y_1^2 < y_0^2$ sein. Die eine der obigen Abszissen ist also *positiv*, die andere *negativ*.

12. $a < 0$, $c < 0$, $a^2 + 12c < 0$. — Man gehe aus von der Kurve $S_1 = 0$ und setze ihre Koeffizienten gleich den entsprechenden der vorgelegten Gleichung. Dann ist

$$6r^2 = |a|, \quad 8r^3 \cos\alpha = b, \quad 3r^4 + k^4 = |c|,$$

also

$$r = \sqrt{\frac{|a|}{6}}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{8\left(\sqrt{\frac{|a|}{6}}\right)^3}, \quad k^4 = |c| - 3r^4.$$

Da $a^2 + 12c = -12k^4 < 0$, so ist $k^4 > 0$. Durch r und k^4 läßt sich $S_1 = 0$ konstruieren, und solange $\frac{b}{8\left(\sqrt{\frac{|a|}{6}}\right)^3} \leqq 1$, oder $8a^3 + 27b^2 \leqq 0$, schneidet jeder Strahl unter dem Winkel α einen positiven und einen negativen Radiusvektor als Wurzel der Gleichung vierten Grades aus.

Ist $8a^3 + 27b^2 \geqq 0$, so führt die Kurve $C_1 = 0$ zum Ziele. Wie unter (10) folgt zunächst aus $r^3 - \frac{|a|}{10}r - \frac{|b|}{20} = 0$, daß stets ein positives reelles r vorhanden ist. Für $8|a| = 27b^2$ ist $r = \frac{1}{2}\sqrt[3]{b}$ und für $8|a|^3 < 27b^2$ wird $r > \frac{1}{2}\sqrt[3]{b}$. Dann ist aber auch $y^2 = 6r^2 - |a| > 0$ und folglich auch wegen $a^2 + 12c = y^4 - 12k^4 < 0$ die Größe $k^4 > 0$. Ferner hat man wie in (10) $y_0^2 > y^2$.

Der reellen Ordinate y entsprechen daher in der aus r und k gezeichneten Kurve $C_1 = 0$ *zwei* Punkte mit einer positiven und einer negativen Abszisse als Wurzeln der Gleichung.

In den Fällen $a \gtrless 0$, $a^2 + 12c < 0$ *hat also die biquadratische Gleichung nur zwei reelle Wurzeln.*

Da auch hier die Diskriminante negativ ist, so kann man die unter Nr. 5 bis Nr. 12 gewonnenen Resultate zusammenfassen und sagen:

Ist die Diskriminante der biquadratischen Gleichung negativ, so hat diese Gleichung stets zwei und nur zwei reelle Wurzeln.

Homburg v. d. Höhe.

Rezensionen.

R. Schröder, Die Anfangsgründe der Differentialrechnung und Integralrechnung. Für Schüler von höheren Lehranstalten und Fachschulen, sowie zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und 27 Figuren im Text. VII u. 131 S. gr. 8. Leipzig 1905, B. G. Teubner. *M* 1.60.

Der Verfasser hat, wie er in seinem Vorwort sagt, von der Freiheit Gebrauch gemacht, die in den preußischen Lehrplänen von 1901 gelassen ist, und hat die Primaner der unter seiner Leitung stehenden, seit Ostern 1905 ausgebauten Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde in die Anfangsgründe der höheren Analysis eingeführt. Obwohl er diesen Versuch erst ein- oder zweimal gemacht hat, obwohl also die Praxis des Unterrichts, auf die er sich stützen kann, nur kurz ist, hat er doch nicht gedacht: Nonum prematur in annum, sondern hat, was ja immerhin dankenswert ist, seinen Lehrgang veröffentlicht.

In ähnlicher Weise, wie ich es seit fast zwei Jahrzehnten an der Breslauer Oberrealschule zu tun pflege, führt der Verfasser den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Funktion $y = f(x)$ ein, definiert die erste Ableitung $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ als seine Grenze für $\Delta x = 0$ und leitet dann in übersichtlicher, klarer Weise die Gesetze für die Differentiation algebraischer und transzendenter Funktionen her. Zur Übung im Differenzieren fügt er 111 meist ziemlich einfache Aufgaben bei, die er fast durchweg mit einer oft sehr ausführlichen Lösung versieht. Nach meiner Meinung wäre es besser gewesen, das nur bei einer kleinen Anzahl von Übungsbeispielen zu tun, bei den übrigen aber das bloße Resultat oder gar keine Lösung zuzufügen. Es ist zu befürchten, daß durch die Art, wie Herr Schröder vorgeht, zwar eine mir etwas handwerksmäßig erscheinende Geschicklichkeit im Rechnen erzielt wird, daß aber die rechte Einsicht in die äußerst fruchtbaren Methoden der Infinitesimalrechnung fehlen wird. Das rein mechanische Einsetzen in bestimmte Formeln tritt zu sehr in den Vordergrund, und das will mir nicht behagen. Vorzuziehen ist es, wenn man durch etwas schwierigere Aufgaben die Primaner zum Nachdenken anregt und die Findelust in ihnen weckt. Nun zu einigen Einzelheiten!

Daß sich Funktionen wie $y = x^m \sqrt[n]{x^p}$ am bequemsten differenzieren lassen, wenn man sie auf die Form $y = x^{\frac{mn+p}{n}}$ bringt, wird nicht schon bei Aufgabe 22, sondern erst bei Aufgabe 28 erwähnt. Bei den Beispielen zur Differentiation impliziter Funktionen vermisse ich den Hinweis darauf, daß man auch ohne Benutzung der partiellen Differentialquotienten durch

unmittelbares Differenzieren leicht zum Ziele kommen kann. So ergibt sich bei der Aufgabe 105 aus $x^3 - y^2(2a - x) = 0$ sofort $3x^2 + y^2 - 2yy'(2a - x) = 0$, woraus man $y' = \frac{3x^2 + y^2}{2y(2a - x)}$ findet. Aufgaben wie Nr. 8 auf S. 59 lassen sich bequemer lösen, wenn man die logarithmische Ableitung $\frac{y'}{y}$ bildet. Ist $z = 2\sqrt{2px} \cdot (a - 2x)$, so ist die zu untersuchende Funktion $f(x) = x(a - 2x)^2$; man hat also $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{4}{a - 2x}$ gleich Null zu setzen und erhält $x = \frac{1}{6}a$.

Die Lösung der Aufgabe 10 auf S. 60 ist wenig elegant. Aus $S = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta}$ folgt, wenn man α als unabhängige Variable wählt,

$$\text{(I)} \qquad \frac{dS}{d\alpha} = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{b\sin\beta}{\cos^2\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Aus $a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta = c$ ergibt sich

$$\text{(II)} \qquad \frac{a}{\cos^2\alpha} + \frac{b}{\cos^2\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{b}{\cos^2\beta} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{a}{\cos^2\alpha}.$$

Setzt man diesen Wert in (I) ein, so erkennt man, daß $\sin\alpha = \sin\beta$ sein muß.

Bei den Aufgaben zur Bestimmung des Wertes von Ausdrücken, die eine unbestimmte Form haben, hätte der Verfasser auf die in vielen Fällen sehr empfehlenswerte Benutzung von Reihen hinweisen sollen. Besonders das Beispiel auf S. 42 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^3\cos x + \sin^3 x}{x^2 \sin x}$ legte das nahe, denn wenn man schreibt

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^3\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) + x^3\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)^3}{x^3\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)} = \frac{2 - x^2 P}{1 - x^2 Q},$$

worin P und Q ganze Funktionen von x sind, so erkennt man auf der Stelle, daß sich für $x = 0$ der Wert 2 ergeben muß.

Das sind ja alles kleine Mängel, bedenklich aber ist, daß der Verfasser bei der Begründung der Lehre von den extremen Werten auf S. 53 den Satz aufstellt: Die Funktion $y = f(x)$ besitzt ein Maximum oder Minimum an denjenigen Stellen, in welchen $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ ist. Aus den vorausgeschickten Auseinandersetzungen folgt nur: An einer Stelle, wo ein extremer Wert eintritt, muß $\frac{dy}{dx} = 0$ sein. Der Verfasser weiß doch sehr wohl, daß nicht alle Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ größte oder kleinste Werte von $f(x)$ zu liefern brauchen; er hätte sich also vorsichtiger und sorgfältiger ausdrücken müssen, um Mißverständnissen vorzubeugen.

Die Art, wie der Verfasser in die Integralrechnung einführt, ist im allgemeinen zu billigen. Auch hier fehlt es an Aufgaben, die zu eignem Nachdenken anregen, auch hier erscheinen mir die beigegebenen Lösungen hin und wieder etwas umständlich. Die auf S. 102 behandelte Quadratur der Zissoide wird viel einfacher, wenn man $x = 2r\sin^2 u$ setzt, denn man

erhält dann sofort $8a^2\int \sin^4 u\, du$. Die Integration läßt sich leicht ausführen, denn es ist

$$4 \sin^4 u = (1 - \cos 2u)^2 = \tfrac{3}{2} - 2 \cos 2u + \tfrac{1}{2} \cos 4u.$$

Mithin ist $8a^2\int \sin^4 u\, du = 2a^2\left(\tfrac{3}{2}u - \sin 2u + \tfrac{1}{8} \sin 4u\right)$.

Auch bei der Quadratur der Zykloide auf S. 105 ist es besser, zu schreiben $\int \cos^2 y\, dy = \tfrac{1}{2}\int (1 + \cos 2\varphi) dy = \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi$. Für die Kardioide, die im § 48 behandelt ist, ziehe ich der vom Verfasser gewählten Polargleichung $r = 2a(1 + \sin\varphi)$ die Form $r = 2a(1 - \cos\varphi)$ vor, denn bei der Quadratur kommt man dann auf $\int \tfrac{1}{2} r^2 dy = 8a^2\int \sin^4 \frac{\varphi}{2}\, d\varphi$ und kann nachher verfahren wie bei der Zissoide.

Mit der Sprache des Buches kann ich mich nicht durchweg einverstanden erklären. Mich stört schon die unzeitgemäße Vorliebe für das Relativ welcher und das „Faulheitspronomen" derselbe, das doch endlich einmal ausgemerzt werden müßte. Geradezu unangenehm berühren mich Wendungen wie folgende: Wenn eine Funktion $y = f(x)$ gegeben ist, so haben wir in der Differentialrechnung gelernt ... (S. 86). Wo sind in ähnlichem Verhältnis stehende Operationen schon angetroffen? (S. 88.) Wenn ausmultipliziert und zusammengefaßt ist ... (S. 71).

Es soll mich freuen, wenn bei einer hoffentlich erforderlichen neuen Auflage des Buches der Verfasser einige der Winke beachtet, die ich hier zu geben mir erlaubt habe.

Breslau. O. Gutsche.

Heinrich Weber, Josef Wellstein und Walter Jacobsthal: Encyklopädie der elementaren Geometrie. Mit 280 Textfiguren. XII u. 604 S. gr. 8. Leipzig 1905, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

Das Buch bildet den zweiten Band der „Encyklopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende", von Heinrich Weber und Josef Wellstein, mit dem Nebentitel „Elemente der Geometrie". Bei der Anzeige des ersten Bandes, der von Weber allein bearbeitet war (Archiv (3) **9**, 369), ist der besondere Charakter der Enzyklopädie der Elementarmathematik gewürdigt worden.

Das erste „Buch" des neuen Bandes über die Grundlagen der Geometrie ist von Herrn Wellstein verfaßt. Im zweiten „Buche", das die Trigonometrie erledigt, ist die ebene Trigonometrie und die Polygonometrie von Herrn Weber geschrieben, die sphärische Trigonometrie von Herrn Jacobsthal. Das dritte „Buch", das die analytische Geometrie und Stereometrie enthält, hat Weber zum Verfasser; nur der Paragraph 83, die analytische Sphärik, rührt von Jacobsthal her.

Noch weniger als bei dem ersten Bande entspricht bei dem zweiten der Inhalt dem Titel einer Enzyklopädie der elementaren Geometrie. Die „zahllosen Sätze und Sätzchen der Elementargeometrie über Dreieck und Kreis, Tetraeder und Kugel" werden in der Vorrede etwas geringschätzig bei Seite geschoben. „Unter Ausscheidung alles zurzeit noch Isolierten und darum Unfruchtbaren sollte nur das geboten werden, was in den An-

wendungen auf Mechanik und Physik sich als nützlich erweist und auch in der höheren Mathematik fortlebt. In diesem engeren Bereiche wurde in erster Linie Vertiefung und Belebung des Gegenstandes angestrebt, Vertiefung durch ausführliche kritische Behandlnng nach der logischen und erkenntnistheoretischen Seite, Belebung durch Anwendungen, die für einen dritten Band vorbehalten sind." — Mag man über die neuere Dreiecksgeometrie urteilen, wie man will, so durfte in einer Enzyklopädie der elementaren Geometrie die Sache doch nicht in einer Fußnote (S. 333) durch eine Verweisung auf Pascals Repertorium abgetan werden.

Da indessen der dritte Band Anwendungen bringen soll, darf man hoffen, daß dort noch manches Platz finden wird, was der Käufer des Werkes nach dem Titel desselben in dem gegenwärtigen Bande vergeblich sucht. Doch glauben wir, daß die Enttäuschung, welche die Durchsicht des vorliegenden Bandes bei vielen hervorgerufen hat, durch den zu erwartenden nicht völlig beseitigt werden wird. Der Oberlehrer, der für seinen Unterricht sofort verwertbaren Stoff sucht, wird eben einsehen müssen, daß das von den Verfassern verfolgte Ziel nicht in dieser Richtung liegt.

Die beiden Leiter des Unternehmens, Weber und Wellstein, haben als Unisersitätslehrer den Stoff unter dem Gesichtspunkte behandelt, daß sie dem zukünftigen und dem schon im Amte befindlichen Oberlehrer den Stand der wissenschaftlichen Forschung über elementar-geometrische Fragen in der Gegenwart haben darstellen wollen. Ob das Werk ebenso ausgefallen wäre, wenn die beiden Autoren selbst einige Zeit den Schulunterricht in der Geometrie erteilt hätten, möchte Referent bezweifeln, der vor seinem Eintritt in die Technische Hochschule 24 Jahre lang als Oberlehrer tätig gewesen ist.

Nach dieser unumwundenen Äußerung der Bedenken, die sich auf den Mangel an Übereinstimmung zwischen Titel und Inhalt beziehen, möge nun aber auch gleich die Anerkennung folgen, daß das Werk nicht bloß den Mathematiker auf das lebhafteste interessieren muß, sondern überhaupt jeden denkenden Menschen, der etwas aus der Erkenntnistheorie erfahren will, und zwar hier an dem einfachsten Beispiele, dem der Geometrie.

Von den 563 Textseiten werden nämlich die ersten 301, also mehr als die Hälfte, durch das erste Buch über die Grundlagen der Geometrie angefüllt; von diesen entfallen nur die Seiten 220 bis 301 auf die eigentliche Planimetrie. Die nichteuklidische Geometrie, welche im letzten Jahrhundert immer nur von einzelnen Liebhabern als Gegenstand der Forschung gewählt wurde, ist nach dem Erscheinen des Hilbertschen Buches „Grundlagen der Geometrie" (1899) ein allseitig und eifrig gepflegtes Arbeitsgebiet geworden. Besonders die vielen Schüler Hilberts haben sich mit einem solchen Eifer und Erfolg dieser Studien beflissen, daß man scherzweise die alte Redensart „Eulen nach Athen tragen" mit der anderen vertauscht hat: „Nichteuklidische Geometrie nach Göttingen tragen". Diese lebhafte wissenschaftliche Bewegung hat offenbar das erste, von Wellstein verfaßte „Buch" des Bandes beeinflußt, und es ist eine Darstellung entstanden, die nichts weniger als enzyklopädisch ist, sondern in origineller Weise alle Seiten des Gegenstandes widerspiegelt und ein vollständiges Bild von ihm zu geben sucht. Mag man immerhin in Einzelheiten anderer Meinung sein als der Verfasser, wie unter anderem Weber seine in bezug auf Kants

Raumlehre abweichende Ansicht durch einen „Nachtrag zu den Grundlagen der Geometrie“, S. 589 bis 591, zum Ausdruck gebracht hat, so ist die ganze Schreibweise so natürlich und frisch, führt so einfach in die verwickelten Betrachtungen hinein, daß die philosophische Vertiefung, auf die dieser Abschnitt berechnet ist, gewiß bei allen Lesern erreicht wird, die den Stoff selbsttätig durchdenken. Der alte Grundsatz von Descartes: de omnibus dubitare wird mit Erfolg auf die Prinzipien der Geometrie angewandt, die man so lange als von jedem Zweifel unangefochten, als das Gewisseste im menschlichen Geiste betrachtet hatte.

Gerade wie in diesem ersten Buche die prinzipiellen Seiten der Geometrie so beleuchtet sind, wie sie gegenwärtig den sich um sie bemühenden Forschern erscheinen, so hat Herr Jacobsthal in der sphärischen Trigonometrie, die den verhältnismäßig großen Raum von 100 Seiten einnimmt, außer der älteren Möbiusschen Auffassung die Grundgedanken der Studyschen Abhandlung aus dem Jahre 1893 über die sphärische Trigonometrie auseinandergesetzt und ist damit etwas aus dem Rahmen der Elementargeometrie herausgetreten. Obgleich diese Bereicherung des Inhaltes an sich wertvoll ist, darf man wohl fragen, ob nicht andere, unberücksichtigt gebliebene Teile der Elementarmathematik nötiger gewesen wären.

Hinsichtlich der von Herrn Weber verfaßten Abschnitte der ebenen Trigonometrie und der analytischen Geometrie sowie der Stereometrie ist aus dem Grunde weniger zu bemerken, weil sie sich mehr in den üblichen Grenzen halten. Die Aufnahme der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes in die Enzyklopädie der Elementarmathematik wird in der Vorrede damit begründet, daß die Kegelschnittslehre, „dieses schönste und höchste Gebiet der Elementargeometrie, von den verschiedensten Seiten her in Angriff zu nehmen“ sei. Die Grenzen, bis zu denen vorgegangen ist, sind etwa auf unseren Oberrealschulen erreichbar, während man in Frankreich in den „Classes de mathématiques spéciales“ viel weiter geht. „Eine zusammenhängende Darstellung der Kegelschnittslehre würde über den Rahmen unseres Werkes hinausgegangen sein.“

Im einzelnen wird mancher Änderungen wünschen. Wir wollen hier eine Kleinigkeit erwähnen. Auf Seite 275 wird der Bruch $3 \sin \varphi : (2 + \cos \varphi)$ in eine Potenzreihe von φ entwickelt. Statt bei dieser Gelegenheit die Methode der unbestimmten Koeffizienten nebenbei mit zu beweisen, hätte das gewöhnliche Divisionsschema genügt. Der Koeffizient von φ^7 ist infolge eines Zeichenfehlers falsch als 1/360 bestimmt, während er in Wahrheit 1/1512 ist. Außer der einen an dieser Stelle mitgeteilten Huygensschen Konstruktion für die angenäherte Darstellung der Länge eines Kreisbogens hätte die andere, die bloß erwähnt ist, ebenfalls Platz finden sollen, weil bei ihr das erste Fehlerglied bedeutend geringer ist ($\varphi^5/7680$ statt $\varphi^5/180$), wie aus dem Texte von Huygens schon hervorgeht. Das Lob der auf S. 17ff. vorgeführten Steinerschen Linearkonstruktionen ist zwar objektiv begründet; wenn aber, wie in einer jüngst veröffentlichten Programmschrift des Herrn Zühlke nachgewiesen wird, Lambert lange vor Steiner dieselben Gedanken durchgeführt hat, so muß diesem älteren genialen Forscher wenigstens ein Teil des Lobes zugesprochen werden.

Um mißverständlichen Auffassungen vorzubeugen, soll am Schlusse nachdrücklich erklärt werden, daß Referent es für sehr wünschenswert, ja

dringlich erachtet, daß alle Lehrer der Elementargeometrie sich mit den prinzipiellen Erörterungen dieses Bandes der Enzyklopädie bekannt machen. Natürlich soll damit durchaus nicht gemeint sein, daß diese Erörterungen zum Gegenstande des Schulunterrichts gemacht werden.

Berlin. E. Lampe.

W. Hauber. Statik. I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper. 148 S., 82 Figuren. 1903. II. Teil: Angewandte (technische) Statik. 148. S., 61 Figuren. 1904. Leipzig, G. H. Göschen. (Samml. Göschen Nr. 178 und 179).

Das erste Bändchen behandelt den auf die einfachsten Gegenstände beschränkten Stoff in 6 Kapiteln: I. Kräfte der Ebene mit gemeinsamem Angriffspunkt. II. Kräfte der Ebene, die in verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen. III. Kräfte des Raumes mit gemeinsamem Angriffspunkt. IV. Kräfte des Raumes, die in verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen. V. Von der Schwerkraft und dem Schwerpunkte. VI. Von den Widerstandskräften und ihrer Bestimmung.

Das zweite Bändchen erledigt den gewaltigen Stoff in 7 Kapiteln: I. Starre Stabverbindungen mit beliebiger Belastung. II. Ebene Fachwerke. III. Spreng- und Hängwerke. IV. Standfestigkeit der Mauern (Pfeiler). V. Standfestigkeit der symmetrischen Tonnengewölbe. VI. Theorie des Erddruckes. VII. Vom Gleichgewicht der seilartigen Körper.

Überall wird außer der analytischen Behandlung auch die graphische gelehrt. Schon im ersten Bändchen ist immer die Richtung auf die technischen Anwendungen gewahrt, wie das vom Verf., einem Dipl. Ing., zu erwarten ist. Das zweite Bändchen enthält ja überhaupt nur technische Anwendungen in knappster Darstellung. Auf dieser praktischen Seite liegt das Gute des Werkchens. Schwächer und vielen Einwänden ausgesetzt sind Stellen, welche die prinzipiellen Grundlagen streifen. Auf S. 7, Bd. heißt es „Kraft bezeichnet die Ursache einer Bewegung *oder* Bewegungsänderung", und gleich nach nachher auf S. 8: „Die Kraft ist Äußerung der Wirkung des Stoffes auf den Stoff." Alles, was hier über Kraft, Schwere, Gewicht gesagt ist, bedarf der Richtigstellung oder schärferen Fassung.

Das Literaturverzeichnis am Ende des II. Bandes hat merkwürdige Lücken. Es fehlt z. B. das große Föpplsche Werk (der Name des Autors bei zwei andern seiner Schriften ist falsch); Schell, Routh, Lorenz, Tallqvist usw. sind gar nicht genannt.

Berlin. E. Lampe.

Niels Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. XIV u. 408 S. gr. 8. Leipzig 1904, B. G. Teubner. *M* 14.—.

Herr W. Ostwald hat sich gelegentlich darüber geäußert, wie ein *Handbuch* beschaffen sein soll. Es soll das vorhandene Wissen so vollständig und genau als möglich zusammenfassen. Demgemäß wird es nur von solchen benutzt werden, die bereits über die grundlegenden Kenntnisse des Gebietes verfügen. Der Leser muß das, was er sucht, ohne Schwierigkeit finden können, und er muß über den Stand der Wissenschaft an der betreffenden

Stelle *erschöpfend* unterrichtet werden. Ein Handbuch wird daher auch nicht fortlaufend gelesen oder studiert, sondern man schlägt es nach, wie der Bedarf es verlangt. — Wir fahren fort und glauben sagen zu dürfen, daß der Autor sich vorerst in den Besitz der gesamten Literatur zu versetzen genötigt ist. H. Nielsen gibt 15 enggedruckte Seiten (389—404), gefüllt mit den Titeln von Abhandlungen, die sich auf die *Zylinderfunktionen* beziehen. Daß er sie alle gelesen habe, behauptet er selbst nicht. So gibt er an, das Werk des Referenten: „Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen" sei als „Programm; Berlin 1893" erschienen, während es doch 180 Seiten umfaßt und im Verlage von Georg Reimer selbständig als Anhang zu Heines *Handbuch der Kugelfunktionen* veröffentlicht worden ist (S. 394). Referent hat daselbst eine Definition der *Zylinderfunktionen verschiedener Ordnungen* aufgestellt (S. 120); er hat die *Kreiszylinder*-Funktionen als von der *zweiten Ordnung* von den Funktionen des *parabolischen Zylinders* (Weber, Baer, Haentzschel) und des *elliptischen Zylinders* (Mathieu, Heine, Lindemann, Haentzschel, Särchinger, H. Bruns) als von der *dritten Ordnung* unterschieden. Das oben erwähnte umfassende Literaturverzeichnis weist den Verfasser auf diesen Unterschied ausdrücklich hin. Hr. Nielsen aber lehnt diese Bezeichnungen ab, er nennt sein Buch kurzweg ein *Handbuch der Zylinderfunktionen*, während es in Wirklichkeit nur ein *Handbuch der Kreiszylinderfunktionen* ist. Sind wir aber über diese *Einschränkung* des behandelten Themas einig, so stehen wir nicht an, dem hochgelehrten Verfasser unser Kompliment über die von ihm geleistete *zusammenfassende Darstellung* einer so gewaltig angeschwollenen Literatur zu machen. Denn wenn derselbe auch im Vorwort behauptet, daß von den 27 Kapiteln im ganzen 23 das Ergebnis *eigener Untersuchungen* wären, so liegt wohl hier eine Art von Selbsttäuschung vor. Wir möchten das Werk als eine schöne Komposition, die von einer bloßen Kompilation weit entfernt ist, bezeichnen.

Wer in der Theorie der hypergeometrischen Reihe von Gauß zu Hause ist, weiß, daß eine Dreiteilung derselben möglich ist. Den im allgemeinen geltenden Resultaten, wie sie Gauß, E. E. Kummer u. a. entwickelt haben, treten an die Seite die Fälle, in denen die Stelle $x = 1$ eine wesentlich singuläre ist (Gauß, Artikel 45—46, Lohnstein, Heffter, Borchardt, Spitzer, Michaelsen, Winter), wo also das zweite partikuläre Integral eine *logarithmische Unstetigkeit* besitzt, und weiter diejenigen Fälle, wo *beide partikuläre Integrale algebraische Funktionen* sind (H. A. Schwarz). Die Differentialgleichung der Funktionen des *Kreiszylinders* läßt sich unter die der hypergeometrischen Reihe subsumieren; nur ist alles viel einfacher dort als hier. Es ist ja nur der eine Parameter ν bei der Besselschen Transzendente vorhanden; daher die Dreiteilung: ν beliebig; ν eine positive ganze Zahl; ν die Hälfte einer ungeraden Zahl. Der letzte Fall, von Poisson zuerst behandelt, ist derjenige, in dem die gegebene Differentialgleichung *in geschlossener Form integrabel* ist. Er läßt sich unabhängig für sich allein erledigen (Hermite). Ist aber ν ganzzahlig, so ist die Stelle $x = 0$ *wesentlich singulär*. Dem *ersten* partikulären Integral $I^{(n)}(x)$ schließt sich die logarithmisch unstetige Neumannsche Zylinderfunktion $Y^{(n)}(x)$ als *zweites* partikuläres an. Für die Stelle $x = \infty$ hat Referent zuerst 1889 außer den zwei schon *bekannten* voneinander verschiedenen *ersten* partikulären

Integralen, — es sind die *semikonvergenten* Entwicklungen oder *asymptotischen Reihen*, — die zwei bis dahin noch fehlenden logarithmisch unstetigen und asymptotischen *zweiten* partikulären Integrale hinzugefügt. Das Handbuch weiß nichts darüber zu berichten; was es von den ersten partikulären Integralen gibt, zeugt aber von wenig Klarheit; die skizzierte Dreiteilung kennt es nicht; im Gegenteil, alles läuft durcheinander. Der Referent vermißt ein Hervortreten der Fuchs-Thoméschen Theorie der Differentialgleichungen, wodurch ein klarer Zusammenhang zwischen den einzelnen Kapiteln verbürgt worden wäre. Denn in dem Falle „ν beliebig" tritt doch offenbar dem ersten partikulären Integral: $I^{(\nu)}(x)$ das zweite: $I^{(-\nu)}(x)$ als mit ihm ein *Fundamentalsystem im Fuchsschen Sinne* bildend an die Seite. Anders denkt Hr. Nielsen! Nach ihm kann $I^{(-\nu)}(x)$ *keine Zylinderfunktion* darstellen; „*sie muß aus der Theorie der Zylinderfunktionen verbannt werden!*" An seine Stelle tritt bei ihm das nicht-fundamentale Integral: $Y^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\sin(\nu\pi)}(\cos(\nu\pi) I^{(\nu)}(x) - I^{(-\nu)}(x))$. Dadurch kompliziert sich der Aufbau des Handbuches; Entwicklungen werden in den Vordergrund gerückt, die nur ein Anrecht haben, als Folgerungen erwähnt zu werden.

Ich glaube also sagen zu dürfen, daß die Ostwaldschen Kriterien für ein Handbuch auf das vorliegende nicht vollkommen zutreffen. Dennoch wird man es dankbar anerkennen müssen, daß der Autor sich in das weitschichtige Material mit solcher Liebe vertieft hat; für die nächste Zukunft wird das Handbuch die beste Auskunftstelle sein für alle, die auf dem Gebiete der Zylinderfunktionen, in dem von mir oben angegebenen weitesten Sinne des Wortes, tätig zu sein gedenken.

Über den Inhalt der 27 Kapitel hier einzeln zu berichten, darf ich mir wohl versagen. Der *erste Teil* gibt in 11 Kapiteln die Fundamentaleigenschaften der Kreis-Zylinderfunktionen; ihre Darstellung sowohl durch Reihen als durch bestimmte Integrale. Im *zweiten Teil* wird in 7 Kapiteln über bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen gehandelt. Der *dritte Teil* liefert Entwicklungen analytischer Funktionen nach Zylinderfunktionen in 5 Kapiteln, endlich der *vierte Teil* in 4 Kapiteln Darstellungen willkürlicher Funktionen durch Zylinderfunktionen. Ein Anhang vermittelt Hilfsformeln aus der Theorie der Gammafunktion, der hypergeometrischen Funktion, der Kugelfunktionen und der trigonometrischen Reihen. Das oben erwähnte Literaturverzeichnis und ein alphabetisches Register beschließen das inhaltreiche Werk, für dessen Abfassung die mathematische Welt dem Verfasser zu großem Dank verpflichtet ist, was ich nicht unterlassen will hervorzuheben trotz der Ausstellungen, die zu machen ich mich genötigt sah.

Berlin, 18. Januar 1906. E. Haentzschel.

Eugenio Beltrami, Opere matematiche. Pubblicate per cura della Facoltà di scienze della R. Università di Roma. Tomo I, 1902. Tomo II, 1904. Milano, Hoepli.

Die italienischen Mathematiker haben dem allzu früh der Wissenschaft entrissenen Beltrami, dessen Name in den Annalen der Mathematik längst einen Ehrenplatz behauptet, ein wahrhaft würdiges Denkmal errichtet, indem sie die sämtlichen wissenschaftlichen Arbeiten des hervorragenden Forschers

in einer schön ausgestatteten Gesamtausgabe zusammengestellt haben, von der uns die beiden ersten Bände vorliegen. Die mathematische Welt ist den Veranstaltern und Förderern dieses Unternehmens, unter denen die Mutter und die Witwe Beltramis, der inzwischen ebenfalls hingeschiedene Cremona und die Herren Tonelli und Castelnuovo an erster Stelle genannt werden, zu lebhaftem Danke verpflichtet. Die Werke Beltramis in der neuen Ausgabe bilden durch den hohen Wert der hier vereinigten Abhandlungen sowie durch die vorzügliche Ausstattung, an der wesentlich die sehr leistungsfähige mathematische Druckerei zu Palermo beteiligt ist, eine Zierde jeder mathematischen Bücherei.

Es braucht an dieser Stelle nicht auf die Bedeutung Beltramis eingegangen zu werden, die in verschiedenen Zeitschriften eingehend gewürdigt worden ist; im ersten Bande der vorliegenden Ausgabe findet sich ein Nekrolog von Cremona. Um aber die Bedeutung der vorliegenden beiden Bände ungefähr zu kennzeichnen, sei auf die hervorragendsten Stücke ihres Inhalts hingewiesen. Der erste Band enthält u. a. die im Giornale di matematica veröffentlichten Untersuchungen über die Anwendungen der Analysis auf die Geometrie, die Abhandlungen über die Verbiegung der Regelflächen und über die geodätische Abbildung, den Versuch einer Interpretation der nichteuklidischen Geometrie und die Theorie der Räume konstanten Krümmungsmaßes. Aus dem zweiten Bande sei die allgemeine Theorie der Differentialparameter, die bisher schwer zugänglich war, sowie eine ausgedehnte Arbeit über die Kinematik der Flüssigkeiten hervorgehoben.

Liebhaber der Variationsrechnung seien auf eine Notiz über geodätische Linien, S. 366 des ersten Bandes, verwiesen, in der eine durchaus moderne Auffassung der Jacobi-Hamiltonschen Methode in Verbindung mit den Aufgaben der Variationsrechnung angetroffen wird.

Breslau. A. Kneser.

Jules Tannery. Leçons d'algèbre et d'analyse à l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales. 2 tomes. VII und 423, 636 p. Paris 1906, Gauthier-Villars.

Für den mathematischen Unterricht in französischen Lyzeen ist 1904 ein neues Programm ausgearbeitet worden, welches die Zurückdrängung rein abstrakter Entwicklungen, die Beschränkung bei Ableitung sogenannter allgemeiner Formeln fordert, Anwendungen auf numerische Beispiele und deren völlige Durchrechnung betont und frühzeitige Darlegung der Elemente aus der Infinitesimalrechnung in den Vordergrund stellt. Dieses Programm hat in Deutschland lebhaftes Echo geweckt, da auch bei uns seit Jahren Bestrebungen im Gange sind, den Schüler frühzeitig mit dem Funktionsbegriff und den Grundbegriffen der Differential- und Integralrechnung bekannt zu machen und gleichzeitig das Rechnen mit Buchstabengleichungen, das Entwickeln von sogenannten allgemeinen Formeln einzuschränken. Das vorliegende Werk ist geeignet, von dem neuesten Kurs im mathematischen Unterricht der classes spéciales ein ungefähres Bild zu geben, und dürfte daher in Deutschland besonderer Beachtung begegnen. Offenbar hat Herr Jules Tannery schon lange vor der amtlichen Festlegung nach diesen Grundsätzen unterrichtet, wie ja auch in Deutschland lange Zeit, bevor der noch

andauernde Kampf um den neuesten Kurs entbrannt ist, an einer ganzen Reihe von Mittelschulen (ich erwähne in erster Linie die Oberrealschulen, z. B. die Friedrichs-Werdersche und die Luisenstädtische Oberrealschule in Berlin) bereits Differential- und Integralrechnung gelehrt worden sind.

Was an dem Werk auf den ersten Blick in die Augen fällt, ist die ungewöhnliche Breite der Darstellung, die in der Methode des Verfassers, alles sagen zu wollen, begründet ist. Herr Tannery legt Wert darauf, den Leser auf Schwierigkeiten und Lücken in der Ableitung eines Theorems aufmerksam zu machen und ihn anzuleiten, wie die Bedenken zu beseitigen, wie die Lücken auszufüllen sind, oder aber, falls dies über die Grenzen des Vortrages hinausgehen würde, dem Leser die Lückenhaftigkeit des Beweises zum Bewußtsein zu bringen. Im mündlichen Vortrag dürfte es nicht sowohl aus Mangel an Zeit, denn aus methodischen Gründen untunlich sein, bei der Einführung des Schülers in ein Gebiet alle diese Dinge zur Sprache zu bringen. Der Verfasser hat wohl auch mehr den Lehrer im Auge, der zur eignen Orientierung und zur Vorbereitung seines Vortrags das Buch zur Hand nimmt. So dürfte derjenige, welcher es etwa unternehmen wollte, die Theorie des Irrationalen vor der Klasse so vorzutragen, wie sie auf den ersten 58 Seiten des Werkes dargelegt ist, beim Schüler eher das Gegenteil von Freude und Lust an arithmetischen Untersuchungen erwecken.

Im zweiten Kapitel wird bereits die Ableitung eines ganzzahligen rationalen Ausdrucks von einer und mehreren Variablen definiert und für den Fall einer Variablen geometrisch gedeutet. Die nächsten Kapitel behandeln die Division von Polynomen, die gebrochenen rationalen Ausdrücke (wobei die homographische Relation $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ eingehend besprochen wird), den größten gemeinsamen Teiler, das Imaginäre, das Fundamentaltheorem der Algebra, den binomischen Satz, Gleichungen ersten Grades nebst einer kurzen Einführung in die Determinanten, und endlich die Eliminationsmethoden von Euler, Sylvester und Bézout.

Der zweite Band beginnt mit dem Grenzwert und der unendlichen Reihe. Als Anwendungen dient die Aufgabe, die Summe einer Reihe, deren Glieder mit beliebiger Annäherung berechnet werden können, mit gegebener Annäherung zu bestimmen. Sodann wird die Stetigkeit einer Funktion einer reellen Variablen erörtert und die Ableitung einer solchen, durch eine konvergente Reihe definierten Funktion eingeführt. Es folgen die Entwicklungen von Maclaurin und Taylor mit den üblichen Anwendungen sowie das durch den Flächeninhalt definierte, bestimmte und das unbestimmte Integral nebst Anwendung auf die linearen Differentialgleichungen, während das algebraische Pensum mit der Untersuchung der symmetrischen Elementarfunktionen einer algebraischen Gleichung beschlossen wird.

Diese Inhaltsaufzählung läßt schon erkennen, daß die Vorlesungen des Herrn Tannery für den Primaunterricht an deutschen Mittelschulen nicht unmittelbar verwertet werden können, sie dürften vielmehr noch unseren Studenten in den ersten Semestern wertvolle Belehrung bieten. In diesem Sinne ist der Gewinn, der dem deutschen Oberlehrer aus Borels Algebra für seinen Unterricht zufließen dürfte, sicher größer und unmittelbarer. Immerhin bietet das Werk auch für den Primaunterricht eine Fülle von Winken und eine Fülle von Anregungen und — was noch garnicht erwähnt

worden ist, was aber als ein besonderer Vorzug der Vorlesungen hervorgehoben zu werden verdient — eine beträchtliche Zahl von Übungen und Beispielen, die ein über die Mittelschulbedürfnisse hinausgehendes Interesse beanspruchen.

Berlin. E. Jahnke.

H. Zimmermann. Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. 44 S. Berlin 1906, W. Ernst u. S. ℳ 2.—.

Für die Beanspruchung eines geraden biegsamen Stabes, der in seiner ganzen Länge ununterbrochen elastisch in der Querrichtung gestützt und mit beliebig gerichteten Kräften belastet ist, hat der Verfasser in den Berliner Akademieberichten eine Lösung mitgeteilt, die auch den Knickfall als Grenze einschließt. Dieser Grenzfall wird im vorliegenden Heft besonders untersucht. Die allgemeinen Grundgleichungen werden für achtzig verschiedene Beispiele numerisch durchgerechnet.

Dabei erhebt sich die — den Mathematiker interessierende — Frage nach dem Wertepaar q, w, das dem Gleichungssystem

$$k \operatorname{Sin} qw - q \sin w = 0, \quad k \operatorname{Cos} qw - \cos w = 0$$

zu genügen hat, wo die zweite Gleichung aus der ersten durch Differentiation nach w entsteht und $k = \frac{1 - 3q^2}{3 - q^2}$ gesetzt ist. Der Verfasser bemerkt dazu: „Die mir zugänglichen Fachschriften enthalten nichts Brauchbares hierüber; es mußte daher erst ein geeignetes Verfahren entwickelt werden", und fügt hinzu, daß er auf eine Beschreibung des Verfahrens aus Raummangel verzichten müsse. Es ist nicht recht ersichtlich, weshalb das wohlbekannte Verfahren nicht anwendbar sein solle, das in der Taylorschen Entwicklung einer Funktion von zwei Variablen seinen Ursprung hat.

Berlin. E. Jahnke.

Oeuvres de Charles Hermite publiées sous les auspices de l'Académie des sciences par Émile Picard. Tome I. Paris 1905, Gauthier-Villars.

Das Archiv hat ganz besondere Ursache auf das Unternehmen hinzuweisen, von dem jetzt der erste Band erschienen ist. Hat doch Hermite (1822 — 1901) der Neugestaltung des Archivs, die wenige Monate vor seinem Tode zustande kam, sein Interesse bekundet durch Übersendung einer Notiz über die Auflösung der Gleichung $\operatorname{sn} z = z \cdot D_z \operatorname{sn} z$, und ist diese Notiz, welche das Archiv der mathematischen Welt vorlegen konnte, doch seine letzte Arbeit gewesen. Gleichzeitig erhielt der eine der Herausgeber, welcher das Glück hatte, seit mehreren Jahren mit dem großen Franzosen in regem Briefwechsel zu stehen, ein Schreiben, worin Hermite seinem Unmut Luft macht über neuerliche Bestrebungen, bereits in den mathematischen Elementarunterricht die äußerste Strenge einzuführen. Auch dieses Schreiben ist in dem ersten Bande der neuen Reihe abgedruckt. Vorausgeschickt ist dem vorliegenden Bande eine wissenschaftliche Würdigung Hermites in Gestalt einer Vorlesung, die der Herausgeber als Nachfolger seines Schwiegervaters an der Sorbonne wenige Wochen nach dessen Tode

gehalten hat. Hatte doch Hermite nicht gewünscht, daß an seinem Grabe Reden gehalten würden!

Der Band beginnt mit zwei Aufsätzen des Schülers Hermite am Collège Louis-le-Grand, von denen besonders der zweite über die algebraische Auflösbarkeit der Gleichung fünften Grades auch heute noch weitere Verbreitung verdient. Hieran schließen sich die Abhandlungen über die Transformation der elliptischen und abelschen Transzendenten, die etwa bis zum Tode Jacobis reichen, mit welchem ja der französische Meister in einem bedeutsamen Briefwechsel gestanden hat. Es folgen dann die arithmetischen Untersuchungen, zu denen ihn die Disquisitiones und die bezüglichen Jacobischen Arbeiten veranlaßten: die Einführung stetiger Veränderlichen in die Theorie der quadratischen Formen ist der Grundgedanke, welcher die lange Reihe der arithmetischen Abhandlungen beherrscht.

Endlich finden noch die wichtigen Arbeiten aus der algebraischen Theorie der binären Formen Platz, wo Hermite u. a. das berühmte Reziprozitätsgesetz mitteilt: Jeder Kovariante einer Form m^{ten} Grades, die inbezug auf die Koeffizienten dieser Form vom p^{ten} Grade ist, entspricht eine Kovariante, die inbezug auf die Koeffizienten einer Form p^{ten} Grades vom m^{ten} Grade ist. Hermites Entdeckungen im Gebiet der Invariantentheorie sind mit denen Cayleys und Sylvesters so eng verwachsen, daß Sylvester das Wort prägte: „Wir, Cayley, Hermite und ich, bildeten damals eine invariante Dreieinigkeit."

Interessant ist noch, für den Historiker, die bekannte Tatsache, daß sich die Weierstraßsche Form des elliptischen Integrals $\int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$ bereits bei Hermite findet in der Abhandlung: Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées, Crellesches Journal, Bd. 52, S. 8.

Beigegeben ist dem Bande ein wundervolles Jugendbildnis des großen Franzosen!

Berlin. E. Jahnke.

Holzmüller, G. Die neueren Wandlungen der elektrischen Theorien einschließlich der Elektronentheorie. Zwei Vorträge. 119 S. Berlin 1906, J. Springer.

Der Verfasser hat den Inhalt zweier in mehreren Bezirksvereinen des Vereins Deutscher Ingenieure gehaltener Vorträge in Form einer Broschüre kurz zusammengefaßt. Indem er auf die Sprache der höheren Analysis, wo es nur anging, verzichtet, bietet er eine leicht faßliche Einführung in die neueren Anschauungen über elektrische Vorgänge. Vorausgeschickt ist eine Darlegung des Newtonschen Potentials und seiner Bedeutung für die Mechanik, Elektrostatik und Magnetismus, sowie des logarithmischen Potentials in seiner Bedeutung für die Bewegung der Elektrizität in dünnen, leitenden Platten, für stationäre Wärmeströmung und für das elektromagnetische Feld eines geradlinigen elektrischen Stromes. Hieran schließt sich ein Überblick über die elektromagnetischen Fernwirkungsgesetze von Biot, Savart und Laplace, von Ampère, Weber, Riemann, Helmholtz, Clausius und Graßmann. Es folgen die Theorien der Äthervermittlung, welche sich an die Namen Faraday, Helmholtz, Maxwell und Hertz knüpfen. Mit

besonderem Geschick weiß der Verfasser die Maxwellschen Vorstellungsbilder über elektromagnetische und elektrodynamische Stromwirkungen klar zu legen. Den Schluß bildet ein ausführliches Kapitel über die Elektronentheorie, wo sich der Leser bis zu den neuesten Forschungen von Rutherford, Kaufmann und Lorentz orientieren kann.

Berlin. E. Jahnke.

Hütte. Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausgegeben vom akademischen Verein „Hütte". 19. Auflage, 2 Abteilungen. 1334, 926 S. Berlin 1905, W. Ernst und Sohn. ℳ 16.—.

Annuaire pour l'an 1906 publié par le Bureau des longitudes. Paris 1906. Gauthier-Villars. Fr. 1,50.

Das standardwork des Technikers läßt sich in gewissem Sinne als Seitenstück zum „Annuaire" bezeichnen, das alljährlich von dem Bureau des longitudes, einer Schöpfung des großen Napoleon, herausgegeben wird. Dieses, ein Oktavbändchen von ungefähr 900 Seiten, erfreut sich in Frankreich außerordentlicher Verbreitung. Es ist nicht bloß auf dem Tisch des Technikers, Physikers und Mathematikers zu finden; auch der Laie nimmt es gern zur Hand, weniger allerdings um in dem Verzeichnis der physikalischen und chemischen Konstanten nachzuschlagen; was ihn anzieht, das sind die angehängten Abhandlungen, welche, von hervorragenden Gelehrten verfaßt, im edelsten Sinne des Wortes populäre Darstellungen wissenschaftlicher Ergebnisse bieten. So enthält das diesmalige Annuaire die Abhandlung: Les éclipses de Soleil. Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant ces éclipses aus der Feder von Herrn G. Bigourdan.

Erfreut sich die „Hütte" einer gleichen Verbreitung? Nun, das ist schon aus einem rein äußerlichen Grunde nicht zu erwarten. Kostet doch das Annuaire 1 fr. 50, das zweibändige Werk der Hütte 16 ℳ. Diesem Preisunterschied entsprechend ist allerdings der Stoffumfang der Hütte ein unvergleichlich größerer. Umfaßt doch die Hütte alle Gebiete der Technik: Wärme, Festigkeitslehre, Stoffkunde, Maschinenteile, Kraftmaschinen, Arbeitsmaschinen, Vermessungskunde, Hochbau, Lüftung und Heizung, Wasserversorgung, Städteentwässerung, Straßenbau, Statik der Baukonstruktionen, Brückenbau, Schiffsbau und Schiffsmaschinenbau, Eisenbahnwesen, Eisenhüttenkunde, Elektrotechnik, Gasfabrikation usw., wobei hervorgehoben zu werden verdient, daß die einzelnen Abschnitte zum Teil aus der Feder allererster Autoritäten herrühren. Für alle diese Gebiete werden die Resultate der neuesten experimentellen und theoretischen Forschung mitgeteilt. In letzterer Beziehung geht die Redaktion der Hütte vielleicht manchmal zuweit, insofern als auch Ergebnisse der Theorie mitgeteilt werden ohne den Zusatz, daß sie als noch nicht genügend gesichert angesehen werden können.

Doch nicht etwa bloß als Nachschlagewerk leistet die Hütte ausgezeichnete Dienste. Den Formeln ist ein zwar knapper, doch den Wissenden hinreichend orientierender Text beigefügt, sodaß die Hütte von den Studierenden vielfach als Repetitorium benutzt wird.

Was den Mathematiker besonders interessiert, sind die beiden vorangestellten Abschnitte über Mathematik und Mechanik. Sie sind mit besonderem Geschick abgefaßt und können, vom Standpunkte des Technikers,

als recht vollständig bezeichnet werden — bis auf eine Lücke. Als eine Lücke muß es bezeichnet werden, wenn der Name Vektor nicht einmal erwähnt wird. In ein modernes Handbuch der Technik gehört dieser fundamentale Begriff nebst einer kurzen Anleitung zu seiner Verwendung.

Berlin. E. Jahnke.

H. Müller und **F. Pietzker, Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten.** Vorstufe zu den Aufgabensammlungen von Bardey und Müller-Kutnewsky. Ausgabe C. Heft 1: Für Sexta, Heft 2: Für Quinta, Heft 3: Für Quarta. Je VI S. und insgesamt 252 S. 8°. Heft 3 mit einer Doppeltafel: Reproduktion eines Staatspapiers. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Geh. ℳ 0,80; ℳ 0,80; 1.—.

H. Müller und **A. Bieler, Rechenbuch für Knaben-Mittelschulen.** Im Anschluß an das mathematische Unterrichtswerk von Prof. H. Müller. Teil I: Für die 4 unteren Klassen. 4 Hefte. IV u. 52, IV u. 56, IV u. 52, IV u. 52 S. 8°. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. Geh. je ℳ 0,50.

— **Arithmetisches Lehr- und Übungsbuch für Knaben-Mittelschulen.** Teil 1: Bis zu den Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten einschließlich. Teil 2: Reihenlehre, Zinseszins-Rechnung und Anfangsgründe der Trigonometrie. VI u. IV u. 194 u. 6 S. Tabellen. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner. I. geb. ℳ 1,60, II. geh. ℳ 0,40.

H. Müller und **M. Zwerger, Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen.** In Verbindung mit dem Verfasser für bayerische Lehranstalten herausgegeben. Erster Teil: Lehraufgabe der 5. und 6. Gymnasial-, bez. der 3. und 4. Realschulklasse. Zweiter Teil: Lehraufgabe der 7. und 8. Gymnasial-, bez. der 5. und 6. Realschulklasse. VI u. 138 S. u. VI u. 162 S. 8°. Leipzig 1906, B. G. Teubner. Geb. ℳ 1,20 u. 2,00.

H. Müller, M. Kutnewsky und **M. Zwerger, Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie.** Im Anschluß an die Teile A I und A II der Müller und Kutnewskyschen Aufgabensammlung und in Verbindung mit den Verfassern für bayerische Lehranstalten herausgegeben. VIII u. 276 S. 8°. Leipzig und Berlin 1906, B. G. Teubner Geb. ℳ 2,60.

Das H. Müllersche Unterrichtswerk, über das wiederholt zu berichten war, ist durch verschiedene Neuausgaben erweitert worden.

Das Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten von H. Müller und F. Pietzker ist in einer Ausgabe C erschienen, in der das sachliche und methodische Beiwerk beschränkt und dafür einiges andere etwas erweitert wurde; dazu gehören die Dreisatzaufgaben, dann von den abgekürzten Rechnungsarten die Multiplikation und endlich die als Denkübungen bezeichneten Aufgaben. Das sehr zu empfehlende Rechenbuch hat an Brauchbarkeit noch gewonnen, wenn auch das für die abgekürzten Rechnungsarten Gebotene zu dürftig erscheint. Die Teilung in 3 Hefte ist dankenswert. Verfehlt ist es, „Hundertel“ statt „Hundertstel“ einführen zu wollen.

Für Knaben-Mittelschulen wird von A. Bieler in Anlehnung an F. Segger und H. Müller ein Rechenbuch geboten in 4 Teilen für die 4 ersten Schuljahre und ein arithmetisches Lehr- und Übungsbuch in 2 Teilen für die obersten Mittelschulklassen. S. 177—193 der Arithmetik bringen als Anhang die Anfangsgründe der Trigonometrie. Mögen die Bücher Segen stiften! Sie sind ihrem Zweck entsprechend gestaltet und bevorzugen als Aufgabengebiete das in der Interessensphäre der betreffenden Altersstufe Liegende. Freilich dürfte, indem die neunstufige Muster-Mittelschule ins Auge gefaßt ist, für die meisten Verhältnisse zu viel geboten sein.

Für bayerische Gymnasien und Realschulen hat Zwerger an H. Müllers Mathematik die durch den verminderten Umfang des Pensums ermöglichten Kürzungen und einige Umstellungen vorgenommen. Wesentliche Änderungen sind vermieden. Bei der für die bayerischen Gymnasien ja erst in neuester Zeit angesetzten Einführung in die analytische Geometrie der Ebene erscheint manches, da es keine rechte Durcharbeitung erfahren kann, überflüssig. Soweit es die geringen Stundenzahlen für Rechnen und Mathematik in Bayern zulassen (in der 4. Klasse des humanistischen Gymnasiums = U III sind es 2 Wochenstunden!), wird Zwerger-Müller mit Nutzen für die Einführung in den Lehrstoff verwendet werden können.

Geeignetes Übungsmaterial für bayerische Lehranstalten bringt dann Zwergers Bearbeitung der Müller-Kutnewskyschen Aufgabensammlung, die auch warm empfohlen werden kann. Wenn die einfacheren Gleichungen ersten Grades an einen früheren Platz gestellt sind, Nr. 11 statt Nr. 19, so könnte darin noch weiter gegangen werden an Stelle der bisher bei den früheren Nummern zugefügten Hinweise. In Nr. 67 hätte Zwerger auch Aufgaben über das Körperzeichnen bieten oder zum mindesten auf S. 105 des zweiten Teiles vom Lehrbuch Bezug nehmen sollen.

Der Druck ist in allen Teilen des H. Müllerschen Unterrichtswerkes ein ausgezeichneter.

Gera. E. Kullrich.

F. Schütte. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie für Gymnasien. 42 S. 8°. Leipzig und Berlin 1905, B. G. Teubner. Geh. ℳ 0,80.

In klarer Darstellung werden die Elemente der Orthogonalprojektion behandelt, dann einiges von der schiefen Parallel- und von der Zentralperspektive. Wenn Verfasser das in § 2 der Einleitung gebotene Allgemeine über das Projizieren etwas weiter ausgestaltet hätte, so würde die Behandlung des Stoffes leicht dem noch mehr Rechnung haben tragen können, daß die darstellende Geometrie zugleich eine schöne Anwendung an sich trockener stereometrischer Lehrsätze bildet. Die Bezugnahme auf den Strahlensatz im Raume hätte mehrfach gute Dienste leisten können; so würde sich auf S. 12, wo bewiesen werden soll, daß bei der Parallelprojektion die Bildstrecken im Verhältnis der Strecken stehen, die Benutzung einer Winkelfunktion erübrigt haben.

Die getroffene Stoffauswahl kann im ganzen als für Gymnasien geeignet anerkannt werden. Die Figuren sind nicht durchweg vorbildlich.

Gera. E. Kullrich.

F. Rogel, Das Rechnen mit Vorteil. Eine gemeinfaßliche, durch zahlreiche Beispiele erläuterte Darstellung empfehlenswerter Vorteile und abkürzender Verfahren. IV u. 38 S. 8⁰. Leipzig 1905, B. G. Teubner. Geh. ℳ 0,80.

In knapper und klarer Darstellung werden Angaben darüber gemacht, wie man Zahlenrechnungen vorteilhaft gestalten kann. Auf die Frage der Fehlergrenze bei abgekürzten Rechnungen und solchen mit ungenauen Zahlen wird, wenn auch nicht erschöpfend, eingegangen. Die Schreibart S. 23 Beispiel 114 $405:286 = 2$ usw. bis $27:5 = 6$ wäre zu vermeiden gewesen.

Gera. E. Kullrich.

H. Starke. Experimentelle Elektrizitätslehre. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Anschauungen und Ergebnisse. Mit 275 in den Text gedruckten Abbildungen. XIV u. 422 S. Leipzig und Berlin 1904, B. G. Teubner. ℳ 6.—.

Ein vorzügliches modernes Lehrbuch der Elektrizität. Als Ausgangspunkt der Darstellung dient allenthalben das Experiment; doch wird zur Vertiefung des Verständnisses in weitgehendem Maße auch auf die mathematische Theorie der Erscheinungen eingegangen. In dieser glücklichen Verbindung der experimentellen und der theoretischen Methode liegt ein besonderes Kennzeichen des vorliegenden Werkes. Zur Deutung der elektrischen Erscheinungen werden ausnahmslos die neueren Anschauungen herangezogen, die an die Namen Faraday, Maxwell, Hertz, Arrhenius, H. A. Lorentz, J. J. Thomson usw. geknüpft sind.

Berlin. E. Aschkinass.

J. Ritter von Geitler. Elektromagnetische Schwingungen und Wellen. (Sechstes Heft der Sammlung „Die Wissenschaft".) Mit 84 eingedruckten Abbildungen. VIII u. 154 S. Braunschweig 1905, F. Vieweg und Sohn.

Das Buch ist ungemein lebendig und klar geschrieben und liefert ein wohlabgerundetes Bild unserer Kenntnisse von den elektromagnetischen Schwingungen sowie ihrer wellenförmigen Ausbreitung im Raume. Es bildet das sechste Heft der unter dem Gesamttitel „die Wissenschaft" im Viewegschen Verlage erscheinenden Sammlung von Monographien. Den für diese Werke vorgeschriebenen Grundsätzen entsprechend behandelt der Verfasser sein Thema in durchaus gemeinverständlicher Weise — mathematische Formeln fehlen fast vollständig —, ohne daß die Exaktheit der Darstellung dadurch beeinträchtigt würde. Der Hauptinhalt gliedert sich in vier Abschnitte, von denen die ersten drei die Namen von „Michael Faraday", „James Clerk Maxwell" und „Heinrich Hertz" als charakteristische Überschriften tragen; im vierten Abschnitt werden die neueren Forschungsergebnisse besprochen, die nach dem Auftreten von Hertz zu Tage gefördert wurden.

Inkorrekt sind auf S. 118 die Zahlenangaben (Wellenlängen) über die Grenzen des sichtbaren Spektralgebietes.

Berlin. E. Aschkinass.

J. Wallentin. Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. (A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen Band XIV.) Mit 81 in den Text gedruckten Figuren. X u. 444 S. Leipzig 1904, B. G. Teubner. ℳ 12.—.

Das Buch ist im Anschlusse von Vorlesungen ausgearbeitet worden, die der Verfasser vor längerer Zeit an der Technischen Hochschule in Brünn gehalten hat. Es behandelt in fünf Kapiteln die *Elektrostatik*, den *Magnetismus*, die *Theorie der elektrischen Ströme*, den *Elektromagnetismus* und die *Theorie der galvanischen und Magnetoinduktion.*

Die ganze Anlage des Werkes entspricht leider nicht dem modernen Standpunkte der Wissenschaft. Dies zeigt sich schon äußerlich darin, daß die Lehre von der Elektrostatik ein volles Drittel des gesamten Textes einnimmt, während die Ableitung der Maxwell-Hertzschen Gleichungen erst nahezu am Ende des Buches zu finden ist. Es wird sehr viel „gerechnet"; doch fehlt es vielfach an genügender Exaktheit bei der Einführung und Verwendung der fundamentalen Begriffe.

Berlin. E. Aschkinass.

Chr. Schmehl, Die Elemente der sphärischen Astronomie und der mathematischen Geographie. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. VIII u. 110 S. 8°. Gießen 1905, Emil Roth. ℳ 1,60.

Im Mittelpunkt des Interesses steht die Aufgabenbehandlung. Es wird eine aus der Schulpraxis hervorgegangene reichhaltige Sammlung von Aufgaben geboten. Zu ihrer Auflösung werden die nötigen Anweisungen gegeben. Dabei wird auch sorgfältig auf die Untersuchung der verschiedenen goniometrischen Lösungen bezüglich ihrer Verwendbarkeit im vorliegenden sphärischen Dreieck eingegangen. Gerade diese Betrachtungen, mit denen man schon frühzeitig bei den Aufgaben der ebenen Trigonometrie beginnen muß, sind recht beachtenswert.

Bezüglich der Resultate fehlt in dem empfehlenswerten Buche die Angabe, mit wievielstelligen Logarithmentafeln die Berechnung erfolgt ist. Stichproben ergaben dem Referenten mehrfach sowohl für fünf- als für siebenstellige Tafeln Abweichungen in den Sekunden.

Gera. E. Kullrich.

W. Mevius. Methodik des Unterrichts im Rechnen und in der Raumlehre. (Methodik des Volks- und Mittelschulunterrichts von H. Gehrig.) IV u. 144 S. 8°. Leipzig und Berlin 1905, B. G. Teubner. Geh. ℳ 1,80.

Mevius will zur Vervollkommnung des Volks- und Mittelschulunterrichts im Rechnen und in der Raumlehre beitragen. Er behandelt unter Anführung eines größeren Teiles der einschlägigen Literatur die „Einführung" und die „besondere Methodik" beider Gebiete. Größere Sorgfalt wäre zu verwenden gewesen auf mathematisch korrekte Schreibart. Man findet: $3 + 1 = 4 + 1 = 5$;

$8:4 = 2 \cdot 12 = 24$; $\frac{1}{3} = 0{,}33\frac{1}{3}$ (!) $= 0{,}33$ (während auf derselben Seite ausdrücklich hervorgehoben wird $\frac{1}{3} > 0{,}33$); $0{,}11 = \frac{1}{9}$; $3\frac{1}{5}\, m = \frac{4}{5}\, M$; $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}\, M$; $2 = \frac{1}{4}$. In stilistischer Beziehung ist unrichtig „dividieren mit“, „enthaltensein mit“; nicht üblich ist „die tangens“. Ganz verunglückt ist der Satz: „In der Aufgabe $35{,}8 \times 9$ kann der 1. Faktor durch Multiplikation mit 10 in eine Multiplikation einer ganzen Zahl mit 9 verwandelt werden“.

In methodischer Hinsicht sucht Mevius Anschluß an die höheren Schulen, so bezüglich der Behandlung der Dezimalbrüche und der Geometrie, für die hübsche Hinweise aufgenommen sind, z B. auf das stereometrische Zeichnen. Im einzelnen ist es verwunderlich, daß S. 22 die übliche Teilbarkeitsregel für 11 nicht abgeleitet wird. Das Interpolationsverfahren für die Berechnung von Quadratwurzeln ist recht roh und nicht geeignet, das methodische Berechnungsverfahren zu ersetzen. Die beiden experimentellen Nachweise der Formel für das Kugelvolumen sind unmathematisch.

Gera. E. Kullrich.

E. Schulze und **F. Pahl. Mathematische Aufgaben.** Ausgabe für Gymnasien. Erster Teil. Aufgaben aus der Planimetrie und Arithmetik für die Unterstufe (Quarta bis Untersekunda einschl.) von E. Schulze. VIII u. 196 S. 8°. Leipzig 1905, Dürr. ℳ 2,40.

Die Sammlung soll alle Gebiete der auf unseren höheren Schulen zu behandelnden Elementarmathematik umfassen und zwar im Anschluß an Borks Mathematische Hauptsätze, herausgegeben von Nath. Der erste Teil der Ausgabe für Gymnasien bietet, den preußischen Lehrplänen von 1901 folgend, Aufgaben für die Quarta bis Untersekunda humanistischer Gymnasien alten Stiles. Wenn 44 Seiten der Planimetrie gewidmet sind und 152 der Arithmetik, so kommt darin die leider vielfach übliche Bevorzugung der arithmetischen Aufgaben zum Ausdruck. Eine Vermehrung empfiehlt sich namentlich bezüglich der praktischen geometrischen Aufgaben, von deren immer energischerer Forderung für den neuzeitlichen mathematischen Unterricht die Verfasser im Vorwort ja selbst berichten. Auch ist die Anwendung bestimmter Maßzahlen bei geometrischen Aufgaben noch weiter durchzuführen. In der Arithmetik sind auch eine Reihe mündlich zu lösender Aufgaben aufgenommen. Sie sollen ebenso der ersten Einübung, wie der Wiederholung, auch in höheren Klassen dienen. Wo man etwa auf mündliche Aufgabenstellung verzichten muß, bieten sie brauchbaren Übungsstoff. Aufgaben, bei denen das Gefühl aufkommen könnte, „die Lösung sei nur mit besonderer Erfindungsgabe möglich,“ werden vermieden.

Möge dem Wunsche des Verfassers gemäß das Buch Lust und Liebe zur mathematischen Arbeit in den Schülern erwecken helfen, indem es dazu beitrage, daß die produktive Tätigkeit beim Aufgabenlösen neben der rezeptiven bei der Lehrsatzbehandlung voll zur Geltung komme.

Gera. E. Kullrich.

Fr. Haacke. Entwurf eines arithmetischen Lehrganges für höhere Schulen. Mit 4 Figuren. 53 S. gr. 8. Leipzig 1904, B. G. Teubner. ℳ 0.80.

Mit manchen Ausführungen in der Einleitung dieses Werkchens kann man sich einverstanden erklären; so z. B. empfiehlt der Verfasser, das

Hauptgewicht im arithmetischen Unterricht nicht auf die Fertigkeit im Umformen komplizierter algebraischer Ausdrücke zu legen; er fordert ferner möglichst frühzeitige Einführung des Funktionsbegriffs und Aufnahme der Elemente der Infinitesimalrechnung in den Lehrplan. Leider aber läßt sein Lehrgang selbst so ziemlich alles zu wünschen übrig. Der Schüler soll, nach der Meinung des Verfassers, nicht den Begriff der reinen Zahl gewinnen, sondern darf sich die Zahlen nur in Verbindung mit zählbaren Dingen vorstellen. Da ist es denn kein Wunder, daß der Verfasser den Begriff des *Negativen* für so schwierig hält, daß der Schüler mit ihm erst bekannt gemacht werden darf, nachdem er sämtliche Operationen mit Einschluß des Radizierens und Logarithmierens kennen gelernt hat. Und auch dann noch scheinen unüberwindliche Schwierigkeiten vorzuliegen, denn die Darstellung des Rechnens mit negativen und vollends mit imaginären Zahlen ist — im Anschluß an Dührings Spekulationen — derartig unklar, daß nur die verwirrtesten Schüler sich dabei beruhigen können. Auch sonst finden sich Unklarheiten und sachliche Fehler in solcher Zahl, daß man die Schüler nur bedauern kann, die nach diesem Lehrgang unterrichtet werden.

Straßburg i. E. PAUL EPSTEIN.

F. Klein. Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichtes an den höheren Schulen. Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik. Göttingen, Ostern 1904. Mit einem Abdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von E. Götting und F. Klein. IV u. 82 S. 8⁰. Leipzig und Berlin 1904, B. G. Teubner. *M.* 1.60.

Es ist in höchstem Maße erfreulich, daß das Interesse der Universitäts- und Hochschullehrer an dem Unterricht unserer höheren Schulen ein immer regeres wird. Eine neue Betätigung dieses Interesses bringen die Ostern 1904 beim Ferienkursus in Göttingen gehaltenen Vorträge von F. Klein, in denen dieser warme Freund und Förderer aller Fortschritte im mathematisch-physikalischen Schulunterricht, über seine früher auf die realen Anstalten beschränkten Wünsche hinausgehend, fordert, daß der mathematische Unterricht aller[1]) höheren Lehranstalten die elementare Differential- und Integralrechnung umfassen soll. Klein erörtert die Möglichkeit und die Notwendigkeit dieser Forderung. Für die Abgrenzung des speziellen Umfanges der zu behandelnden Gebiete rechnet er auf die Mitarbeit der praktischen Schulmänner.

Der Wiederabdruck dreier Aufsätze von Klein und eines von Götting, die nach der historischen Seite recht viel des Interessanten bieten, dient im besonderen zur Unterstützung der Ausführungen bezüglich der Realanstalten.

Gera. E. KULLRICH.

1) Für die Reformgymnasien setzt Klein dabei voraus, daß die Beschränkung auf 3 Stunden Mathematik in der Oberstufe an sich nicht haltbar ist, und daß die Erhöhung auf 4 Wochenstunden erfolgen muß.

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

178. Es sei die folgende partielle Differentialgleichung vierter Ordnung vorgelegt:

$$2D\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial q^2}\frac{\partial^2 D}{\partial p^2} - 2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial p\partial q}\frac{\partial^2 D}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}\frac{\partial^2 D}{\partial q^2}\right)$$
$$= 3\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial q^2}\left(\frac{\partial D}{\partial p}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial p\partial q}\frac{\partial D}{\partial p}\frac{\partial D}{\partial q} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}\left(\frac{\partial D}{\partial q}\right)^2\right],$$

wo ϑ eine unbekannte Funktion der unabhängigen Veränderlichen p, q bedeutet und

$$D = \sqrt{\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial p\partial q}\right)^2 - \frac{\partial^2\vartheta}{\partial p^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial q^2}}$$

ist. Bezüglich dieser Differentialgleichung, zu deren Integration die ersten Anläufe von Herrn Julius Vályi stammen (Inaugural-Dissertation, Kolozsvár 1880), und deren allgemeine Lösung erst unlängst Herrn Wilhelm Kapteyn[1]) gelungen ist, soll der folgende Satz bewiesen werden:

Betrachten wir p, q, ϑ als gewöhnliche Punktkoordinaten im Raume, so gestattet die vorgelegte partielle Differentialgleichung vierter Ordnung jede solche projektive Transformation, die den Punkt $p = 0$, $q = 0$, $\vartheta = \infty$ unverändert läßt.

Budapest. Josef Kürschák.

---

179. Die Abschnitte auf den in den Endpunkten einer Seite eines Dreiecks errichteten Loten, von den Fußpunkten bis zum Schnitt mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten gerechnet, erscheinen vom Mittelpunkt des Inkreises und der Ankreise unter je gleichen oder supplementären Winkeln. Dieser einfache und, wie es scheint, neue Satz gilt auch für sphärische Dreiecke und ist vom Parallelenaxiom unabhängig.

Charlottenburg. O. Pund.

---

1) *Sur l'équation différentielle de Monge*, Archiv der Math. u. Phys. (3) **9**, 313—329 und **10**, S. 39—44.

B. Lösungen.

Zu **132** (Bd. IX, S. 303) (M. Peche). — Wenn man von allen Punkten P einer Kreisevolvente aus auf den Normalen eine Strecke $PN = l$ und auf den Tangenten nach der Seite der Spitze hin den Radius des Grundkreises $PT = a$ abträgt, so umhüllt NT wieder eine Kreisevolvente.

Dritte Lösung. — In natürlichen Koordinaten ϱ, s (Krümmungsradius und Bogen; vgl. Cesàro-Kowalewski, *Vorl. über natürliche Geometrie*, Teubner 1901, bes. § 15 u. 16) ist die Gleichung der Kreisevolvente auf die Spitze bezogen $\varrho^2 = 2as$. In bezug auf das Koordinatensystem der Tangente und Normale in P hat die einhüllende Gerade die Gleichung

$$G \equiv lx - ay + al = 0.$$

G ist (nach s) zu differenzieren, wobei $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\varrho} - 1$, $\frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\varrho}$ zu setzen ist (Cesàro § 12). Dies ergibt sofort

$$G' \equiv ax + ly - \varrho l = 0.$$

Aus G und G' erhält man für die Koordinaten x, y des Berührungspunktes der Enveloppe

$$x = a\lambda(\varrho - l), \quad y = \lambda(\varrho l + a^2) \qquad \lambda = \frac{l}{a^2 + l^2}. \tag{1}$$

Hieraus

$$\frac{dx}{ds} = a\lambda\frac{d\varrho}{ds}, \qquad \frac{dy}{ds} = l\lambda\frac{d\varrho}{ds}.$$

Nun hat man aber (Cesàro § 12)

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\varrho} + 1, \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\varrho},$$

und man erhält ohne viele Mühe $\frac{\delta x}{ds} = \frac{a^2\lambda}{l}$, $\frac{\delta y}{ds} = a\lambda$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{l}{a}$ (selbstverständlich), $\varkappa^2 = \left(\frac{\delta x}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{ds}\right)^2 = \frac{a^2\lambda}{l}$, also, wenn nun s' und ϱ' die Koordinaten der neuen Kurve sind, $ds' = a\sqrt{\frac{\lambda}{l}}\,ds$, daher

$$s' = a\sqrt{\frac{\lambda}{l}}\,s. \tag{2}$$

Ferner ist (Cesàro § 15) $\frac{\varkappa}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + \frac{d\theta}{ds}$, demnach

$$\varrho' = \varkappa\varrho. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) läßt sich mit Hilfe von $\varrho^2 = 2as$ leicht ϱ und s eliminieren, und es ergibt sich schließlich als Gleichung der gesuchten Enveloppe

$$\varrho'^2 = \frac{2a^2 s'}{\sqrt{a^2 + l^2}}.$$

Dies ist in der Tat wiederum die Gleichung einer Kreisevolvente, bei der die Bogen wegen (2) ebenfalls von der Spitze aus gezählt sind. Der Radius des erzeugenden Kreises ist aber

$$a' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + l^2}} = a\cos\theta.$$

Daher ist dieser Radius gleich der Projektion von PT auf NT. Beide Kreise haben auch denselben Mittelpunkt. Denn für die Spitze der neuen Evolvente erhält man aus (1) die Koordinaten, die auf Tangente und Normale der Spitze der ursprünglichen Evolvente bezogen sind:

$$x_0 = -al\lambda = -a + \frac{a^3}{a^2+l^2} = -a + a'\cos\theta,$$

$$y_0 = a^2\lambda = \frac{a^2 l}{a^2+l^2} = a'\sin\theta.$$

Auf den Mittelpunkt des ursprünglichen Kreises bezogen, hat also die Spitze die Polarkoordinaten a' und θ. Der Radiusvektor a' liegt aber dann auf der Geraden $\mathfrak{G}$, d. h. die Spitze der neuen Evolute steht zu dem um den ursprünglichen Mittelpunkt mit a' als Radius beschriebenen Kreise senkrecht. Dieser ist also gewiß ihr erzeugender Kreis, und sie ist gegen die gegebene Kreisevolvente um den Winkel $\theta = \operatorname{arctg}\frac{l}{a}$ gedreht.

Speyer. H. Wieleitner.

Zu **145** (Bd. X, S. 197) (P. Epstein) ist noch von Herrn F. A. Müller (Aschaffenburg) eine Lösung eingegangen, die mit der von Herrn J. Westlund mitgeteilten (Bd. XI, S. 150) übereinstimmt, sowie von Herrn stud. math. Wieferich (Münster i. W.) eine Lösung, die mit der von Herrn Wieleitner gegebenen übereinstimmt. Red.

2. Anfragen und Antworten.

Zu **29** (Bd. XI, S. 156) (O. Meissner). — The general formula for the reversion of series may be derived from Bürmann's Theorem — see, for instance, Schlömilch's *Compendium der höheren Analysis*, Bd. II, p. 21, 4te Aufl. — and from the Multinomial Theorem. Using the notation of the query, we may write:

$$c_\nu = \sum \frac{(2q+3q'+4q''+\cdots \nu q^{(\nu-2)})!}{\nu!\,q!\,q'!\cdots q^{(\nu-2)}!}(-1)^{q+q'+\cdots q^{(\nu-2)}} b_2^{q} b_3^{q'} \cdots b_\nu^{q^{(\nu-2)}}$$

in which

$$\text{(a)} \qquad \nu = 1 + q + 2q' + \cdots (\nu-1)q^{(\nu-2)},$$

and the summation includes all possible sets of values of q, q' etc. that satisfy (a), q, q' etc. being restricted to zero or positive integers, also $c_1 = 1$.

The results are given in detail to nine terms in Cagnoli's *Trigonometry* (p. 46 French translation, 2nd edit.); to eleven terms in the *Penny Cyclopaedia* article on Reversion of Series, and to sixteen by E. B. Seitz in the *Mathematical Visitor* (formerly published at Erie, Pennsylvania) Vol I, (1878) no 3.

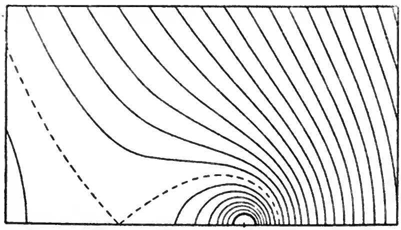
Washington. W. D. Lambert

3. Kleinere Notizen.

Elektromagnetische Richtungsregeln.[1])

In Nr. 17 und 20 d. Ztschr. sind wieder neue Regeln zur Bestimmung der Richtung der durch Bewegung induzierten *EMK* zu lesen. Es wird von diesen „Regeln" bald eine Unzahl geben; jedermann sucht sich trotz Faraday, Maxwell und Fleming seine eigene Regel zu konstruieren — ein deutliches Zeichen dafür, daß schließlich alles das nur ein unnötiger und unnützer Ballast ist, den man am besten wegwerfen sollte!

Man denke sich nur den einfachen Sachverhalt. Ein elektrischer Strom erzeugt um sich ein kreisförmiges magnetisches Feld; liegt er quer in einem schon vorhandenen Felde, so verstärkt er es auf der einen und schwächt es auf der anderen Seite seiner Bahn; mit anderen Worten, er drängt die vorhandenen Kraftlinien auf eine Seite seiner Bahn zusammen (s. Fig.). Die zusammengedrängten Kraftlinien wirken aber auf den Stromleiter zurück, um ihn ins schwächere Feld abzudrängen; dies fühlt man sozusagen beim bloßen Anblick der Figur. Daraus ergibt sich ohne weiteres die Drehrichtung eines Motors: nämlich vom stärkeren Feld ins schwächere.



Deformierung eines homogenen Feldes durch geradlinigen Strom.

Die Richtung der induzierten *EMK* eines Generators ergibt sich aus der einfachen Überlegung, daß sich der Anker dem elektromagnetischen Zuge entgegen, d. h. ins stärkere Feld hinein bewegt; der induzierte Strom verstärkt also das Feld vor sich.

Behält man diesen Sachverhalt vor Augen, so braucht man keine andere Richtungsregel außer der zur Bestimmung der zusammengehörigen Richtungen von Strom und Feld. Hierzu empfiehlt sich statt der Ampèreschen Schwimmregel die weit bequemere Regel der rechtsgängigen Schraube Maxwells oder die „der geschlossenen Rechten". Diese lautet: „Ein Strom in der Richtung des gestreckten rechten Daumens erzeugt um sich ein Feld in der Richtung der gekrümmten Finger". Beispiel: Strom — zum Leser, Feld — nach oben (in der Papierebene): das Stromfeld verläuft dem Uhrzeiger entgegen, das ursprüngliche Feld wird also rechts verstärkt, daher der Leiter nach links abgedrückt. Folgt der Leiter wirklich diesem Druck (Motor!), so wird eine *EMK* vom Leser weg (die „Gegen-*EMK* des Motors") induziert, weil der dieser *EMK* entsprechende Strom das Feld vor sich — hier also links — verstärken müßte.

---

1) Abdruck aus „Elektrotechnik und Maschinenbau", Zeitschrift des Elektrotechnischen Vereins in Wien, Organ der Österr. Vereinigung der Elektrizitätswerke, 1906, H. 30.

Der Leser wird gebeten, das hier empfohlene Verfahren an zwei oder drei selbstgestellten Beispielen einzuüben; er wird dann schon ohne Zweifel die beiden Vorzüge desselben bemerken; erstens ist es bequemer als die Flemingschen Regeln, da man dabei nur einen Finger (den Daumen), nach Fleming dagegen drei zu orientieren hat; zweitens ist es anschaulicher, da es unmittelbar die tatsächlichen Vorgänge vor Augen führt.

Alle übrigen Regeln erscheinen demgegenüber inhaltslos und daher zu künstlich. Aus diesem Grunde ist das hier besprochene Verfahren ganz besonders in didaktischer Hinsicht zu empfehlen, wie der Verfasser aus eigener Erfahrung mitteilen kann.

Brünn. J. K. Sumec.

Über Multiplikationstafeln.

Jedem Berufsrechner ist bekannt, daß die Logarithmen, so nützlich, ja notwendig sie für zahlreiche Fälle sind, in manchen anderen entweder ganz versagen, weil auch die Anwendung von 7 Stellen das Resultat nicht so genau ergibt, wie man wünschen muß, oder daß die Arbeit mit ihnen unter Umständen doch erheblich unbequemer ist als das unmittelbare Zahlenrechnen.

In solchen Fällen sind besondere Multiplikationstafeln, Quadrat- und Reziprokentafeln erwünscht. Da jedenfalls manche von unseren Lesern gern und viel rechnen, wollen wir einmal die uns bekannt gewordenen neueren Tafeln, besonders der ersten Art, die übrigens auch das Dividieren, Wurzelausziehen usw. erleichtern, in zwangloser Reihenfolge betrachten.

Will man ein „Großes Einmaleins“ aufstellen, also eine Anzahl von ausgerechneten Produkten in eine Tafel bringen, so kann man je nach dem Zwecke die Grenzen enger und weiter stecken; man kann ferner für Multiplikator und Multiplikandus dieselbe Grenze oder für diesen eine 10, 100, 1000mal höhere setzen. Den ersten Fall, welcher dem kleinen Einmaleins entspricht, finden wir in dem Werke von A. Henselin verwirklicht. (Rechentafel, enthaltend das große Einmaleins bis 999 $\times$ 999, mit einer Einrichtung, die es ermöglicht, jedes gesuchte Resultat ... blitzschnell zu finden. Berlin S., Otto Elsner 1897.) Es hätte hier fast eine Million von Produkten untergebracht werden müssen, wenn nicht einerseits die Vertauschbarkeit der Faktoren die Zahl auf gut die Hälfte herabminderte, andererseits die Multipla von 10 bei den Faktoren wegbleiben konnten. Immerhin bleibt etwa eine halbe Million meist sechsstelliger Zahlen übrig, deren Unterbringung auf 110 Doppelseiten gleich 220 gewöhnlichen Seiten eine sehr tüchtige typographische Leistung war. Allerdings ist das gebundene Buch fast 40 cm hoch und etwas über 16 cm breit. (Preis 6 Mark.) Das rasche Greifen der richtigen Seite wird durch Registerzettel ermöglicht. Wir haben dieses schön ausgestattete Buch sehr häufig benutzt, weniger beim regelmäßigen Arbeiten als wenn es galt, möglichst rasch das Produkt von zwei dreistelligen Zahlen zu haben. Auf einem gewöhnlichen Schreibtische hat es nicht gut Platz, dagegen kann es bequem in einem Büchergestell quer über der Reihe angebracht werden. Die Ziffern sind alle von gleicher Höhe; diese beträgt, den Durchschuß mitgerechnet, 2,56 mm. Die ausgesperrten Ziffern sind fettgedruckt. Fehler haben wir in diesem und den nachher zu besprechenden Werken bisher weder gesucht noch gefunden.

Die Verleger haben meistens Preise für solche Entdeckungen ausgelobt[1]); um aber den Preis zu verdienen, müßte man schon auf einen glücklichen Zufall rechnen, da niemand eine Tafelsammlung vollständig in solchem Sinne durcharbeiten wird.

Nur 100000 Produkte haben mehrere Bücher. Sehr handlich ist das von H. Zimmermann herausgegebene, unseres Wissens die erste Arbeit dieser Art, welche gegenüber den (uns hier nicht vorliegenden) Tafeln von Crelle einen erheblichen Fortschritt aufwies. (Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Entworfen und berechnet von Dr. H. Zimmermann, Geh. Baurat. Berlin, Wilh. Ernst & Sohn. 1891. 8°.) Auf jeder Doppelseite gehen die Multiplikanden um 10 weiter, die Multiplikatoren immer von 1 bis 100. Am Fuße jeder Seite stehen gewisse Funktionen der Multiplikanden, nämlich a^2; a^3; $0{,}5\,\pi a$; $0{,}25\,\pi a^2$; $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $100:a$; $\log a$. Man findet also alle diese oft gebrauchten Größen dort, wo die Argumente stehen, nicht in besonderen Tafeln. Überhaupt ist die Tafel gut gearbeitet, besonders auch in typographischem Sinne; wir haben damit gern und viel gerechnet. Die Ziffer ist die ungleiche „englische" Logarithmenziffer; ihre Höhe beträgt 3,4 mm einschließlich Durchschuß; Format des gebundenen Buches $25 \times 16{,}5$ qcm. (Preis 5 Mark.)

Es versteht sich, daß solche Tafeln auch die Multiplikation von Zahlen mit mehr als 2 oder 3 Stellen ermöglichen; eine Tafel wie die letztgenannte gestattet ein recht bequemes Interpolieren und Aufbauen längerer Produkte. Mit einer neueren Tafel, die gleichfalls 100000 Produkte gibt, aber den Multiplikandus bis 10000, den Multiplikator nur bis 10 gehen läßt, haben wir noch nicht arbeiten können. Ob diese Begrenzung des Multiplikators praktisch ist, stellen wir dahin. Jedenfalls ist auch diese Tafel ziemlich gut ausgestattet. (Rechentabelle zum Gebrauch bei der Multiplikation und Division. Von Eirík Briem. Kristiania, H. Aschehoug & Co.; für Deutschland und Österreich A. Twietmeyer in Leipzig. Preis geheftet 8 Mark. Format $16{,}5 \times 25$ qcm.) Die Ziffern sind noch größer als bei dem letztgenannten Buche und dabei gleich hoch. Zu wünschen wäre eine Kennzeichnung der Seiten durch sehr kräftige Kopfzahlen wie bei H. Zimmermann; die Seiten müßten dann allerdings höher sein, da man schon jetzt Not haben wird, das Buch ohne arge Verengung des oberen Randes einbinden zu lassen.

Eine Tafel, die sogar bis 10×100000 geht, kennen wir nur aus der Ankündigung des Verlegers. (*A Table of products, by the factors 1 to 9, of all numbers from 1 to 100000 &c., by S. L. Laundy. London, E. C., C. & E. Layton. Price 5 sh.* 4°, Leinenband.) Wieder bis 100×1000 geht ein uns gleichfalls nur im Prospekt, jedoch mit Druckprobe, vorliegendes Werk eines deutschen Katasterbeamten. (Rechentafel zur Ausführung der Multiplikation und Division zweier Zahlen. Von dem kgl.

---

1) Schon Bremiker hat (S. XIV des Vorwortes zur 7stelligen Vegaschen Logarithmentafel) betont, daß dieses Verfahren die Kompilatoren — und dann auch wohl die bloßen Benutzer — „verblenden", d. h. in falsche Sicherheit wiegen kann. Es ist trotzdem ein gutes Mittel. Nur sollten alle auch in weniger verbreiteten Tafeln entdeckten Fehler gleich bekannt gemacht werden, etwa in den Astronomischen Nachrichten, der Zeitschrift für Vermessungswesen und ähnlichen Zentralorganen; nicht bloß in den späteren Auflagen der Bücher selbst.

Steuerinspektor Imgart zu Buxtehude. Vermutlich Selbstverlag. Preis 4,50 Mark oder etwas höher.) Die Anordnung ist nicht so praktisch wie bei H. Zimmermann, obschon die gleichmäßig hohen Ziffern größer (etwa 3,8 mm einschließlich Spatium) und so auch die Seiten höher und breiter ausfallen. Dann gehört diesem Typus noch ein nur scheinbar davon abweichendes Buch an, dessen Verfasser gleichfalls praktischer Rechner ist. (Abgekürzte Multiplikations-Rechentafeln für sämtliche Zahlen von 2 bis 1000. Entworfen und herausgegeben von J. Ernst, kaiserl. Kassenkontrolleur a. D., Kassen- und Rechnungsrevisor des Kreises Kreuznach. Braunschweig 1901, Fr. Vieweg & Sohn. Preis in Leinenband 5 Mark. Höhe 24,7, Breite 18,5 cm, Dicke 3,5—4 cm.) Das Buch gibt für die Multiplikanden bis 1000 die Produkte mit den 99 Multiplikatoren 10, 20, 30, . . ., 990, außerdem mit den neun Einern. So können die Produkte mit dreistelligen Zahlen bequem aufgebaut werden. Die Einrichtung verlangt schon wegen der vielen Nullen einen ausgiebigen Raum, und da in löblicher Weise auch am Durchschuß nicht gespart ist, haben auf jeder Doppelseite nur vier Multiplikanden Platz gefunden, so daß nun das Werk ein halbes Tausend Seiten hat. Die gleichhohen Ziffern sind gut lesbar; es sind die von der Schlömilchschen Logarithmentafel her bekannten. Daß ein Werk von dieser Größe und Ausstattung gebunden für 5 Mark abgegeben werden kann, zeugt von der Leistungsfähigkeit des bekannten Verlages.

Der Namensvetter eines der vorhin genannten Autoren hat in die Tabulierung der Produkte ein neues und fruchtbares Prinzip, das des Aufbauens aus zwei Zahlengruppen, eingeführt. (Rechentafeln, große Ausgabe, bearbeitet von Ludwig Zimmermann, Coblenz, Liebenwerda 1896, Verlag des Technischen Versandgeschäftes von R. Reiß. Gebunden 5 Mark. Breite 20,5, Höhe 26,3 cm. — Rechentafeln, kleine Ausgabe. Zum Gebrauche für Schule und Praxis bearbeitet von demselben. 2. Auflage. Ebendort 1897. Gebunden 2 Mark. Breite 15, Höhe 21,4 cm. 35 Seiten.) Zu erkennen ist das neue Prinzip aus nachstehendem Beispiele A.

0560—9569

A.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569
51	28	79	130	181	232	283	334	385	436	487	560	611	662	713	764	815	866	917	968	1019
52	29	81	133	185	237	289	341	393	445	497	120	172	224	276	328	380	432	484	536	588
53	29	82	135	188	241	294	347	400	453	506	680	733	786	839	892	945	998	1051	1104	1157

Es ist dieses der Anfang von Seite 115 der großen Tafel, die das Ablesen der Produkte aller der vierstelligen Zahlen, die 56 in der Mitte haben, mit den Zahlen von 51 bis 100 gestattet; die danebenstehende Seite 114 gibt natürlich die Produkte der genannten vierstelligen Zahlen mit 1 bis 50. Es ist z. B. $51 \times 2560 = 130560$, und die beiden Gruppen, aus denen diese Zahl besteht, werden abgelesen. Dann hat 51×3560 zwar eine andere, um einen leicht ersichtlichen Betrag vergrößerte erste, aber dieselbe zweite Gruppe; es ist $= 181560$. Ebenso ist $52 \times 2564 = 133328$; $52 \times 3564 = 185328$ usw. Andererseits ist $51 \times 1567 = 79917$; $51 \times 1568 = 79968$, nämlich um 51 größer;

$51 \times 1569 = 80019$, „ „ 51 „ .

Das letzte Beispiel lehrt die Bedeutung der fettgedruckten Ziffern der Tabelle kennen. Die 1, womit die zunächst unter 569 stehende Ziffer anhebt, gehört zur ersten Gruppe und vermehrt deren Betrag um 1, verwandelt also 79 in 80. Dieser Fall ist übrigens relativ selten. Man sieht, daß nun die Produkte aller vierstelligen Zahlen mit allen zweistelligen bequem ablesbar sind. Im Einzelfalle faßt man die beiden in Betracht kommenden Spalten am besten mit zwei Fingern der linken Hand, was bei der mäßigen Breite des Buches durchaus bequem ist. Die Seite sucht man natürlich mit Hilfe der beiden mittleren Zahlen, auch dann, wenn eine der äußeren eine Null ist. Diese Art des Aufschlagens lernt sich rasch. Wenn man die kleine Ausgabe der Tafel benutzt, die nur bis 100 × 1000 geht, so stehen die beiden letzten Ziffern des dreistelligen Multiplikandus am Kopfe der Seite. Die übergreifende Ziffer der zweiten Gruppe kann jetzt größer als 1 ausfallen. Das Täfelchen B ist ein Ausschnitt aus dieser kleineren Rechentafel:

B. 50—59

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
51	25	76	127	178	229	280	331	382	433	484	50	101	152	203	254	305	356	407	458	509
52	26	78	130	182	234	286	338	390	442	494	00	52	104	156	208	260	312	364	416	468
53	26	79	132	185	238	291	344	397	450	503	50	103	156	209	262	315	368	421	474	527

Viertelquadrate der ganzen

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	1	2	4	6	9	12	16	20
1	25	30	36	42	49	56	64	72	81	90
2	100	110	121	132	144	156	169	182	196	210
3	225	240	256	272	289	306	324	342	361	380
4	400	420	441	462	484	506	529	552	576	600
5	625	650	676	702	729	756	784	812	841	870
6	900	930	961	992	1024	1056	1089	1122	1156	1190
7	1225	1260	1296	1332	1369	1406	1444	1482	1521	1560
8	1600	1640	1681	1722	1764	1806	1849	1892	1936	1980
9	2025	2070	2116	2162	2209	2256	2304	2352	2401	2450
10	2500	2550	2601	2652	2704	2756	2809	2862	2916	2970

Wie man bemerkt, fällt das in der Tafel weggelassene Viertel von selbst aus der Rechnung. Ist man dagegen, weil die Summe über 200 hinausgeht, genötigt, zur zweiten Formel zu greifen, so ist Vorsicht geboten. Das Täfelchen wirkt hier allerdings kaum mehr erleichternd. Es ist z. B $157 \times 67 = 10519$, und das Schema der Rechnung ist folgendes:

$$\begin{array}{rr} 157 & 6162\cdot \\ 67 & 1122\cdot \\ \hline 90 & 2025 \\ & \overline{2 \cdot 5259\cdot\cdot = 10519.} \end{array}$$

Es sind also hier die Produkte von 1×1 bis 100×1000, oder doch ihre Bestandteile, auf 10 kleinen Doppelseiten untergebracht.[1]) Man liest ab: $53 \times 657 = 34821$.

Betrachten wir zum Schlusse noch ein indirektes Verfahren, das gleichfalls zur Konstruktion von Tafeln Anlaß geboten hat. Es ist

$$\text{I.}\quad ab = \tfrac{1}{4}(a+b)^2 - \tfrac{1}{4}(a-b)^2.$$

$$\text{II.}\quad ab = 2\left[\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}(a-b)^2\right].$$

Die erste Formel gestattet uns, wenn wir die Viertelquadrate aller Zahlen bis zu einer gewissen Grenze aufgestellt haben, ziemlich schnell alle Produkte zu bilden, für welche die Summe der beiden Faktoren jene Grenze nicht überschreitet. Stellt man z. B., wie es in nachstehendem Täfelchen geschehen ist, die Viertelquadrate der Zahlen bis über 200 zusammen, so kann man sicher und ziemlich schnell alle Produkte bis 100×100 daraus herstellen. Das Quadrat einer geraden Zahl ist durch 4 teilbar, das Quadrat einer ungeraden läßt, durch 4 geteilt, stets den Rest 1; das Viertel ist also mit dem Anhängsel 25 behaftet; man bemerkt aber, daß dieses in der Tabelle einfach weggelassen ist. Die Benutzung gestaltet sich wie folgt: Es ist 157×41 zu berechnen; ferner 98×47. Man erhält 6437 und 4606.

Zahlen von 1 bis 209.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	2500	2550	2601	2652	2704	2756	2809	2862	2916	2970
11	3025	3080	3136	3192	3249	3306	3364	3422	3481	3540
12	3600	3660	3721	3782	3844	3906	3969	4032	4096	4160
13	4225	4290	4356	4422	4489	4556	4624	4692	4761	4830
14	4900	4970	5041	5112	5184	5256	5329	5402	5476	5550
15	5625	5700	5776	5852	5929	6006	6084	6162	6241	6320
16	6400	6480	6561	6642	6724	6806	6889	6972	7056	7140
17	7225	7310	7396	7482	7569	7656	7744	7832	7921	8010
18	8100	8190	8281	8372	8464	8556	8649	8742	8836	8930
19	9025	9120	9216	9312	9409	9506	9604	9702	9801	9900
20	10000	10100	10201	10302	10404	10506	10609	10712	10816	10920

157		98	
41		47	
198	9801	145	$5256\tfrac{1}{4}$
116	-3364	51	$-\ 650\tfrac{1}{4}$
	$= 6437$		$= 4606$

1) Das Büchlein enthält außerdem eine Reziprokentafel, eine Quadrattafel, eine Kubiktafel, zwei Tafeln für den Übergang von *sin* auf *cos* und von *tan* auf *sec*, Maßnotizen usw. Auch die anderen genannten Werke enthalten noch die eine oder andere Tabelle außer dem Hauptbestandteil. — Die Ziffer in beiden L. Zimmermannschen Büchern ist die Logarithmenziffer.

Wir erwähnen dieses zweite Verfahren hier nur der Vollständigkeit wegen. Es ist, und das gilt auch für größere Tafeln solcher Art, darum gefährlich, weil man die Summe und Differenz der beiden Faktoren von links nach rechts aufschreiben kann, wogegen auch ein geübterer Rechner vorziehen wird, eine algebraische Summe, wie die in der II. Formel auftretende, von rechts nach links herzustellen. Dann führt man die Verdoppelung natürlich wieder von links nach rechts aus. Dieser zweimalige Wechsel wird leicht Fehler verursachen. Dagegen ist die Tafel auch zur Multiplikation von gemischten Brüchen brauchbar, wenn, wie das die Praxis manchmal bringen wird, außer den Ganzen nur Halbe auftreten. So wird man die Beispiele $83{,}5 \times 47 = 3924{,}5$ und $83{,}5 \times 47{,}5 = 3966{,}25$ wie folgt rechnen:

$$\begin{array}{rr}
83 & \\
\underline{47} & \\
130 & 4225 \\
36 & \underline{324} \\
 & 3901 \\
0{,}5 \cdot 47 = & \underline{23{,}5} \\
 & 3924{,}5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
83{,}5 & \\
\underline{47{,}5} & \\
131 & 4290^{\cdot} \\
36 & \underline{324} \\
 & 3966{,}25
\end{array}$$

Es versteht sich bei so kleinen Zahlen, daß man weder die Faktoren a und b, noch die Größen $a + b$ und $a - b$ wirklich niederschreiben wird. Die Faktoren hat man ja doch vor sich; man bildet im Kopfe die Summe, schreibt deren Viertelquadrat nach dem Täfelchen auf usw.

Nach dem geschilderten Prinzip sind nun sehr große Tafeln aufgebaut. Ein deutsches Werk[1]) dieser Art, das in den siebziger oder achtziger Jahren erschienen sein soll, ist uns leider nie zu Gesichte gekommen. Dagegen besitzen wir die Arbeit eines schon vorhin genannten englischen Versicherungs-Mathematikers. (*Table of Quarter-Squares of all integer numbers up to 100 000, by which the product of two factors &c. By Samuel Linn Laundy. London, Ch. & E. Layton 1856. 8⁰. 21 sh.* in Leinenband.) Da das Prinzip bereits erläutert worden ist, geben wir nur die zwei Beispiele $27646 \times 22619 = 625324874$ und $62735 \times 46533 = 2919247755$; das erste ist nach der I., das zweite nach der II. Formel gerechnet. Die Beispiele sind der Einleitung des Werkes entnommen.

$$\begin{array}{rr}
27646 & \\
\underline{22619} & \\
50265 & 631642556 \\
5027 & \underline{6317682} \\
 & 625324874
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
62735 & 983920056^{\cdot} \\
\underline{46533} & 541330022^{\cdot} \\
16202 & \underline{65626201} \\
 & 2 \cdot 1459623877^{\cdot\cdot} \\
 & = 2919247755.
\end{array}$$

---

1) J. Blater. Tafel der Viertelquadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 200000, welche die Ausführung von Multiplikationen, Quadrierungen und das Ausziehen der Quadratwurzeln bedeutend erleichtert und durch vorzügliche Korrektheit fehlerlose Resultate verbürgt. Wien: A. Hölder. XVI u. 205 S. 4⁰, 1887. — Von dieser Tafel ist auch eine englische und eine französische Ausgabe erschienen. Vgl. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 19 u. 20. Red.

Das erste Beispiel würde mit der größeren Tafel von L. Zimmermann so zu rechnen sein:

27 ·	2261	=	61047
64 ·	„	=	144704
6 ·	„	=	13566
27646 ·	22610	=	625076060
27640 ·	9	=	248760
6 ·	9	=	54
			625324874.

In der einen wie in der anderen Tafel hat man zwei Seiten aufzuschlagen. Formel II. verlangt bei der Tafel der Viertelquadrate sogar drei Seiten. Auf richtige Ansetzung der Stellen hat man bei beiden Methoden wohl zu achten. Will man die Quadrattafel zum Dividieren benutzen, so gehört eigentlich eine Reziprokentafel dabei, und über die Genauigkeit ist nicht sofort ein Urteil möglich; jedenfalls ist hier der Vorzug auf seiten der bequemen neueren Multiplikationstafeln.

Münster in Westfalen. J. Plassmann.

Bemerkung zu den L-Kurven des Herrn Lesser.

In der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht **35**, 378 (1904) führt Herr Lesser unter dem Namen der L-Kurven die Kurven von folgender Entstehungsart ein: „Ist $P(u, v) = 0$ die Gleichung einer Kurve in schiefen oder kartesischen, oder in Polarkoordinaten, und sind die Variabeln u und v selbst wieder Funktionen einer dritten unabhängigen Veränderlichen $u = f_1(t)$, $v = f_2(t)$, so verstehen wir unter der L-Kurve der Kurve P die Gesamtheit der Endpunkte aller Normalenstrecken, deren Länge durch den Differentialquotienten $n = ds/dt$ bestimmt ist.“ In Band 36 derselben Zeitschrift, wo eine Fortsetzung der bezüglichen Untersuchung gegeben wird, bekennt der Verf. S. 242, daß diese Definition der sogenannten L-Kurven unzulänglich ist: „Da s die Bogenlänge der Kurve P darstellt, während t die ganz beliebig wählbare Unabhängige bedeutet, ist der Differentialquotient ds/dt eine Funktion von t, und daher die L-Kurve von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen, also auch von der die Kurve P darstellenden Gleichung $P(t) = 0$ abhängig.“

Dies hätte unter anderem berücksichtigt werden sollen bei der Behandlung der Hyperbel als Beispiel 12 in der ersten Abhandlung, wo S. 393 gesagt wird: „Eine kleine Überraschung bringt uns die Hyperbel“; es wird nämlich bei der gewählten Variable t ein Resultat erzielt, das gar nicht mit dem für die Ellipse erhaltenen in Parallele zu stellen ist. Ein solches ergibt sich aber sogleich, wenn man die Koordinaten der Hyperbel in der Form darstellt: $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, wo ch den Hyperbelkosinus, sh den Hyperbelsinus bezeichnet. Dann ist nämlich $ds/dt = n = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}$. Bezeichnet man ferner den spitzen Winkel, den die Hyperbelnormale mit der x-Achse bildet, mit β, so hat man $dx/dy = \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{sh} t/b \operatorname{ch} t$, woraus $n \sin \beta = a \operatorname{sh} t$, $n \cos \beta = b \operatorname{ch} t$ folgt. Trägt man nun n auf der Hyperbelnormale vom Punkte P auf der Hyperbel aus nach dem Innern der Hyperbel

hin bis Q ab, so daß $PQ = n$ ist, so sind die Koordinaten ξ, η von Q: $\xi = (a + b) \operatorname{ch} t$, $\eta = (b - a) \operatorname{sh} t$. Daraus erhält man als Gleichung der sogenannten L-Kurve:

$$\frac{\xi^2}{(a+b)^2} - \frac{\eta^2}{(b-a)^2} = 1,$$

also eine konzentrische und koaxiale Hyperbel mit den Halbachsen $a + b$ und $\pm (b - a)$. Trägt man die Strecke n von P aus auf der Normale nach dem Äußeren der Hyperbel ab, so folgt als Gleichung der „L-Kurve":

$$\frac{\xi^2}{(a-b)^2} - \frac{\eta^2}{(a+b)^2} = 1.$$

Wenn man die auf der Hand liegende Parameterdarstellung für die Koordinaten einer Hyperbel anwendet: $x = a/\cos t$, $y = b \cdot \operatorname{tg} t$, so fließt daraus hingegen eine Kurve höherer Ordnung als „L-Kurve". Dieses Beispiel beweist zur Genüge, daß die „L-Kurven" eben gar nicht als besondere Kurvengattung definiert sind.

Eine andere Frage, die auf S. 378 der ersten Abhandlung des Herrn Lesser zwar erwähnt, aber nicht beantwortet ist, möge auch noch erledigt werden, nämlich: wann ist n gleich der Länge der Normale vom Kurvenpunkte P bis zum Schnittpunkte mit der x-Achse?

Es sei $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, also $n = \sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2}$. Die Länge der Normale ist aber auch $n = y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{\varphi(t)}{f'(t)} \sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2}$. Die gesuchte Bedingung ist somit $\varphi(t) = f'(t)$, oder aber die gesuchte Parameterdarstellung ist:

$$x = f(t), \quad y = f'(t).$$

Man setze also dx/dt für y in die kartesische Gleichung der Kurve ein; dadurch erhält man eine Differentialgleichung für x. Durch Integration dieser Gleichung folgt x als Funktion von t, danach $y = dx/dt$. In den folgenden Beispielen ist c die Integrationskonstante.

I. Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2px$:

$$x = \tfrac{1}{2}pt^2 + ct\sqrt{2p} + c^2, \quad y = pt + c\sqrt{2p}.$$

II. Mittelpunktsgleichung der Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$:

$$x = a \sin(c + bt/a), \quad y = b \cos(c + bt/a).$$

III. Mittelpunktsgleichung der Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$:

$$x = a \operatorname{ch}(c + bt/a), \quad y = b \operatorname{sh}(c + bt/a).$$

IV. Zykloide: $x = c + a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Definiert man dagegen eine Parabel durch die Gleichungen $x = 2pt$, $y = 2p\sqrt{t}$, so erhält man als Gleichung der „L-Kurve":

$$2p\xi(\eta + 2p) = (\eta + 2p)^3 + 4p^3.$$

Wählt man ferner die Darstellung $x = 2p \operatorname{cotg}^2 t$, $y = 2p \operatorname{cotg} t$, wo t der Winkel des Radiusvektor vom Scheitel mit der Hauptachse ist, so folgt:

$$4p\eta^2 = \xi^2(\xi - 2p).$$

Diese Resultate folgen ohne erheblichen „Aufwand an Zeit und Raum" durch die „gewöhnliche Behandlungsweise"; man bedarf also nicht zur Ausrüstung des „Hilfsmittels der Vektorenrechnung", um einzusehen, daß die L-Kurven unzulänglich, oder vielmehr gar nicht definiert sind.

Berlin. E. LAMPE.

Über rationale Tetraeder.

Für die Aufgabe, Tetraeder von kongruenten Seiten zu finden, in welchen die Kanten, die Seiten und das Volumen rationale Maßzahlen haben, bestehen, wenn man die Ecken mit 0, 1, 2, 3, sowie die Kanten 01 und 23 mit a, 02 und 31 mit b, 03 und 12 mit c bezeichnet, u. a. die folgenden beiden partikulären Lösungen, in denen q das Quadrat einer rationalen Zahl bedeutet:

$$\begin{aligned} 1)\quad a &= 2\cdot 5(q+1)(q-1)(q^2+3q+1),\\ b &= (2q+3)(4q+1)(q^2+2q+2),\\ c &= (q+4)(3q+2)(2q^2+2q+1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\quad a &= (q+25)(2q+1)(16q^2+9q+25),\\ b &= 2(q-3)(q+4)(65q^2+58q+25),\\ c &= 7(q+1)(9q+1)(2q^2+2q+25).\end{aligned}$$

Berlin. R. GÜNTSCHE.

Über die gleichseitige Hyperbel.

Bei der Parabel wird bekanntlich der Winkel zwischen den Brennstrahlen der Berührungspunkte zweier Tangenten durch den Brennstrahl des Tangentenschnittpunktes halbiert. Deutet man die Punkte der diesen Satz geometrisch darstellenden Figur (Fig. 1) als Repräsentanten des komplexen Arguments $z = x + iy$, so geht durch die konforme Abbildung mittels der Funktion $w = u + iv = \sqrt{z}$ die Figur der z-Ebene in eine entsprechende Figur der w-Ebene über (Fig. 2).

Zwischen den beiden Ebenen bestehen hierbei folgende Beziehungen: Jede Parabelschar, deren Brennpunkt mit dem Nullpunkt der z-Ebene zusammenfällt, wird in der w-Ebene in eine Schar paralleler Geraden übergeführt. Nun gehört aber zu jeder Parabelschar die gemeinsame Achse als unendlich schmale Parabel; daraus folgt, daß allen durch den Nullpunkt der z-Ebene gehenden Geraden in der w-Ebene ebenfalls durch den Nullpunkt gehende Gerade entsprechen; die Neigung gegen die reelle Achse ist in der w-Ebene halb so groß wie in der z-Ebene. Jede Schar paralleler Geraden der z-Ebene geht in der w-Ebene in eine Schar gleichseitiger Hyperbeln über. Die zur Parallelenschar gehörende Nullpunktsgerade wird dabei in das Asymptotenpaar der Hyperbelschar umgewandelt.

Durch Anwendung dieser Regeln ergibt sich Fig. 2 aus Fig. 1 in einfacher Weise: Der Brennpunkt O geht in den Nullpunkt O' über, die Parabelachse BOC in den rechten Winkel $B'O'C'$, das Achsensystem der

w-Ebene. Die Parabel DAE, welche die Achse OC bei A senkrecht schneidet, wird zur Geraden $D'A'E'$, welche $O'C'$ bei A' senkrecht schneidet.

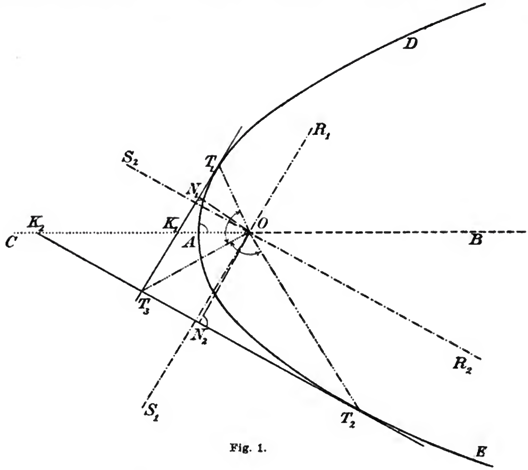


Fig. 1.

Die Tangenten $T_1 T_3$ und $T_2 T_3$, welche bei T_1, T_2 die Parabel DAE berühren, bei K_1, K_2 die Achse OC und bei T_3 einander schneiden, werden

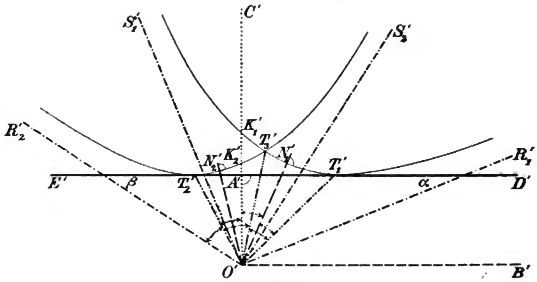


Fig. 2.

umgewandelt in die gleichseitigen Hyperbeln $T_1' T_3'$ und $T_2' T_3'$, welche bei T_1', T_2' die Gerade $D'A'E'$ berühren, bei K_1', K_2' die Achse $O'C'$ und bei

T_3' einander schneiden. Die Geraden $R_1 O S_1$ und $R_2 O S_2$, welche den Tangenten $T_1 T_3$ und $T_2 T_3$ parallel sind, gehen in die Asymptotenpaare $R_1' O' S_1'$ und $R_2' O' S_2'$ der Hyperbeln $T_1' T_3'$ und $T_2' T_3'$ über.

Nach dem oben zitierten Satze ist nun

$$\sphericalangle T_1 O T_3 = \sphericalangle T_2 O T_3;$$

für Fig. 2 folgt somit

$$\sphericalangle T_1' O' T_3' = \sphericalangle T_2' O' T_3'.$$

Daraus läßt sich unmittelbar der Satz ablesen:

Legt man an zwei konzentrische gleichseitige Hyperbeln die gemeinsame Tangente, so wird der Winkel zwischen den Verbindungslinien des Zentrums mit den Berührungspunkten durch die analoge Verbindungslinie mit dem Hyperbelschnittpunkt halbiert.

Fällt man in Fig. 1 von O auf die Tangenten die Senkrechten ON_1 und ON_2, so entsprechen ihnen in Fig. 2 die Geraden $O'N_1'$ und $O'N_2'$, welche die Hyperbeln bei N_1' und N_2' senkrecht schneiden, also die Achsen der Hyperbel darstellen. Nach einem bekannten Satze ist nun in Fig. 1

$$\sphericalangle T_1 O N_1 = \sphericalangle A O N_1; \; \sphericalangle T_2 O N_2 = \sphericalangle A O N_2;$$

mithin in Fig. 2

$$\sphericalangle T_1' O' N_1' = \sphericalangle A' O' N_1'; \; \sphericalangle T_2' O' N_2' = \sphericalangle A' O' N_2'.$$

Es ergeben sich hieraus die Korollare:

I. Fällt man vom Zentrum zweier konzentrischen gleichseitigen Hyperbeln auf die gemeinsame Tangente die Senkrechte, so werden die Winkel zwischen dieser und den Verbindungslinien des Zentrums mit den Berührungspunkten durch die Hyperbelachsen halbiert.

II. Der Winkel zwischen den Verbindungslinien des Zentrums mit den Berührungspunkten ist gleich dem doppelten Winkel zwischen den Hyperbelachsen.

III. Der Winkel zwischen den Hyperbelachsen selbst ist $\varphi = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$, wenn man mit α, β die Winkel bezeichnet, welche die äußeren Asymptoten mit der gemeinsamen Tangente bilden.

Aus der Tatsache, daß in Fig. 1 bei einer Wanderung der Berührungspunkte sich N_1, N_2 auf der Scheiteltangente bewegen, folgt für Fig. 2:

Die Scheitel aller konzentrischen, eine gegebene Gerade berührenden gleichseitigen Hyperbeln liegen auf der zugehörigen Hyperbel kürzester Achse.

Charlottenburg. E. Hupka.

Die Parallelkurve der Klothoide.

Die Klothoide mit der natürlichen Gleichung $\varrho = a^2/s$, wo ϱ der Krümmungsradius, s der Bogen, hat im Anfangspunkte O der Bogen einen Wendepunkt $[s = \pm 0, \; \varrho = \pm \infty]$, ferner zwei asymptotische Punkte M und M' [Tangentialwinkel $\varphi = s^2/2a^2$, daher gleich ∞ für

$s = \pm \infty$; $\varrho = 0]$ mit den Koordinaten $x = y = \pm \frac{a}{2}\sqrt{\pi}$.[1]) Ihre Parallelkurve scheint noch nicht betrachtet worden zu sein. Für sie ist

$$(1) \qquad s' = s + l\varphi, \qquad \varrho' = \varrho + l,$$

wenn l den Abstand bedeutet (Cesàro, *Nat. G.*, § 19. — Loria, S. 645). Hieraus ergibt sich sofort

$$s = \frac{a^2}{\varrho' - l}, \qquad s' = s + \frac{s^2 l}{2a^2}$$

und durch Einsetzen

$$(2) \qquad s' = \frac{a^2(2\varrho' - l)}{2(\varrho' - l)^2}$$

oder umgerechnet

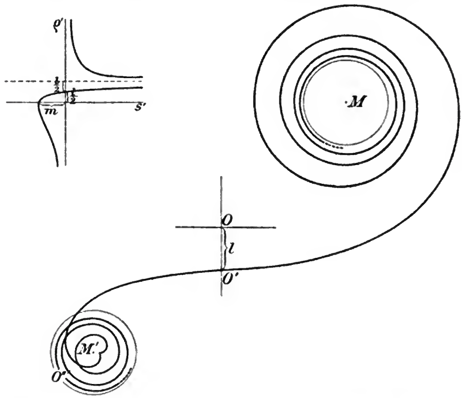
$$(2^*) \qquad \varrho' = \frac{a^2}{2s'} + l \pm \frac{a}{2s'}\sqrt{a^2 + 2ls'}.$$

Ferner

$$(3) \qquad \varphi' = \int \frac{ds'}{\varrho'} = \int \frac{\left(1 + \frac{ls}{a^2}\right)ds}{\frac{a^2}{s} + l} = \int \frac{s\,ds}{a^2} = \frac{s^2}{2a^2} = \varphi,$$

wie für eine Parallelkurve selbstverständlich.

Nach (2) und (2*) ist s' eine eindeutige Funktion von ϱ', hingegen ϱ' eine zweideutige Funktion von s'. Um dieses Abhängigkeitsverhältnis



besser zu übersehen, zeichnet man sich (2) in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (s. die Kurve 3. Ordnung der Nebenfigur).

1) Vgl. Loria, *Spezielle Kurven* (B. G. Teubner 1902), S. 457. — Cesàro, *Natürliche Geometrie* (B. G. Teubner 1901), S. 15. — Cesàro, *Algebraische Analysis* (B. G. Teubner 1904), S. 808.

Nun ist für $s' = \pm 0$ zunächst $\varrho' = \pm \infty$; dies gibt den Wendepunkt im Anfangspunkte O' der Bogen. Wenden wir uns nach rechts, so nimmt ϱ' mit steigendem s' ab bis zu l, denn für $s' = +\infty$ wird $\varrho' = l$. Da aber wegen (3) auch $\varphi' = \infty$, so hat die Kurve um M einen asymptotischen Kreis mit dem Radius l, dem sie sich von außen nähert. Nun gehen wir von O' nach links, d. h. wir nehmen s' negativ, dann geht ϱ' von $-\infty$ bis 0 für $s' = -m = -a^2/2l$. Dies ist wegen (2*) zugleich ein Minimum für s'. Unsere Kurve hat hier eine Spitze, die wir im Texte mit S bezeichnen wollen, mit der Tangentenrichtung $\varphi' = a^2/2l^2$. Je kleiner also l ist im Verhältnis zum Maßstab der Klothoide, desto mehr Windungen um M' wird der von O' nach links gehende Zweig machen bis zur Spitze. Von der Spitze S aus muß s' wieder vorwärts gezählt werden (vgl. immer die Nebenfigur) bis zu einem Punkte O'', für den absolut genommen $O'S = SO''$. In O'' ist $s' = 0$, $\varrho' = \frac{1}{2} l$. Der Punkt ist aber sonst nicht ausgezeichnet auf der Kurve. Im weiteren Verlaufe wächst s' wiederum nach $+\infty$, ebenso φ', während ϱ' wie oben dem Werte l zustrebt. Die Kurve hat also einen zweiten asymptotischen Kreis um M', dem sie sich von innen immer mehr nähert.

Die Veränderung des Zeichens von l bewirkt nur eine Vertauschung der Punkte M und M'.

Speyer, 1. August 1906. H. Wieleitner.

Zur Theorie der konjugierten Tangenten.

Satz: Konstruiert man um einen Flächenpunkt als Mittelpunkt ein unendlich kleines dreiachsiges Ellipsoid, von dem zwei Achsen in der Tangentialebene liegen, so liegen die Punkte der Schnittkurve, deren Entfernung von der Tangentialebene ein Extremwert ist, in zwei konjugierten Normalschnitten.

Beweis: Wir machen die Haupttangenten zur x- und y-Achse, die Flächennormale zur z-Achse. Dann ist für die Umgebung des Nullpunktes die Flächengleichung

$$\frac{x^2}{2\varrho_1} + \frac{y^2}{2\varrho_2} = z, \tag{1}$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien sind, die Gleichung des Ellipsoids

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\,a_{12}xy + a_{44} = 0. \tag{2}$$

a_{44} muß von der 2. Ordnung unendlich klein sein, da x und y von der 1. Ordnung unendlich klein sind. Wenn wir y aus beiden Gleichungen eliminieren, so folgt

$$a_{11}x^2 + a_{22}2\varrho_2\left(z - \frac{x^2}{2\varrho_1}\right) + a_{33}z^2 + 2\,a_{12}x\sqrt{2\,\varrho_2}\sqrt{z - \frac{x^2}{2\varrho_1}} + a_{44} = 0.$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach x ergibt, für $\frac{dz}{dx} = z'$:

$$2\,a_{11}x + 2\,a_{22}\varrho_2\left(z' - \frac{x}{\varrho_1}\right) + 2\,a_{33}zz' + 2x_{12}y + 2\,a_{12}x\sqrt{2\,\varrho_2}\,\frac{z' - \frac{x}{\varrho_1}}{2\sqrt{z - \frac{x^2}{2\varrho_1}}} = 0$$

oder mit Benutzung von (1)

$$z' = \frac{-a_{11}x + a_{22}\frac{\varrho_2}{\varrho_1}x - a_{12}y + a_{12}\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{x^2}{y}}{a_{22}\varrho_2 + a_{33}z + a_{12}\varrho_2\frac{x}{y}}.$$

Für einen Extremwert von z ist erforderlich, daß $z' = 0$, also

$$xy(a_{11}\varrho_1 - a_{22}\varrho_2) - a_{12}(x^2\varrho_2 - y^2\varrho_1) = 0. \tag{3}$$

Setzen wir endlich $y = x \operatorname{tg} w$, so nimmt unsere Bedingungsgleichung die folgende Gestalt an:

$$\operatorname{tg}^2 w + \frac{a_{11}\varrho_1 - a_{22}\varrho_2}{\varrho_{12}\varrho_1}\operatorname{tg} w - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = 0. \tag{4}$$

Für die beiden Winkel w und w', die sich aus dieser Gleichung ergeben, ist also $\operatorname{tg} w \cdot \operatorname{tg} w' = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$, oder

$$\frac{\cos w \cdot \cos w'}{\varrho_1} + \frac{\sin w \cdot \sin w'}{\varrho_2} = 0, \tag{5}$$

d. h. die Richtungen w und w' sind konjugiert, w. z. b. w.

Für eine Minimalfläche ist die Gleichung (4) unabhängig von $\varrho_1 = -\varrho_2$.

Geht das Ellipsoid in eine unendlich kleine Kugel über ($a_{11} = a_{22} = a_{33}$, $a_{12} = 0$), so geht Gleichung (3) über in $xy(\varrho_1 - \varrho_2) = 0$, d. h. es ist $x = 0$ oder $y = 0$, die konjugierten Normalschnitte fallen also mit den Hauptnormalschnitten zusammen. Wir erhalten die

1. Folgerung: Konstruiert man um einen Flächenpunkt als Mittelpunkt eine unendlich kleine Kugel, so liegen die Punkte der Schnittkurve beider Flächen, für die die Entfernung von der Tangentialebene ein Extremwert ist, in den beiden Hauptnormalschnitten.

Betrachten wir positiv gekrümmte Flächen, so gibt es in jedem Flächenpunkt zwei konjugierte Tangenten, die einen kleinsten Winkel einschließen. Ihre Richtungen ergeben sich aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg}^2 w = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}; \quad \operatorname{tg} w = +\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}, \quad \operatorname{tg} w' = -\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}. \tag{6}$$

Setzen wir nun in (2) $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$, so geht die Gleichung über in

$$2a_{12}xy + a_{44} = 0 \tag{7}$$

und stellt, wenn $a_{12}a_{44} < 0$, einen geraden hyperbolischen Zylinder dar. Gleichung (4) geht dann in die Gleichung (6) über. Wir erhalten so die

2. Folgerung: Die Punkte der Schnittkurve des geraden hyperbolischen Zylinders (7) und einer positiv gekrümmten Fläche, für die die Entfernung von der Tangentialebene ein Extremwert ist, liegen in denjenigen konjugierten Normalschnitten, die den kleinstmöglichen Winkel einschließen.

Berlin, August 1906. W. Jänichen.

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Maraunenhof, Herzog Albrecht-Allee 27.]

Zu II A 11.

p. 772, note 42. Il y a lieu d'ajouter la nouvelle et dernière rédaction de l'auteur, contenant de nombreux remaniements et parue sous le titre *Calcul de Généralisation*, Paris, Hermann, 1899. H. Fehr.

---

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 282 S. ℳ 7.50.

Astronomischer Kalender für 1907. Hrsg. v. der Sternwarte zu Wien. Wien 1907, K. Gerold. 151 S. ℳ 2.40.

Barchanek, K., Lehr- und Übungsbuch der darstellenden Geometrie für Oberrealschulen. 2. Aufl. Wien 1907, F. Tempsky. 208 S. ℳ 3.20.

Belar, A., Neueste Erdbebennachrichten. Jhrgg. VI, Nr. 3. Beilage der Monatsschrift „Die Erdbebenwarte". Laibach 1906/7, v. Kleinmayer u. Bamberg.

Bouasse, H., Bases physiques de la Musique. Nr. 28, Scientia. Paris 1907, Gauthier-Villars. Fr. 2.

Broggi, N., Traité des assurances sur la vie avec développements sur le calcul des probabilités. Paris 1907, A. Hermann. 306 S. Fr. 7.50.

Brüsch, Die Beleuchtungsarten der Gegenwart. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 164 S. ℳ 1.25.

Chandler, G. H., Elements of the infinitesimal calculus. 3[d] edit. New York 1907, J. Wiley & Sons. 319 S. $ 2.

Crantz, P., Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht I. Aus Natur und Geisteswelt. ℳ 1.25.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, II. 532 S. ℳ 12.—

Czudnochowski, W. B. v., Das elektrische Bogenlicht. Seine Entwicklung und seine physikalischen Grundlagen. Leipzig 1906, S. Hirzel. 698 S. ℳ 29.—.

Dziobek, O., Die Grundlagen der Mechanik. Berlin 1907, S. Mittler u. S. 345 S. ℳ 7.—.

Enzyklopädie der math. Wiss. Band V_2. Heft 2: R. Gans, Elektrostatik und Magnetostatik. — F. Pockels, Beziehungen zwischen elektrostatischen und magnetostatischen Zustandsänderungen einerseits und elastischen und thermischen andererseits. Leipzig 1907, B. G. Teubner.

Felgenträger, W., Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 310 S. ℳ 8.—.

Fischer, O., Kinematik organischer Gelenke. Braunschweig 1907, Vieweg u. S. Heft 18 aus „Die Wissenschaft". ℳ 9.—.

Gauss, C. F., Gesammelte Werke VII. Leipzig 1906, B. G. Teubner. ℳ 30.—.

Gibbs, W., The scientific papers. Vol. I: Thermodynamics. — Vol. II: Dynamics, vector analysis and multiple algebra, electromagnetic theory of light. London 1906, Longmans, Green and Co. 24 sh. and 18 sh.

Hartwig, Th., Das Stereoskop und seine Anwendungen. Nr. 135 aus Natur und Geisteswelt. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 1.25.

Henrici, J., und Treutlein, P., Lehrbuch der Elementargeometrie. II. Teil. 3. Auflage. Leipzig 1907, B. G. Teubner. ℳ 3.30.

Hesse, O., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Vierte Auflage von S. Gundelfinger. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 251 S. ℳ 6.—.

Hočevar, F., Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik für die unteren Klassen. 6. Aufl. Wien 1906, F. Tempsky.

Hoffmann, C., Das Abelsche Theorem für die elliptischen Integrale. Inaug. Diss. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 47 S.

Kübler, J., Das Gleichgewichtsverhältnis der Materie zum Weltraum und die dadurch bedingte stufenweise Entwicklung. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 30 S.

Lampe, E., Die Enthüllungsfeier des Hauck-Denkmals. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 14 S.

Láska, W., Lehrbuch der Astronomie und der math. Geographie. I. Teil: Sphärische Astronomie. 2. Aufl. Bremerhaven 1907, L. v. Vangerow. *M.* 6.—.

Love, A. E., Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 664 S. *M.* 16.—.

Löwe, M., Rechenaufgaben mit ausgeführten Beispielen aus der Arbeiterversicherung. Leipzig 1907, J. Klinkhardt. *M.* 0.50.

Löwe, M., Unger, F., Richter, M., Praktisches Rechnen für Realschulen und ähnliche Lehranstalten. Drei Hefte. Leipzig 1907, J. Klinkhardt. je *M.* 1.20.

Merckel, C., Schöpfungen der Ingenieurtechnik der Neuzeit. 2. Aufl. Nr. 28 aus Natur und Geisteswelt. 143 S. *M.* 1.25.

Meyer, K., Naturlehre (Physik und Chemie) für höhere Mädchenschulen, Lehrerinnenseminare und Mittelschulen. Leipzig 1906, G. Freytag. 4. Aufl. *M.* 2.20.

Meyerhoffer, W., Gleichgewichte der Stereomeren. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 71 S. *M.* 2.40.

Müller, H., Vierstellige Logarithmentafeln. Leipzig 1907, B. G. Teubner. *M.* 0.25.

Napravnik, F., Vollständig gelöste Maturitätsaufgaben aus der Mathematik. Für Schüler der obersten Klassen an Realschulen und Gymnasien, sowie zum Selbststudium. Wien 1907, F. Deuticke.

Nielsen, N., Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 106 S. *M.* 3.60.

Osgood, W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie. Erster Band, zweite Hälfte. Leipzig 1907, B. G. Teubner. *M.* 7.60.

Pietzker, F., Lehrgang der Elementar-Mathematik. Teil I: Lehrgang der Unterstufe. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 318 S. *M.* 3.20.

Poincaré, H, Leçons de mécanique céleste. Tome II, 1re partie. Développement de la fonction perturbatrice. Paris 1907, Gauthier-Villars. 165 S. Fr. 6.

Riollot, J., Les carrés magiques. Paris 1907, Gauthier-Villars. 119 S. Fr. 5.

Rüdenberg, R., Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen. Band X der Sammlung elektrotechnischer Vorträge. Stuttgart 1906, F. Enke. 102 S. *M.* 3.60.

Rutherford, E., Die Radioaktivität. Unter Mitwirkung des Verfassers ergänzte autorisierte deutsche Ausgabe von E. Aschkinaß. Berlin 1907, J. Springer. 597 S. *M.* 16.—.

Scheid, K., Praktischer Unterricht in Chemie. Zum Gebrauch für das Laboratorium. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 79 S. *M.* 1.40.

Schülke, A., Aufgaben-Sammlung aus der Arithmetik nebst Anwendungen auf das bürgerliche Leben, Geometrie und Physik. 1. Teil. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 194 S. *M.* 2.20.

Schuster, M., Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie: Planimetrie, Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie. Ausgabe B. Zweite Auflage. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 118 S. *M.* 1.80.

Sickenberger, A., Übungsbuch zur Algebra. Erste Abteilung. Fünfte Auflage bearb. v. A. Schmid. München 1906, Th. Ackermann. 106 S. *M.* 2.35.

Stephan, P., Die technische Mechanik II. Festigkeitslehre und Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Leipzig 1906, B. G. Teubner. 332 S. *M.* 7.—.

Slaby, Otto von Guericke. Festvortrag aus Anlaß der Grundsteinlegung des Deutschen Museums zu München. Berlin 1907, J. Springer. 28 S. *M.* 0.60.

Thieme, H., Leitfaden der Mathematik für Gymnasien. Erster Teil: Die Unterstufe. 3. Aufl. Leipzig 1907, G. Freytag. 103 S. *M.* 2.60.

Thompson, S. P., Petrus Peregrinus de Maricourt and his Epistola de Magnete. Proc. Brit. Acad. London 1907, Brit. Academy. 32 S.

Vater, R., Die neueren Wärmekraftmaschinen. Zweite Auflage. Leipzig 1907, B. G. Teubner. 149 S. *M.* 1.25.

Veblen, O., and Lennes, N. J. Introduction to infinitesimal analysis. Functions of one real variable. 1st edit. New York 1907, J. Wiley & Sons. $ 2.

Winter, W., Stereometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Vierte Auflage. München 1906, Th. Ackermann. 116 S. *M.* 1.80.

Wittenbauer, J., Aufgaben aus der Technischen Mechanik. 1. Band: Allgemeiner Teil. 770 Aufgaben nebst Lösungen. Berlin 1907, J. Springer. *M.* 5.80.

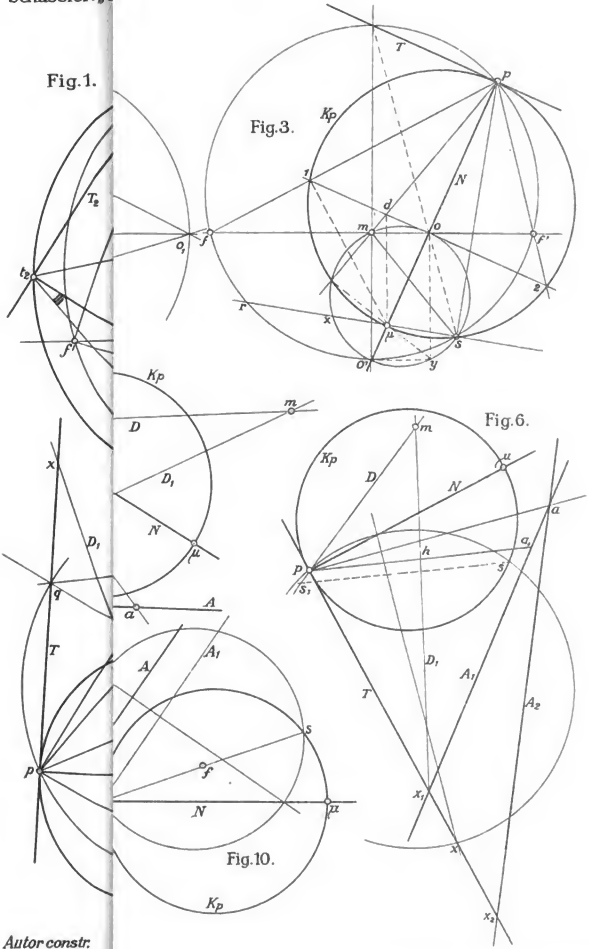


Fig.1.

Fig.3.

Fig.6.

Fig.10.

Autor constr.

Archiv der Ma

Lith u Druck v Eschebach & Schaefer, Leipzig

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

44. Sitzung am 30. Mai 1906.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.
Anwesend: 38 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Sándor: Beitrag zur Theorie des Fachwerks.

Herr Kötter: Über die Mohrsche Lösung der Aufgabe, ein Seilpolygon durch drei Punkte zu legen.

Der Vorsitzende berichtet, daß das Grabdenkmal für Weierstraß (s. S. 1 des laufenden Jahrganges) ausgeführt und auf dem St. Hedwigs-Kirchhof, Liesenstr. 8, aufgestellt worden ist. Über einem Sockel aus graublauem bayrischen Syenit erhebt sich ein 2 Meter hoher Obelisk aus poliertem schwarzen schwedischen Granit, auf dessen Vorderseite unter einem von dem Kirchenvorstande vorgeschriebenen Kreuz die Worte

Karl Weierstraß

geb. 31. October 1815
zu Ostenfelde

gest. 19. Februar 1897
zu Berlin

in erhabener Blockschrift eingemeißelt sind.

Die Grabstelle liegt schräg hinter dem Wohnhause des Kirchhofs-Inspektors, fast am Ende des ersten hinter diesem Hause nach rechts abgehenden Weges.

45. Sitzung am 27. Juni 1906.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.
Anwesend: 32 Herren.
Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Schafheitlin: Zur Theorie der Besselschen Funktionen (s. S. 82).

Herr Kötter: Über eine Zweiräderwage.

Die Kongruenz $x^\lambda \equiv x \pmod{10^n}$.

Von M. Koppe.

1. Aus den Lösungen der Kongruenz $x^2 \equiv x \pmod{10^n}$ für $n = 1$, nämlich $x = 0, 1, 5, 6$ lassen sich durch Vorschiebung je einer Ziffer die Lösungen für $n = 2$, daraus ebenso die für $n = 3$ etc. ableiten. Um diese Ziffernsysteme von rechts nach links durch Hinzufügung je einer Ziffer zu bilden, sind von Tédenat, Palmström, Valentin verschiedene Rekursionsformeln aufgestellt worden.[1] Im folgenden zeige ich, daß es auch möglich ist, von der n-ziffrigen Zahl für den Modul 10^n sofort auf die Zahl von doppelt soviel Ziffern für den Modul 10^{2n} überzugehen.

In der Kongruenz $x^2 \equiv x$ oder $x(x-1) \equiv 0 \pmod{10^6}$ sind die Faktoren x und $(x-1)$ teilerfremd, daher muß einer von ihnen die Primzahlpotenz 2^6 enthalten, während gleichzeitig 5^6 entweder in demselben oder in dem andern Faktor aufgeht. Im ersten Fall wird $x \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod{10^6}$, im andern Fall kann sein

$$x \equiv 0 \pmod{5^6},\quad x \equiv 1 \pmod{2^6},\quad \text{also } x = p \cdot 5^6,\quad x - 1 = q \cdot 2^6,$$

folglich $p \cdot 5^6 - q \cdot 2^6 = 1$, woraus

$$p = 57\ ,\quad q = 13\,916\ ,\quad x = 890625\ (= x_1)$$

$$x^2 - x = x(x-1) = p \cdot q\,.\,10^6 = 793\,212\,000\,000$$

also, ohne große Multiplikation

$$x_1^2 = 793\,212\,890\,625$$

Es kann auch sein $x \equiv 0 \pmod{2^6}$, $x \equiv 1 \pmod{5^6}$, oder für $x = 1 - \xi$

$$\xi \equiv 1 \pmod{2^6},\quad \xi \equiv 0 \pmod{5^6},$$

so daß ξ mit dem obigen x_1 übereinstimmt. Folglich

$$x_2 \equiv 1 - x_1 \equiv 109\,376 \pmod{10^6}.$$

Diese Auflösung, schon bei Français und Gergonne zu finden, wird für das folgende benutzt.

Die Wurzeln der Kongruenz $x^2 \equiv x \pmod{10^n}$ für $n > 6$ müssen auch der vorigen Kongruenz genügen, also in 000000, 000001, 890625, 109376 auslaufen. Ist x eine auf 5 auslaufende Wurzel, so ist also

$$x = 10^6 y + 890625 = 10^6 y + x_1$$

$$x^2 - x = 10^{12} y^2 + 10^6 y\,(2x_1 - 1) + x_1^2 - x_1 \equiv 0 \pmod{10^n}.$$

Hier ist es gut, $n = 12$ anzunehmen, um die quadratische Kongruenz auf den ersten Grad zu reduzieren. Setzt man $x_1^2 - x_1 = pq \cdot 10^6$, so folgt:

$$(2x_1 - 1)y + pq \equiv 0 \pmod{10^6}.$$

Da sich bei der Auflösung dieser Kongruenz und ähnlicher immer symmetrische Kettenbrüche ergaben, so erkannte ich, daß der Faktor, mit dem

[1] S. die Aufsätze von Zühlke, diese Berichte, IV, S. 11 und S. 59.

sie zu multiplizieren ist, um den Koeffizienten von y auf 1 zu bringen, nicht erst gesucht zu werden braucht, sondern mit dem Koeffizienten $(2x_1 - 1)$ übereinstimmt. In der Tat folgt:

$$(4x_1^2 - 4x + 1)\,y + (2x_1 - 1)\,pq \equiv 0 \pmod{10^6},$$

und da $x_1^2 \equiv x_1$:

$$\begin{aligned} y &\equiv (1 - 2x_1)\,pq \pmod{10^6} \\ &\equiv 21857 \cdot 793212 \\ &\equiv 918212. \end{aligned}$$

Demnach
$$x = 918212890625 = p' \cdot 5^{12} = q' \cdot 2^{12} + 1$$
$$p' = 3761,\ q' = 224137059.$$

Wird dasselbe Verfahren auf dieses 12stellige x angewandt, so erhält man als Lösung von $x^2 \equiv x \pmod{10^{24}}$

$$x_1 = 977392256259918212890625$$

und

$$x_2 = 022607743740081787109376.$$

Bisher ist dieses Ziffersystem immer nur auf 20 Stellen bestimmt worden, zuerst von Gergonne.

2. Als Beispiel eines andern Wertes für λ betrachte ich die Kongruenz $x^5 \equiv x \pmod{10^n}$. Für $n = 3$ hat sie Zühlke durch rekursorische Bestimmung der von rechts nach links sich anreihenden Ziffern gelöst, während sie Palmström für beliebiges n direkt löste, wobei eine Unterscheidung vieler Einzelfälle nötig war. Es sei $n = 6$. Da in der Kongruenz $x(x^4 - 1) \equiv 0 \pmod{10^6}$ die beiden Faktoren x und $(x^4 - 1)$ teilerfremd sind, so muß die Primzahlpotenz 2^6 in x oder in $(x^4 - 1)$ aufgehen, ebenso die Primzahlpotenz 5^6. Das gibt folgende Fälle

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x \equiv 0 \pmod{2^6, 5^6} \\ \text{II} & x^4 \equiv 1 \pmod{5^6},\ x \equiv 0 \pmod{2^6} \\ \text{III} & x^4 \equiv 1 \pmod{2^6},\ x \equiv 0 \pmod{5^6} \\ \text{IV} & x^4 \equiv 1 \pmod{2^6, 5^6}. \end{array}$$

Fall I. Es folgt $x \equiv 0 \pmod{10^6}$.

Fall II. Ist g eine primitive Wurzel für den Modul 5^6, so kann man $x \equiv g^{\xi}$ setzen und erhält

$$\begin{aligned} 4\xi &\equiv 0 \pmod{\varphi(5^6)} \\ &\equiv 0 \pmod{4 \cdot 5^5} \\ \xi &\equiv 0 \pmod{5^5}. \end{aligned}$$

Also $\xi \equiv 0;\ 5^5;\ 2 \cdot 5^5;\ 3 \cdot 5^5 \pmod{4 \cdot 5^5}$. Daher hat $x = g^{\xi}$ vier Werte, die man leichter erhält, wenn man die Kongruenz $x^4 \equiv 1$ durch den Ansatz $x = a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 + a_4 \cdot 5^4 + a_5 \cdot 5^5$ sukzessive für die Moduln $5,\ 5^2,\ 5^3$ etc. zu lösen sucht, wodurch sich $a_0\ a_1\ a_2 \ldots$ nacheinander ergeben. Man findet

$$x \equiv \pm 1, \pm 1068 \pmod{5^6}$$

oder kurz

$$x \equiv \alpha \pmod{5^6}.$$

Außerdem muß sein $x = u \cdot 2^6$,
folglich

$$u \cdot 2^6 \equiv \alpha \pmod{5^6}$$
$$u \equiv 1709\,\alpha \pmod{5^6}$$
$$\equiv \pm 1709, \pm 2913 \pmod{5^6},$$

folglich $x = u \cdot 2^6 \equiv \pm 109376; \pm 186432 \pmod{10^6}$.
Die negativen Zahlen können durch Hinzufügung von 10^6 positiv gemacht werden.
Fall III. Um $x^4 \equiv 1 \pmod{2^6}$ zu lösen, kann man $\pm x = 3^\xi$ setzen. Man erhält

$$4\xi \equiv 0 \pmod{16},\ \xi \equiv 0, 4, 8, 12 \pmod{16}$$
$$x \equiv \pm 1, \pm 17, \pm 33, \pm 49 \pmod{64}$$

oder kurz

$$x \equiv \beta \pmod{2^6}.$$

Außerdem muß sein $x \equiv v \cdot 5^6$, also

$$v \cdot 5^6 \equiv \beta \pmod{2^6}$$
$$v \equiv 7\beta$$
$$\equiv \pm 7, \pm 9, \pm 23, \pm 25 \pmod{2^6}$$
$$x = v \cdot 5^6 \equiv \pm 109375, \pm 140625, \pm 359375, \pm 390625 \pmod{10^6}.$$

Fall IV. Aus $x^4 \equiv 1 \pmod{5^6}$ und aus $x^4 \equiv 1 \pmod{2^6}$ folgt nach dem vorhergehenden

$$x \equiv \alpha \equiv \pm 1, \pm 1068 \pmod{5^6}$$
$$x \equiv \beta \equiv \pm 1, \pm 17, \pm 33, \pm 49 \pmod{2^6}.$$

Diese Kongruenzen lassen sich zusammenfassen in

$$x \equiv 109376\,\alpha + 109375\,\beta \pmod{10^6},$$

d. h. im einzelnen, wenn man nach den Endziffern ordnet,

$x =$			
000001	422943	045807	031249
250001	172943	295807	281249
218751	204193	327057	249999
468751	454193	077057	489999.

Das ist nur die Hälfte aller Zahlen. Man erhält sie alle, wenn man unter jede noch eine neue Zahl schreibt, die um 500000 größer ist als die alte.

Im ganzen haben wir $(1 + 4 + 8 + 32) = 45$ Zahlen erhalten, für welche $x^5 \equiv x \pmod{10^6}$ ist. Unter diesen findet sich keine mit der Endigung 307, obwohl diese bei Zühlke als Lösung der Kongruenz für den Modul 10^3 auftritt. In der Tat, sucht man durch $x = 1000\,x_1 + 307$ der Kongruenz für den Modul 10^5 zu genügen, so findet man schon die unlösbare Kongruenz $74 + 72\,x_1 \equiv 0 \pmod{100}$, für den Modul 10^4 ergibt sich noch eine mögliche Lösung $4 + 2x_1 \equiv 0 \pmod{10}$ also $x_1 = 3$ oder 8. Es spaltet sich also die Ziffernreihe 307 (für $n = 3$) in die Zweige 3307 und 8307 (für $n = 4$), eine weitere Anreihung von Ziffern für höhere Moduln findet nicht statt.

3. Viel einfacher ist der Fall $\lambda = 12$, also $x^{12} \equiv x \pmod{10^6}$ oder $x(x^{11} - 1) \equiv 0 \pmod{10^6}$. Unterscheidet man wieder 4 Fälle wie oben, so wird aus $x^{11} \equiv 1 \pmod{5^6}$ gefolgert $x = g^{\xi}$, $11\xi \equiv 0 \pmod{4 \cdot 5^5}$, $\xi \equiv 0$, $x \equiv 1 \pmod{5^6}$. Aus $x^{11} \equiv 1 \pmod{2^6}$ folgt, wenn $x = \pm 3^{\xi}$ gesetzt wird, $11\xi \equiv 0 \pmod{2^4}$, $\xi \equiv 0 \pmod{2^4}$, $x \equiv 1 \pmod{2^6}$. Hiernach hat die obige Kongruenz nur dieselben Lösungen wie die zuerst betrachtete Kongruenz $x(x-1) \equiv 0 \pmod{10^6}$. So wird es immer sein, wenn $(\lambda - 1)$ die Faktoren 2 und 5 nicht enthält.

4. Der Grund für das von Zühlke gefundene Kuriosum über die 20sten Potenzen liegt darin, daß $20 = \varphi(5^2)$ ist. Es läßt sich folgendermaßen erweitern: Die 100sten Potenzen aller Zahlen endigen nur auf 000; 001; 376; 625.

Ist x ungerade, so ist $x^2 \equiv 1 \pmod 8$, folglich $x^{100} \equiv 1 \pmod 8$, dagegen für gerades x ist $x^{100} \equiv 0 \pmod 8$, also

$$x^{100} \equiv \alpha \pmod 8, \quad \text{wo } \alpha = 0; 1.$$

Da $\varphi(5^3) = 100$ ist, so ist für Zahlen x, in denen 5 nicht aufgeht, $x^{100} \equiv 1 \pmod{5^3}$, für andere ist $x^{100} \equiv 0 \pmod{5^3}$, also

$$x^{100} \equiv \beta \pmod{125}, \quad \text{wo } \beta = 0, 1.$$

Wird der Rest irgend einer 100sten Potenz (mod 1000) mit r bezeichnet, so ist also

$$r \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \pmod 8, \qquad r \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \pmod{125}.$$

Daraus $r(r-1) \equiv 0 \pmod 8$, $r(r-1) \equiv 0 \pmod{125}$,
also $r(r-1) \equiv 0 \pmod{1000}$, d. h. $r^2 \equiv r \pmod{1000}$. Diese Kongruenz hat aber nach **1.** nur obige 4 Lösungen.

5. *Zusatz.* Für ein beliebig wachsendes n genügen der Kongruenz $x^5 \equiv x \pmod{10^n}$ nur folgende „Zahlen", deren Ziffern sich eindeutig nach links beliebig weit fortsetzen lassen:

I	$x_1 = \ldots 000000$	IV	$x_8 = \ldots 000001 = \gamma^4$
II	$x_2 = \ldots 186432 = \alpha$		$x_9 = \ldots 218751 = -\gamma^2 = 1 - 2\beta$
	$x_3 = \ldots 890624 = \alpha^2 = \beta - 1$		$x_{10} = \ldots 922943 = \gamma$
	$x_4 = \ldots 109376 = -\alpha^2 = 1 - \beta$		$x_{11} = \ldots 704193 = -\gamma^3$
	$x_5 = \ldots 813568 = -\alpha$		$x_{12} = \ldots 295807 = \gamma^3$
III	$x_6 = \ldots 890625 = \beta$		$x_{13} = \ldots 077057 = -\gamma$
	$x_7 = \ldots 109375 = -\beta$		$x_{14} = \ldots 781249 = \gamma^2 = 2\beta - 1$
			$x_{15} = \ldots 999999 = -\gamma^4$.

Alle diese Zahlen lassen sich durch Kongruenzen niedrigeren Grades definieren, insonderheit ist

$$\alpha(\alpha^2 + 1) \equiv 0; \quad \beta(\beta - 1) \equiv 0; \quad (\gamma + 1)(\gamma^2 + 1) \equiv 0 \pmod{10^\infty},$$

also $\alpha^3 \equiv -\alpha$, $\beta^2 \equiv \beta$, $\gamma^4 \equiv 1 \pmod{10^\infty}$. Ist β (aus 1.) bekannt, so findet man α und γ aus quadratischen Kongruenzen:

$$\alpha = \ldots 499879186432$$
$$\gamma = \ldots 581907922943.$$

Ist $x^\lambda \equiv x$, so bilden die Reste der Potenzen $x, x^2, x^3, \ldots$ Perioden von $(\lambda - 1)$ Gliedern. Genügt x keiner ähnlichen Kongruenz für einen kleineren Wert von λ, so ist die Periode primitiv, nicht in kleinere zerlegbar. Unter den obigen Werten von x sind primitiv für $\lambda = 5$: $x = \pm \alpha, \pm \gamma, \pm \gamma^3$. Von den ausgeschlossenen sind primitiv für $\lambda = 3$: $x = -1, \beta - 1, -\beta, \pm \gamma^2$. Endlich primitiv für $\lambda = 2$: $x = 0, 1, 1 - \beta, \beta$.

Es ist im allgemeinen unmöglich, daß eine „Zahl“ x einer *linearen* Kongruenz $Ax \equiv B \pmod{10^\infty}$ genüge. Denn dann würde folgen $B(B^4 - A^4) \equiv 0 \pmod{10^\infty}$, also auch $B(B^4 - A^4) = 0$, $B = 0, \pm A$, demnach $x = 0, \pm 1$, d. h. $x = x_1, x_8, x_{15}$. Daher können die übrigen Zahlen x auch nicht *periodisch* werden, denn das zur Umwandlung von periodischen Dezimalbrüchen in gemeine Brüche dienende Verfahren würde für sie eine lineare Kongruenz ergeben.

Für ein bestimmtes endliches n gibt es außer den n-zifferigen Resten der obigen Zahlen $\pmod{10^n}$ noch andere Wurzeln der Kongruenz $x^5 \equiv x \pmod{10^n}$. Diese stimmen mit den unter III und IV aufgeführten Zahlen in den letzten $(n-2)$ Ziffern überein, sind ihnen also für den Modul 10^{n-2} kongruent, sie lassen sich aber gar nicht oder nur um *eine* Ziffer (zu einer Lösung für den Modul 10^{n+1}) nach links hin verlängern.

Über das Foucaultsche Pendel.

Von A. Denizot.

1. Unter dem Foucaultschen Pendel werde ein Fadenpendel verstanden, dessen Schwingungen infolge der Versuchsanordnung sehr nahe in einer vertikalen Ebene erfolgen. In der Entwickelung der Theorie der scheinbaren Drehung der Schwingungsebene eines solchen Pendels kann man vor allem zwei Richtungen unterscheiden: Die von Liouville und Poinsot so sehr betonte „geometrische“ Methode, an welche sich verschiedene elementare Ableitungen des bekannten Gesetzes geknüpft haben, und die zuerst von Binet vorgezeichnete „dynamische“ Methode, welche in verschiedener Behandlung ganz allgemein in die Lehrbücher der analytischen Mechanik übergegangen ist.

2. Bei der geometrischen Methode liegen die Verhältnisse am einfachsten an den beiden Erdpolen: Setzt man voraus, daß die absolute (wahre) Pendelbewegung im Raum in einer unveränderlichen Ebene geschieht, so ergibt sich ohne weiteres als Erfahrungstatsache ihre relative (scheinbare) Drehung gegen die Erde. An einem Orte unter beliebiger geographischer Breite ergibt sich folgende entsprechende Betrachtung: Einerseits kann die Drehung der Erde um ihre Achse für einen an dem Orte sich befindenden Beobachter durch eine Drehung um eine durch den Aufhängungspunkt des Pendels zur Erdachse parallele (instantane) Achse ersetzt werden, andererseits hat der Pendelkörper das Bestreben, stets nach derselben Richtung zu schwingen. Gegenüber dem Beobachter an dem Ort wird sich diese unveränderliche Bewegungsrichtung um die instantane Achse mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde, und zwar im entgegengesetzten Sinne der absoluten Erddrehung, also auf der nördlichen Halbkugel wie der Zeiger einer Uhr

drehen. Diese Winkelgeschwindigkeit (ω) der Erde kann nun als Vektor (d. h. eine nach dem Polarstern gerichtete Gerade von der Länge ω) in zwei Komponenten zerlegt werden: nach der Vertikalen und der Tangente an den Meridian des Ortes. Beim Foucaultschen Pendelversuch kommt es auf die zuletzt genannte Komponente nicht an; in bezug auf die Vertikale des Ortes (φ) erfolgt die scheinbare Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$ in dem vorher bezeichneten Drehsinne.

3. Die dynamische Methode hat zum Ausgangspunkt gewisse Bewegungsgleichungen, welche als die Ursache der Erscheinung die zusammengesetzte Coriolissche Zentrifugalkraft hervortreten lassen. Diese Methode bildet einen unüberbrückbaren Gegensatz zu der geometrischen. Denn nach der geometrischen Anschauungsweise erfolgt die Drehung der Schwingungsebene beständig in ein und demselben Sinne, was aber nur möglich ist, wenn sich der Pendelkörper selbst *stets* in ein und demselben Sinne um die Vertikale dreht. Die Richtung der Coriolisschen Kraft dagegen kehrt sich jedesmal mit der Umkehr der Bewegungsrichtung des Pendels um. Außerdem ergibt die Coriolissche Kraft in den Umkehrstellen gar keine weitere Abweichung, während die geometrische Methode, entsprechend der Beobachtung, hier die größte Abweichung aufweist; das Umgekehrte ist beim Durchgang des Pendels durch die Vertikale vorhanden.

4. Der Gegensatz zwischen der geometrischen und der dynamischen Methode verschwindet, wenn statt der verstümmelten die vollständigen Poissonschen Bewegungsgleichungen für relative Bewegung an der Erdoberfläche betrachtet werden. Nach dem allgemeinen Theorem von Clairaut und Coriolis hat man zu den von außen wirklich wirkenden Kräften noch gewisse fingierte Kräfte hinzuzufügen (vgl. Ann. d. Phys. **18**, 299, 1905).

Die von außen auf das an der Erdoberfläche schwingende Pendel wirkenden Kräfte sind folgende: 1. Die (Newtonsche) Erdattraktion. 2. Die Fadentension, die durch die Normalreaktion einer ideellen Kugelschale vom Radius gleich der Fadenlänge des Pendels ersetzt werden kann. 3. Andere äußere Kräfte, wie der Luftwiderstand, Erdmagnetismus. Besonders werde betont, daß irgend eine Zentrifugalkraft als eine auf den Körper von außen wirkende Kraft nicht vorkommt.

Als die im Sinne des Theorems von Clairaut und Coriolis fingierten Kräfte sind folgende anzusetzen: 1. Die auf den Aufhängungspunkt des Pendels (Koordinatenanfang) wirkende Kraft; sie ist numerisch gleich der an diesem mit der Erde fest verbundenen Punkte angebrachten Zentrifugalkraft, welche durch die Rotation der Erde um ihre Achse erzeugt wird. 2. Die instantane Zentrifugalkraft (eigentlich Zentripetalkraft); sie ist gleich dem Produkt aus dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit der Erde und der Entfernung von der instantanen Achse. 3. Die Coriolissche Kraft; ihre Größe ist für die Masseneinheit gleich $-2\,\omega c \sin(\omega, c)$, wenn noch c die relative Geschwindigkeit des Körpers und (ω, c) der Winkel zwischen den Vektoren ω und c ist; ihre Richtung ist senkrecht zu den genannten Vektoren, und zwar nach rechts von der Bahn.

5. Es ist ohne weiteres ersichtlich, das die erste fingierte Kraft mit der Newtonschen Erdattraktion zusammen als die an dem Orte herrschende Schwere definiert werden kann. Dagegen darf man die zweite fingierte

Kraft nicht zur Schwere hinzufügen, was zwar vielfach geschehen ist, jedoch mit dem Begriff der Schwere, als der Bewegungsursache des Körpers unvereinbar ist. Nur dann, wenn der Körper gegen die Erde in relativer Ruhe, d. h. wenn er ein Teil der Erde ist, ist eine Zentrifugalkraft vorhanden, um welche die Newtonsche Erdattraktion an dem Körper verringert wird und deren Ausdruck der Form nach gleich der Summe der beiden ersten für relative Bewegung geltenden fingierten Kräfte ist. Bei unserem Problem liegt aber die Sache anders. Die oben definierte Schwere kann auch als die wirkliche Bewegungsursache des Körpers angesehen werden, wie man sich dieses an der Betrachtung spezieller Beispiele vergegenwärtigen kann. Ein z. B. im Koordinatenanfang ohne Anfangsgeschwindigkeit herabgelassener Körper bewegt sich unter dem Einfluß der Newtonschen Erdattraktion und dem Impuls, den er im Moment des Loslassens von der rotierenden Erde erhält; dies verhält sich genau ebenso, als ob der Körper ein Trabant der Erde wäre. Von einer während der Bewegung auf den Körper wirkenden Zentrifugalkraft ist aber ganz und gar keine Rede. In der Rechnung treten nun die beiden erwähnten Ursachen der Bewegung als die an dem Ort herrschende Schwere auf, d. h. als die Resultante aus der Newtonschen Gravitation und der durch die Erdrotation am Koordinatenanfang erzeugten Zentrifugalkraft. Diese beiden Ursachen treten bei allen Problemen auf, deren Entstehungsgeschichte an die Erde gebunden ist. Vom Standpunkt der Theorie der relativen Bewegung erscheint die hiermit zusammenhängende Definition der Schwere als die Resultante aus der Erdattraktion und der auf den Koordinatenanfang wirkenden Kraft.

Die vorliegenden Auseinandersetzungen bildeten den Gegenstand polemischer Erörterungen mit den Herren Rudzki und Tesař (Ann. d. Phys. **18**, 1070, 1905; **19**, 613, 1906). Wie ich (Ann. d. Phys. **19**, 868, 1906) bereits gezeigt habe, ist Herr Tesař durch eine unrichtige Interpretation der instantanen Zentrifugalkraft zu dem Ergebnis gelangt, daß diese fingierte Kraft eine Folge der wirklichen Drehung des Körpers um die instantane Achse ist. Gesetzt nun, daß es sich mit dieser fingierten Kraft im Sinne des Herrn Tesař verhielte, so läge kein Grund vor, diese Zentrifugalkraft von der Schwerkraft zu trennen, was jedoch Herr Tesař (Physikalische Zs. **7**, 199, 1906) tut, während Herr Rudzki das Gegenteil verlangt.

6. Die instantane Zentrifugalkraft und die Coriolissche Kraft haben in der relativen Bewegung eine selbständige Bedeutung. Ist die relative Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung des Körpers gleich Null, so tritt allein die instantane Zentrifugalkraft auf. Denkt man sich z. B. am Nordpol einen Körper in absoluter Ruhe (Umkehrstellen eines Pendels), so wird er für den mit der Erde fest verbundenen Beobachter eine scheinbare Kreisbewegung ausführen, und zwar im entgegengesetzten Sinne der absoluten Erddrehung, woraus der Zusammenhang mit der instantanen Zentrifugalkraft ersichtlich ist.

Man übersieht, daß es bei Erscheinungen, deren Verlauf an dem Beobachtungsort mit verhältnismäßig großer Geschwindigkeit und in kurzer Zeit sich abspielt, berechtigt ist, die instantane Zentrifugalkraft unberücksichtigt zu lassen. Die östliche Abweichung eines freifallenden Körpers, die Rechtsabweichung eines Geschosses, der Rechtsdruck einer Lokomotive auf die Schienen, das Buys-Ballotsche Gesetz in der Meteorologie sind ohne

weiteres durch die Coriolissche Kraft zu erklären. Die instantane Zentrifugalkraft wird bei diesen Erscheinungen nur eine unbedeutende Rolle spielen; die durch das Experiment kaum nachweisbare südliche Abweichung eines frei fallenden Körpers könnte wohl auf diese fingierte Kraft zurückgeführt werden.

7. Was nun die Berechtigung der beiden zuletzt genannten fingierten Kräfte beim Foucaultschen Pendelversuch anlangt, so ist kein Grund vorhanden, die instantane Zentrifugalkraft, wie es bisher geschah, allein des Quadrats der Winkelgeschwindigkeit der Erde wegen zu vernachlässigen. Allgemein könnte man zunächst sagen, daß die Erscheinung am Foucaultschen Pendel eine Folge der relativen Bewegung ist, die erst vollständig sowohl durch die Zentrifugalkraft wie durch die Coriolissche Kraft bestimmt wird. Allein die Coriolissche Kraft hat auf die Bewegung selbst gar keinen Einfluß. Da nämlich die Bewegung des Pendels genau dieselbe ist, wie die, welche der Pendelkörper auf einer mit der Erde fest verbundenen Kugelschale verzeichnen würde, so spielt die Coriolissche Kraft in bezug auf eine vorgezeichnete Bahn nur die Rolle einer Reaktionskraft, aber nicht die einer die Bewegung bestimmenden Kraft. Wird insbesondere durch die Versuchsanordnung angestrebt, daß das Pendel in der Vertikalebene schwinge, d. h. daß der Pendelkörper sich stets auf der Peripherie eines vertikalen Kreises bewege, so liegen die Verhältnisse genau ebenso: die Coriolissche Kraft beeinflußt nur die normale Reaktion der vertikalen Kreisbahn und hat auf die Bewegung des Pendelkörpers in der Vertikalebene absolut gar keinen Einfluß. Die Schwingungsdauer z. B. ist gegebenenfalls allein abhängig von der instantanen Zentrifugalkraft, nicht aber von der Coriolisschen Kraft, deren Arbeit gleich Null ist.

Das Auftreten der instantanen Zentrifugalkraft hängt mit der scheinbaren Drehung der erwähnten Ebene um die instantane Achse zusammen; von dieser Drehung kommt infolge der Versuchsanordnung vor allem in Frage die Komponente nach der Vertikalen des Ortes, und zwar im Betrage des Produktes der Winkelgeschwindigkeit und des sinus der geographischen Breite. Gewisse Abweichungen von dem Sinusgesetz können vielleicht auch darauf zurückgeführt werden, daß das Pendel die Möglichkeit hat, sich noch um eine andere Achse als die Vertikale zu drehen.

Vergleichen wir nun diese, auf Grund der allgemeinen Bewegungsgleichungen gewonnene Interpretation mit der eingangs erwähnten geometrischen Methode, so sehen wir, daß zwischen beiden kein Gegensatz besteht.

8. Herr Tesař hat zu wiederholten Malen versucht zu zeigen, daß bei dem Foucaultschen Pendelproblem die Coriolissche Kraft die Rolle einer primären, die instantane Zentrifugalkraft die einer sekundären Ursache spielt; diesen Anschauungen neigt auch der Referent meiner Arbeiten in den Beiblättern zu den Annalen der Physik (1906) zu. Meine diesbezüglichen Erwiderungen, in welchen ich darauf aufmerksam mache, daß Herrn Tesařs Rechnungen auf ein perpetuum mobile hinauskommen, werden hierbei gar nicht beachtet.

Charlottenburg, Juli 1906.

Die Lage der Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art.

Von Paul Schafheitlin.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich gezeigt, daß die erste positive Nullstelle der Besselschen Funktion erster Art $J_n(x)$ für einen Wert des Argumentes x eintritt, wofür $x > \sqrt{n(n+2)}$ ist, vorausgesetzt, daß der Index n eine reelle positive Zahl ist, und habe ähnliche Werte für die Lage der ersten Nullstellen von $\frac{dJ_n}{dx}$ und $\frac{d^2 J_n}{dx^2}$ ermittelt; im letzten Abschnitte jener Arbeit ist bewiesen worden, daß für *ganzzahlige* Werte des Index die erste positive Nullstelle der Besselschen Funktion zweiter Art $Y_n(x)$ nach $x = n + \frac{1}{2}$, aber vor der ersten Nullstelle von $J_n(x)$ liegt.

Von Schläfli[2]) ist schon bemerkt worden, daß jede einzelne Nullstelle von $J_n(x)$ eine stetige Funktion des reellen positiven Index n ist, die mit wachsendem Index stets wächst.

Hier soll gezeigt werden, daß für die positiven Nullstellen der Besselschen Funktionen zweiter Art $Y_n(x)$ ebenfalls der Schläflische Satz gilt, und daß für jeden reellen positiven Wert des Index die erste positive Nullstelle von $Y_n(x)$ nach $x = n$ liegt.

§ 1.

Die Besselschen Funktionen oder Zylinderfunktionen sind Lösungen der Differentialgleichung:

$$Z_n''(x) + \frac{1}{x} Z_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) Z_n(x) = 0 \tag{1}$$

und genügen den Funktionalgleichungen:

$$\frac{2n}{x} Z_n(x) = Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x), \tag{2}$$

$$2 Z_n'(x) = Z_{n-1}(x) - Z_{n+1}(x); \tag{3}$$

der obere Strich soll eine Differentiation nach dem Argumente x bedeuten, während die Differentiation nach dem Index oder Parameter n stets in der bekannten Bruchform geschrieben werden wird; das Argument wird häufig der Kürze halber weggelassen werden. Argument und Index sollen auf reelle positive Werte beschränkt sein. Durch Addition und Subtraktion folgt aus (2) und (3):

$$Z_n' = \quad Z_{n-1} - \frac{n}{x} Z_n, \tag{4}$$

$$Z_n' = -Z_{n+1} + \frac{n}{x} Z_n. \tag{5}$$

Es ist:

$$\frac{d}{dt}\{\varphi_n(t) Z_n^2(t)\} = 2\varphi_n Z_n Z_n' + \varphi_n' Z_n^2,$$

1) Journ. f. Math. 122, 299—321; 1900.
2) Math. Ann. 10, 137—142; 1876.

also mit Benutzung von (4) und (5):

$$\frac{d}{dt}(\varphi_n Z_n^2) = 2\varphi_n Z_n Z_{n-1} + \left(\varphi_n' - \frac{2n}{t}\varphi_n\right) Z_n^2, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi_n Z_n^2) = -2\varphi_n Z_n Z_{n+1} + \left(\varphi_n' + \frac{2n}{t}\varphi_n\right) Z_n^2, \tag{7}$$

demnach auch:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_n Z_{n-1}^2) = -2\varphi_n Z_n Z_{n-1} + \left(\varphi_n' + \frac{2n-2}{t}\varphi_n\right) Z_{n-1}^2, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi_n Z_{n+1}^2) = 2\varphi_n Z_n Z_{n+1} + \left(\varphi_n' - \frac{2n+2}{t}\varphi_n\right) Z_{n+1}^2. \tag{9}$$

Durch Addition von (6) und (8) und alsdann von (7) und (9) folgt:

$$\frac{d}{dt}[\varphi_n(Z_n^2 + Z_{n-1}^2)] = \left(\varphi_n' - \frac{2n}{t}\varphi_n\right) Z_n^2 + \left(\varphi_n' + \frac{2n-2}{t}\varphi_n\right) Z_{n-1}^2,$$

$$\frac{d}{dt}[\varphi_n(Z_n^2 + Z_{n+1}^2)] = \left(\varphi_n' + \frac{2n}{t}\varphi_n\right) Z_n^2 + \left(\varphi_n' - \frac{2n+2}{t}\varphi_n\right) Z_{n+1}^2.$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit einem von t unabhängigen Faktor λ und addiert beide Gleichungen, so ergibt sich:

$$\frac{d}{dt}\{\varphi_n(1+\lambda)Z_n^2 + \varphi_n Z_{n-1}^2 + \lambda\varphi_n Z_{n+1}^2\} = \left\{\varphi_n'(1+\lambda) - \frac{2n}{t}(1-\lambda)\varphi_n\right\} Z_n^2$$
$$+ \left(\varphi_n' + \frac{2n-2}{t}\varphi_n\right) Z_{n-1}^2 + \left(\lambda\varphi_n' - \frac{2n+2}{t}\lambda\varphi_n\right) Z_{n+1}^2.$$

Um die aus (2) und (3) folgende Gleichung:

$$\frac{2n}{x}\frac{dZ_n^2}{dx} = Z_{n-1}^2 - Z_{n+1}^2 \tag{10}$$

auf die letzten beiden Glieder obiger Gleichung anwenden zu können, bestimme man φ_n durch die Beziehung

$$\varphi_n' + \frac{2n-2}{t}\varphi_n = -\lambda\varphi_n' + \frac{2n+2}{t}\lambda\varphi_n$$

oder

$$\varphi_n'(1+\lambda) - \frac{2}{t}(\lambda n - n + \lambda + 2)\varphi_n = 0,$$

und dieser Differentialgleichung wird genügt durch

$$\varphi_n = t^{2n\frac{\lambda-1}{\lambda+1}+2}.$$

Setzt man

$$2n\frac{\lambda-1}{\lambda+1} = \nu,$$

so ist:

$$\lambda = \frac{2n+\nu}{2n-\nu},$$

und es geht obige Gleichung über in:

$$\frac{d}{dt}\left\{t^{\nu+2}\left(\frac{4n}{2n-\nu}Z_n^2 + Z_{n-1}^2 + \frac{2n+\nu}{2n-\nu}Z_{n+1}^2\right)\right\} = \frac{8n(\nu+1)}{2n-\nu}t^{\nu+1}Z_n^2$$
$$+ 2n(2n+\nu)t^\nu\frac{dZ_n^2}{dt}.$$

Durch Integration zwischen beliebigen Grenzen a und b ergibt sich hieraus nach leichten Umformungen:

$$(11) \qquad 4(\nu+1)\int_a^b t^{\nu+1} Z_n^2\, dt - \nu(4n^2-\nu^2)\int_a^b t^{\nu-1} Z_n^2\, dt$$

$$= \Big[t^{\nu+2}\Big\{\Big(2-\frac{4n^2-\nu^2}{t^2}\Big) Z_n^2 + \frac{2n-\nu}{2n} Z_{n-1}^2 + \frac{2n+\nu}{2n} Z_{n+1}^2\Big\}\Big]_a^b .$$

Die hier gegebene Ableitung dieser Formel rührt von Lommel[1]) her, wenn auch in dieser allgemeinen Form die Gleichung (11) von ihm nicht aufgestellt worden ist. Durch Spezialisierung des Faktors ν und der Grenzen a und b ergeben sich aus (11) viele zum Teil schon bekannte Integralformeln; wird eine der Grenzen Null oder Unendlich, so bleibt natürlich die betreffende Integralformel nur gültig, falls alsdann die rechte Seite einen bestimmten endlichen Wert besitzt. Um dies zu entscheiden, beachte man, daß die Potenzreihe, die die Besselsche Funktion erster Art $J_n(x)$ definiert, mit dem Gliede $\left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{\Pi n}$ beginnt und entsprechend die Besselsche Funktion zweiter Art $Y_n(x)$[2]) mit $\left(\frac{2}{x}\right)^n \cdot \frac{\Pi(n-1)}{\pi}$. Für ein unendlich großes Argument konvergieren beide Funktionen gegen folgende Werte:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$Y_n(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

wobei die Wurzel hier wie im folgenden stets absolut zu nehmen ist; der Index soll positiv oder Null sein. Aus (11) folgt dann für $\nu = 0$ und endliche Werte von x:

$$\int_0^x t J_n^2(t)\, dt = \frac{x^2}{4}\Big\{\Big(2 - \frac{4n^2}{x^2}\Big) J_n^2(x) + J_{n-1}^2(x) + J_{n+1}^2(x)\Big\}$$

oder vermöge (4) und (5)

$$(12\text{a}) \qquad \int_0^x t J_n^2(t)\, dt = \frac{x^2}{2}\Big\{\Big(1 - \frac{n^2}{x^2}\Big) J_n^2(x) + \Big(\frac{dJ_n}{dx}\Big)^2\Big\}.$$

Die entsprechende Formel:

$$(12\text{b}) \qquad \int_0^x t Y_n^2\, dt = \frac{x^2}{2}\Big\{\Big(1 - \frac{n^2}{x^2}\Big) Y_n^2 + \Big(\frac{dY_n}{dx}\Big)^2\Big\}$$

1) Zur Theorie der Besselschen Funktionen. Math. Ann. **14**, 530; 1879.

2) Um Mißverständnissen vorzubeugen bemerke ich, daß Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, Leipzig, Teubner 1904, mit demselben Buchstaben die obige Funktion, jedoch *mit umgekehrtem Vorzeichen* bezeichnet.

gilt nur für $n < 1$. Diese Formeln rühren von Lommel[1]) her. Für $\nu = -1$ ergibt sich:

$$(13a)\quad (4n^2-1)\int_x^\infty J_n^2\frac{dt}{t^2} = \frac{4}{\pi} - x\left\{\left(2 - \frac{4n^2-1}{x^2}\right)J_n^2 + \frac{2n+1}{2n}J_{n-1}^2 + \frac{2n-1}{2n}J_{n+1}^2\right\}.$$

Ist $n > \frac{1}{2}$, so darf hierin $x = 0$ gesetzt werden, und man erhält

$$(13^*)\qquad \int_0^\infty J_n^2\frac{dt}{t^2} = \frac{4}{\pi(4n^2-1)}.$$

In der entsprechenden Formel:

$$(13b)\quad (4n^2-1)\int_x^\infty Y_n^2\frac{dt}{t^2} = \frac{4}{\pi} - x\left\{\left(2 - \frac{4n^2-1}{x^2}\right)Y_n^2 + \frac{2n+1}{2n}Y_{n-1}^2 + \frac{2n-1}{2n}Y_{n+1}^2\right\}$$

muß x stets größer als Null sein.

Für $\nu = 2n$ und endliche Werte von x folgt:

$$(14a)\quad 2(2n+1)\int_0^x t^{2n+1}J_n^2\,dt = x^{2n+2}(J_n^2 + J_{n+1}^2),$$

$$(14b)\quad 2(2n+1)\int_0^x t^{2n+1}Y_n^2\,dt = x^{2n+2}(Y_n^2 + Y_{n+1}^2) - \frac{2^{2n+2}}{\pi^2}\Pi n\,\Pi n.$$

Schließlich liefert die Annahme $\nu = -2n$ für $n > \frac{1}{2}$:

$$(15a)\qquad 2(2n-1)\int_x^\infty J_n^2\frac{dt}{t^{2n-1}} = \frac{1}{x^{2n-2}}(J_n^2 + J_{n-1}^2)$$

und speziell

$$(2n-1)\int_0^\infty J_n^2\frac{dt}{t^{2n-1}} = \frac{1}{2^{2n-1}}\cdot\frac{1}{\Pi(n-1)\,\Pi(n-1)}.$$

In der entsprechenden Gleichung:

$$(15b)\qquad 2(2n-1)\int_x^\infty Y_n^2\frac{dt}{t^{2n-1}} = \frac{1}{x^{2n-1}}(Y_n^2 + Y_{n-1}^2)$$

muß x stets größer als Null sein. Die Formelgruppen (14) und (15) sind im wesentlichen auch schon von Lommel angegeben, während die Formeln (13) bisher der Beachtung entgangen zu sein scheinen, und gerade aus ihnen lassen sich wichtige Folgerungen über die Größe der Besselschen Funktionen ziehen.

---

[1]) Math. Ann. 14, 523; 1879.

§ 2.

Da im folgenden der Verlauf der Besselschen Funktionen für größere Indices betrachtet werden soll, kann der Fall $n < \frac{1}{2}$, der für (13a) und (13b) einen Ausnahmefall bildet, außer acht gelassen werden. Es läßt sich (13a) leicht mit Hilfe der Formeln (2) bis (5) unter anderen in folgende Formen bringen:

$$(16\text{a}) \quad (4n^2-1)\int_x^\infty J_n^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{\pi} - x\left\{\left(2 - \frac{2n^2-1}{x^2}\right)J_n^2 + 2(J_n')^2 + \frac{2}{x}J_nJ_n'\right\}$$

$$(16\text{b}) \quad = \frac{4}{\pi} - x\left\{\left(\frac{1}{x}J_n + J_n'\right)^2 + 2\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J_n^2 + (J_n')^2\right\}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichungen für alle positiven reellen Werte von x eine positive Größe ist, die nach (13a) kleiner als $\frac{4}{\pi}$ ist, so ist stets der in geschweifter Klammer stehende Ausdruck rechts ebenfalls eine positive Größe, die kleiner ist als $\frac{4}{\pi x}$.

Genau die entsprechenden Gleichungen gelten für Y_n; jedoch ist hierbei zu beachten, daß für sehr kleine Werte von x das Integral über alle Grenzen wächst. Es kann demnach der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck auch negative Werte annehmen; aus (16b) sieht man, daß für $x > n$ der betreffende Ausdruck stets positiv und dann natürlich auch kleiner als $\frac{4}{\pi x}$ ist.

Die rechten Seiten der Formeln (12) bis (16) vereinfachen sich wesentlich, wenn x eine Nullstelle der Besselschen Funktion oder ihrer ersten oder zweiten Ableitung ist; dann lassen sich nämlich sämtliche Besselschen Funktionen vermöge (1) bis (5) durch eine einzige derselben ausdrücken. So ergibt sich z. B. aus (16b):

$$(17) \quad (4n^2-1)\int_x^\infty J_n^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{\pi} - 2xJ_{n-1}^2 = \frac{4}{\pi} - 2x(J_n')^2 \quad \text{für} \quad J_n(x) = 0,$$

$$(18) \quad (4n^2-1)\int_x^\infty J_n^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{\pi} - x\left(2 - \frac{2n^2-1}{x^2}\right)J_n^2 \quad \text{für} \quad J_n'(x) = 0.$$

Die entsprechenden Formeln gelten für Y_n.

Es ergibt sich nunmehr aus (16b):

I. *Ist* $x > n\sqrt{2}$, *so ist* $|J_n| < \sqrt{\frac{4}{\pi x}}$ *und* $|Y_n| < \sqrt{\frac{4}{\pi x}}$.

Aus (17) folgt:

II. *Ist* $J_n = 0$, *so ist sowohl* $|J_{n-1}|$, $|J_{n+1}|$, *als auch* $|J_n'| < \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$,

und ist $Y_n = 0$, *so ist sowohl* $|Y_{n-1}|$, $|Y_{n+1}|$, *als auch* $|Y_n'| < \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$.

Zwischen den Funktionen J und Y bestehen die Relationen:

$$Y_n J_{n-1} - J_n Y_{n-1} = \frac{2}{\pi x},$$
$$Y_n J_n' - J_n Y_n' = \frac{2}{\pi x}.$$

Mit Rücksicht hierauf folgt aus II:

III. *Ist* $J_n = 0$, *so ist* $|Y_n| > \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$, *und ist* $Y_n = 0$, *so ist* $|J_n| > \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$.

Aus I. und III. erkennt man, daß die Werte sowohl von J_n als Y_n für $x > n\sqrt{2}$ zwischen den zwei im Unendlichen zusammentreffenden gegen die X-Achse symmetrischen Zweige der Kurve III. Ordnung $xy^2 = \frac{4}{\pi}$ liegen; daß dagegen die entsprechenden Zweige von $xy^2 = \frac{2}{\pi}$ an bestimmten Stellen, wie groß auch das Argument werden mag, überschritten werden.

§ 3.

Bezeichnet man die rechte Seite in (11) zur Abkürzung mit S_ν, und bedeutet p eine beliebige positive ganze Zahl, so ist

$$4(2p - \nu - 1)\int_a^b t^{\nu-2p+1} Z_n^2 dt$$
$$- (2p - \nu)(2n + 2p - \nu)(2n - 2p + \nu)\int_a^b t^{\nu-2p-1} Z_n^2 dt = - S_{\nu-2p}$$

oder wenn zur Abkürzung:

$$\alpha_p = \frac{(2p - \nu)(2n + 2p - \nu)(2n - 2p + \nu)}{4(2p - \nu - 1)} = \frac{\left(p - \frac{\nu}{2}\right)\left(n + p - \frac{\nu}{2}\right)\left(n - p + \frac{\nu}{2}\right)}{p - \frac{\nu + 1}{2}}$$

gesetzt wird:

$$\int_a^b t^{\nu-2p+1} Z_n^2 dt - \alpha_p \int_a^b t^{\nu-2p-1} Z_n^2 dt = - \frac{S_{\nu-2p}}{4(2p - \nu - 1)}.$$

Erteilt man hierin nacheinander p die Werte $1, 2, 3, 4, \ldots$, multipliziert die betreffenden Gleichungen mit $1, \alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots$ und addiert, so folgt:

$$\int_a^b t^{\nu-1} Z_n^2 dt - \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_p \int_a^b t^{\nu-2p-1} Z_n^2 dt = - \frac{1}{8}\sum_{\lambda=1}^{p} \frac{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{\lambda-1}}{\lambda - \frac{\nu+1}{2}} S_{\nu-2\lambda}.$$

Nun ist:

$$\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{\lambda-1} = \frac{\Pi\left(-\frac{\nu+1}{2}\right)\Pi\left(n + \frac{\nu}{2} - 1\right)}{\Pi\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Pi\left(n - \frac{\nu}{2}\right)} \cdot \frac{\Pi\left(\lambda - \frac{\nu}{2} - 1\right)\Pi\left(n + \lambda - \frac{\nu}{2} - 1\right)}{\Pi\left(\lambda - \frac{\nu}{2} - \frac{3}{2}\right)\Pi\left(n - \lambda + \frac{\nu}{2}\right)}.$$

Hiermit geht die vorige Gleichung über in:

$$(19)\qquad \int_a^b t^{\nu-1} Z_n^2\,dt$$

$$-\frac{\Pi\left(-\frac{\nu+1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{\nu}{2}-1\right)\Pi\left(p-\frac{\nu}{2}\right)\Pi\left(n+p-\frac{\nu}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Pi\left(n-\frac{\nu}{2}\right)\Pi\left(p-\frac{\nu+1}{2}\right)\Pi\left(n-p-1+\frac{\nu}{2}\right)}\int_a^b t^{\nu-2p-1} Z_n^2\,dt$$

$$=-\frac{1}{8}\frac{\Pi\left(-\frac{\nu+1}{2}\right)\Pi\left(n+\frac{\nu}{2}-1\right)}{\Pi\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Pi\left(n-\frac{\nu}{2}\right)}\sum_{\lambda=1}^{p}\frac{\Pi\left(\lambda-\frac{\nu}{2}-1\right)\Pi\left(n+\lambda-\frac{\nu}{2}-1\right)}{\Pi\left(\lambda-\frac{\nu+1}{2}\right)\Pi\left(n-\lambda+\frac{\nu}{2}\right)}S_{\nu-2\lambda}.$$

Wählt man hierin ∞ als obere Integrationsgrenze, so wird der hiervon herrührende Teil von $S_{\nu-2\lambda}$ für $\nu-2\lambda<-1$ nach (11) verschwinden; wählt man ferner eine Nullstelle x von Z_n als Integrationsgrenze, so wird der hiervon herrührende Teil von $S_{\nu-2\lambda}$ werden $2x^{\nu-2\lambda+2}Z_{n-1}^2$. Bei dieser Annahme über x ergibt sich aus (19) für $\nu=0$:

$$(20)\qquad \int_x^\infty Z_n^2\frac{dt}{t}=\frac{\sqrt{\pi}\cdot\Pi p\,\Pi(n+p)}{n\,\Pi(p-\frac{1}{2})\,\Pi(n-p-1)}\int_x^\infty Z_n^2\frac{dt}{t^{2p+1}}$$
$$+\frac{\sqrt{\pi}}{4n}Z_{n-1}^2\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi(\lambda+\frac{1}{2})\,\Pi(n-\lambda-1)}\cdot\frac{1}{x^{2\lambda}},$$

und mit Benutzung von (17) für $\nu=-1$:

$$(21)\qquad 4\cdot\frac{\Pi(p-\frac{1}{2})\,\Pi(n+p-\frac{1}{2})}{\Pi(p-1)\,\Pi(n-p-\frac{1}{2})}\int_x^\infty Z_n^2\frac{dt}{t^{2p}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}-x\cdot Z_{n-1}^2\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\Pi(\lambda-\frac{1}{2})\,\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda-\frac{1}{2})}\cdot\frac{1}{x^{2\lambda}}.$$

Bleibt in (20) nun $p<n$, so sind beide Summanden rechts positiv; es stellt alsdann der zweite Summand eine untere Grenze für den Wert des links stehenden Integrals dar. Ist n eine ganze Zahl und $p=n$, so wird der erste Summand wegen des Divisors $\Pi(-1)$ verschwinden, und es gibt der zweite Summand genau den Wert desselben Integrals an. Ist n eine gebrochene Zahl, und liegt p zwischen n und $n+1$, so wird $\Pi(n-p-1)$ und damit der erste Summand rechts negativ, und in diesem Falle stellt der zweite Summand eine obere Grenze der linken Seite dar; liegt p zwischen $n+1$ und $n+2$, so erhält man wieder eine untere Grenze, usw.

Ähnlich ergibt sich aus (21), daß der Subtrahend rechts kleiner ist als $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, wenn $p<n+\frac{1}{2}$ ist. Wenn n die Hälfte einer ganzen Zahl und $p=n+\frac{1}{2}$ ist, so wird der Subtrahend genau gleich $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$; in diesem Falle ist also πZ_{n-1}^2 eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten der

Nullstelle von Z_n. Abgesehen von diesem speziellen Falle ist der Subtrahend rechts größer als $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, wenn p zwischen $n+\frac{1}{2}$ und $n+\frac{3}{2}$ liegt; er ist kleiner als $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, wenn p zwischen $n+\frac{3}{2}$ und $n+\frac{5}{2}$ liegt, usw.

Aus diesen Überlegungen folgt:

$$\int\limits_x^\infty Z_n^2\frac{dt}{t}\leqq\frac{\sqrt{\pi}}{4n}Z_{n-1}^2\cdot\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi(\lambda+\frac{1}{2})\,\Pi(n-\lambda-1)}\cdot\frac{1}{x^{2\lambda}},$$

wenn $Z_n(x)=0$ und $n\leqq p<n+1$ ist, und es ist:

$$\sqrt{\pi}\,Z_{n-1}^2\leqq\frac{2}{x}:\sum_{\lambda=0}^{r-1}\frac{\Pi(\lambda-\frac{1}{2})\,\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda-\frac{1}{2})}\cdot\frac{1}{x^{2\lambda}},$$

wenn $Z_n(x)=0$ und $r\leqq n+\frac{1}{2}$ oder $n+\frac{3}{2}<r\leqq n+\frac{5}{2}$ ist.

Aus beiden Ungleichungen folgt:

$$(22)\quad \int\limits_x^\infty Z_n^2\frac{dt}{t}<\frac{1}{2nx}\sum_{\lambda=0}^{p-1}\frac{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi(\lambda+\frac{1}{2})\,\Pi(n-\lambda-1)}\,\frac{1}{x^{2\lambda}}:\sum_{\lambda=0}^{r-1}\frac{\Pi(\lambda-\frac{1}{2})\,\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda-\frac{1}{2})}\,\frac{1}{x^{2\lambda}}.$$

Nun ist:

$$\frac{\Pi\lambda}{\Pi(\lambda+\frac{1}{2})}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\lambda+1}\varphi\,d\varphi\quad\text{und}\quad\frac{\Pi(\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\lambda}\varphi\,d\varphi;$$

folglich ist stets:

$$\frac{\Pi\lambda}{\Pi(\lambda+\frac{1}{2})}<\frac{\Pi(\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda}.$$

Ferner ist:

$$\frac{\Pi(n+\lambda)}{\Pi(n-\lambda-1)}=n(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-\lambda^2)$$

und:

$$\frac{\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi(n-\lambda-\frac{1}{2})}=\left(n^2-\frac{1}{2^2}\right)\left(n^2-\frac{3^2}{2^2}\right)\cdots\left[n^2-\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2\right],$$

folglich ist unter der Voraussetzung, daß sämtliche Klammergrößen positiv sind:

$$\frac{\Pi(n+\lambda)}{\Pi(n-\lambda-1)}<n\cdot\frac{\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi(n-\lambda-\frac{1}{2})}.$$

Zieht man aus der im Zähler stehenden Summe in (22) den Faktor n heraus, so ist alsdann jeder Summand des Zählers nach den eben bewiesenen Ungleichungen kleiner als der entsprechende Summand des Nenners, wenn alle Summanden positiv sind; der Bruch ist daher echt, wenn die Anzahl der Summanden im Nenner mindestens ebenso groß wie im Zähler ist. Setzt man $n=m+\varepsilon$, wo m eine positive ganze Zahl und ε einen positiven echten Bruch bedeutet, so ist dies der Fall, wenn $\varepsilon\geqq\frac{1}{2}$ ist, weil dann $p=r=m+1$ in (22) gesetzt werden kann. Ist aber $\varepsilon<\frac{1}{2}$, und setzt man $p=m+1$, so muß man, um die nötige Anzahl Glieder im Nenner zu erhalten, $r=m+2$ setzen; dann ist allerdings sogar die Anzahl im Nenner um eins größer als im Zähler, aber das letzte Glied ist negativ.

Jedoch läßt sich zeigen, daß die Differenz der beiden letzten Glieder im Nenner größer ist als das letzte Glied des Zählers, wenn $x \geqq m + \varepsilon$ ist.

Das letzte Glied des Zählers lautet:

$$\frac{1}{x^{2m}} \cdot \frac{\Pi m}{\Pi(m+\frac{1}{2})} \cdot [(m+\varepsilon)^2 - 1^2][(m+\varepsilon)^2 - 2^2] \cdots [(m+\varepsilon)^2 - m^2],$$

und die beiden letzten des Nenners:

$$\frac{1}{x^{2m}} \cdot \frac{\Pi(m-\frac{1}{2})}{\Pi m} \left[(m+\varepsilon)^2 - \frac{1}{2^2}\right]\left[(m+\varepsilon)^2 - \frac{3^2}{2^2}\right] \cdots \left[(m+\varepsilon)^2 - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2\right]$$
$$\times \left\{1 - \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \frac{(m+\frac{1}{2})^2 - (m+\varepsilon)^2}{x^2}\right\}.$$

Die einzelnen Faktoren dieser Glieder sind im Zähler kleiner als im Nenner; durch einfache Ausrechnung findet man, daß auch der letzte Faktor oben kleiner ist als der entsprechende des Nenners, multipliziert mit der geschweiften Klammer, wenn man in ihr $x = m + \varepsilon$ setzt. Sonach ergibt sich allgemein:

Es ist

$$\int_x^\infty Z_n^2 \frac{dt}{t} < \frac{1}{2x} < \frac{1}{2n}, \tag{23}$$

wenn $Z_n(x) = 0$ *und* $x \geqq n$ *ist.*

§ 4.

Die erste Nullstelle von $Y_n(x)$ liegt für ganzzahliges n nach $x = n + \frac{1}{2}$, wie ich früher bewiesen habe[1]); hier soll gezeigt werden, daß für ein ganzzahliges $n \geqq 2$ diese Nullstelle nach $n + 1$ liegt. Es ist nämlich:

$$\frac{\pi}{2} Y_n(x) = \left(\psi_n - \log\frac{x}{2}\right) J_n(x) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{n+\lambda}\right) J_{n+2\lambda} \tag{24}$$
$$+ \frac{1}{4} J_n(x) \sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}$$
$$+ \frac{1}{2} J_n'(x) \sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\lambda-1)\,\Pi(n+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda-1}.$$

Nach dem dort geschilderten Verfahren ist zu zeigen, daß

$$\left\{\psi n - \log(n+1) - \frac{2n}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}\right\} J_n(x)$$

vermehrt um die beiden letzten Summen in (24) positiv ist für $x = n + 1$.

Es ist[2]):

$$\log(n+1) = \log(n+\tfrac{1}{2}) + \log\frac{2n+2}{2n+1} < \log(n+\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2n+1}.$$

---

1) Journ. f. Math. **122**, 317 ff.; 1900.

2) Gauß, Werke 1876, Bd. 3, pag. 154, Formel 66.

Ferner ist:
$$\psi(n) > \log(n + \tfrac{1}{2}),$$
also:
$$\psi(n) - \log(n+1) > -\frac{1}{2n+1}.$$

Aus den im Anfange meiner erwähnten Arbeiten befindlichen Formeln zwischen den Besselschen Funktionen und ihren Ableitungen ergibt sich leicht, daß für $J_n'(x) = 0$ die Gleichung besteht:

$$J_{n+3}' = -\frac{1}{x^4} \cdot J_n\{4n(n+1)(n+2)(n+3) - (5n^2 + 15n + 12)x^2 + x^4\}.$$

Da für die erste Nullstelle von J_n' sowohl J_n wie J_{n+3}' positiv sind, so muß die Klammer negativ sein; ist $n \geqq 2$, so ist sie für $x = n+1$ noch positiv; es liegt also für $n \geqq 2$ die erste Nullstelle von J_n' nach $x = n+1$. Die letzte Summe in (24) ist also für $r = n+1$ und $n \geqq 2$ positiv, ebenso die vorletzte. Läßt man daher die letzte Summe außer Betracht und nimmt von der vorletzten nur die 2 ersten Glieder, so findet man, daß der zu untersuchende Ausdruck größer ist als

$$-\frac{1}{2n+1} - \frac{n-1}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{4n(n-1)}{3(n+1)^3} = \frac{n(5n^2 - 7n - 4)}{3(2n+1)(n+1)^3},$$

und dieser Bruch ist für $n \geqq 2$ positiv. Daher liegt *die erste Nullstelle von $Y_n(x)$ für ganzzahlige $n \geqq 2$ nach $x = n+1$; für $n = 0$ oder 1 nach $x = n + \frac{1}{2}$.*

Es ist

$$Y^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x \quad \text{und} \quad Y^{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{\cos x}{x} + \sin x\right\}.$$

Hieraus erkennt man, daß die erste Nullstelle von $Y^{\frac{1}{2}}$ bei $x = \frac{\pi}{2}$ und die von $Y^{\frac{3}{2}}$ für $x > \frac{7}{8}\pi$ sich befindet; aus beiden Werten sieht man, daß auch für diese beiden Indices die erste Nullstelle nach $n + \frac{1}{2}$, sogar nach $n + 1$ liegt.

§ 5.

Die Besselsche Differentialgleichung (1) läßt sich in der Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}(tZ_n') + \frac{t^2 - n^2}{t} Z_n(t) = 0.$$

Differenziert man sie nach dem Index n, so folgt:

$$\frac{d}{dt}\left[t\frac{\partial^2 Z_n}{\partial n \partial t}\right] + \frac{t^2 - n^2}{t}\frac{\partial Z_n}{\partial n} = \frac{2n}{t} Z_n.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich weiter leicht:

$$Z_n \frac{d}{dt}\left[t\frac{\partial^2 Z_n}{\partial n \partial t}\right] - \frac{\partial Z_n}{\partial n}\frac{d}{dt}(tZ_n') = \frac{2n}{t} Z_n^2$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left[tZ_n\frac{\partial^2 Z_n}{\partial n \partial t} - t\frac{\partial Z_n}{\partial n} \cdot Z_n'\right] = \frac{2n}{t} Z_n^2,$$

also ist:

$$(25) \qquad 2n\int_a^b Z_n^2 \frac{dt}{t} = \left[tZ_n\frac{d^2 Z_n}{\partial n \partial t} - t\frac{\partial Z_n}{\partial n} \cdot Z_n'\right]_a^b.$$

Die Grenzen a und b in dieser Gleichung können beliebig gewählt werden, mit der Beschränkung jedoch, daß beim Auftreten der Grenze Null nur Besselsche Funktionen erster Art unter Z_n verstanden werden dürfen.

Wählt man x so, daß $J_n(x) = 0$ ist, so erhält man aus (25):

$$\frac{\partial J_n}{\partial n} = -\frac{2n}{x \cdot J'_n} \int_0^x J_n^2 \frac{dt}{t}. \tag{26}$$

Variiert man nun in $J_n(x)$ sowohl x als n, aber so, daß $J_n(x)$ konstant seinen Wert beibehält, so ist:

$$\frac{\partial J_n}{\partial n} \cdot dn + \frac{\partial J_n}{\partial x} dx = 0 \tag{27}$$

oder:

$$\frac{dx}{dn} = -\frac{\partial J_n}{\partial n} : \frac{\partial J_n}{\partial x}.$$

Ist Null der konstante Wert von $J_n(x)$, so erhält man aus (26) und (27):

$$\frac{dx}{dn} = \frac{2n}{x} \cdot \frac{1}{(J'_n)^2} \cdot \int_0^x J_n^2 \frac{dt}{t}. \tag{28}$$

Aus dieser von Schläfli[1]) herrührenden Gleichung folgt, daß, vom Index Null beginnend, die einzelne Nullstelle der Besselschen Funktionen erster Art als Funktion des Index betrachtet stets wächst, da die rechte Seite der Gleichung durchaus positiv ist. In solcher einfachen Weise läßt sich der entsprechende Satz für die Besselschen Funktionen zweiter Art nicht ableiten, weil eben die Grenze Null hierfür nicht gewählt werden darf.

Aus dem in § 1 gegebenen asymptotischen Werte von Y_n folgt für ein ins Unendliche wachsendes Argument

$$Y'_n(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$\frac{\partial Y_n}{\partial n} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right),$$

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial x \partial n} = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right).$$

Bei Benutzung dieser Werte erhält man aus (25):

$$2n \int_x^\infty Y_n^2 \frac{dt}{t} = 1 + x Y'_n \cdot \frac{\partial Y_n}{\partial n},$$

wenn x Nullstelle von $Y_n(x)$ ist, und hieraus:

$$\frac{\partial Y_n}{\partial n} = -\left(1 - 2n \int_x^\infty Y_n^2 \frac{dt}{t}\right) : x Y'_n;$$

und nach derselben Überlegung wie oben für J_n ergibt sich hieraus:

1) S. z. B. Graf u. Gubler, Theorie der Besselschen Funktionen, Heft I, pag. 112. Bern 1898.

Wenn x eine Nullstelle von $Y_n(x)$ bedeutet, so ist:

$$\frac{dx}{dn} = \left(1 - 2n\int_x^{\infty} Y_n^2(t)\,\frac{dt}{t}\right) : x(Y_n')^2. \tag{29}$$

Nun ist § 3 Formel (23) bewiesen worden, daß das rechts stehende Integral kleiner ist als $\frac{1}{2n}$, sobald $x \geqq n$ ist. Wenn also die erste Nullstelle von $Y_n(x)$ größer als n ist, so wächst wegen (29) diese und erst recht jede folgende Nullstelle mit wachsendem n. Für ein ganzzahliges $n \geqq 2$ ist in § 4 gezeigt worden, daß die erste Nullstelle größer ist als $n+1$. Geht man von einem beliebigen ganzzahligen Werte von n, z. B. 2 aus, so ist hierfür die erste Nullstelle größer als 3, folglich beginnt die Kurve, welche diese Nullstelle darstellt, vom Index 2 an zu wachsen und bleibt in dem ganzen Intervall von 2 bis 3 beim Wachsen, weil die Nullstelle sicher stets größer als der Index bleibt; erreicht dieser den Wert 3, so hat nach § 4 die Kurve sicher den Wert 4 überschritten, und aus demselben Grunde wie oben bleibt zwischen 3 und 4 die Kurve beim Wachsen, u. s. f. Auch für kleinere Indices als 2 ist durch die Kenntnis der Lage der Nullstellen von $Y^{\frac{1}{2}}$ und $Y^{\frac{3}{2}}$ am Schlusse von § 4 ebenfalls das Wachsen der ersten Nullstelle nachgewiesen.

Somit ergibt sich schließlich:

Jede einzelne positive Nullstelle von $J_n(x)$ und $Y_n(x)$ wächst mit wachsendem Index.

Und:

Die erste Nullstelle von $Y_n(x)$ liegt nach $x = n$ und vor der ersten Nullstelle von $J_n(x)$.

Aus der Gleichung:

$$Y_n J_{n-1} - J_n Y_{n-1} = \frac{2}{\pi x} \tag{30}$$

folgt, daß weder Y_n und J_{n-1} noch J_n und Y_{n-1} gleichzeitig verschwinden können; denn im ersten Falle wäre

$$|Y_{n-1}| < \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \quad \text{und} \quad |J_n| < \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$$

nach § 2 II, folglich wäre

$$|J_n Y_{n-1}| < \frac{2}{\pi x}$$

und nicht gleich $\frac{2}{\pi x}$, wie (30) verlangt, und analog im anderen Falle. Früher habe ich bewiesen[1]), daß die erste Nullstelle von Y_1 *vor* $\frac{3}{4}\pi$, die erste von J_0 *nach* $\frac{3}{4}\pi$ liegt; somit erhält man den Satz:

Die erste Nullstelle von Y_n liegt auch vor der ersten von J_{n-1}, sobald $n > 1$ ist.

Für $n = \frac{1}{2}$ fallen beide zusammen, weil $Y_{\frac{1}{2}} = J_{-\frac{1}{2}}$ ist.

Berlin, den 27. Juni 1906.

1) Journ. f. Math. **122**, 313/314; 1900.

Mitglieder-Verzeichnis.

Ackermann-Teubner, Hofr. Dr. A., Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3
Adler, Prof. Dr. A., Privatdozent, Wien VI, Marchettigasse 3.
Ammerlahn, Oberlehrer G., Steglitz, Filandastr. 10.
Aron, GRR. Prof. Dr. H., Berlin W. 15, Kaiserallee 219/220.
Börsch, Prof. Dr. A., Potsdam, Saarmunderstr. 15.
Bonke, Oberlehrer R., Berlin NO. 18, Werneuchenerstr. 2.
Budde, Prof. Dr. E., Charlottenburg, Berlinerstr. 54.
Burg, Oberlehrer Dr. R., Friedenau, Friedrich Wilhelmplatz 13.
Caratheodory, Privatdozent Dr. C., Göttingen, Nicolausbergerweg 49.
Cranz, GRR. Prof. Dr. C., Charlottenburg, Bismarckstr. 12.
Cwojdziński, cand. K., Berlin N. 24, Auguststr. 6.
Denizot, Dr. A., Charlottenburg, Schlüterstr. 7.
Dumas, Privatdozent Dr. G., Zürich, Asylstr. 81.
Dziobek, Prof. Dr. O., Charlottenburg, Schillerstr. 19.
Eichberg, Dr. Jng. F., Charlottenburg, Mommsenstr. 7.
Emde, Ingenieur F., Berlin NW. 87, Zinzendorfstr. 3.
Färber, Prof. Dr. C., Berlin S. 59, Freiligrathstr. 4.
Fischer, Oberlehrer P. B., Gr. Lichterfelde, Chausseestr. 29.
Fleck, prakt. Arzt Dr. A., Berlin N. 31, Ackerstr. 117.
Freese, Oberlehrer O., Pankow, Brehmestr. 56.
Fuchs, Oberlehrer u. Privatdozent Dr. R., Halensee, Ringbahnstr. 128.
Furtwaengler, Prof. Dr. Ph., Poppelsdorf-Bonn, Marienstr. 15.
Galle, Prof. Dr. A., Potsdam, Behlertstr. 36.
Güntsche, Prof. Dr. R., Berlin W. 30, Hohenstaufenstr. 7.
Guradze, Dr. H., Königsberg (Pr.), Theaterplatz 10/11.
Gutsche, Prof. Dr. O., Breslau, Trebnitzer Platz 6.
Haenlein, Prof. J., Berlin NW. 52, Spenerstr. 34.
Haentzschel, Prof. Dr. E., Berlin W. 30, Gleditschstr. 43.
Hagmann, Oberlehrer A., Charlottenburg, Friedbergstr. 10.
Hahn, Prof. H., Grunewald, Bismarckallee 24.
Hamburger, Schulamtskandidat Dr. A., Berlin NW. 6, Karlstr. 15.
Hassel, Schulamtskandidat C., Charlottenburg 4, Schillerstr. 42.
Hauck, Oberlehrer A., Steglitz, Adolfstr. 1.
Hensel, Prof. Dr. K., Marburg (Hessen), Universitätsstr. 54.
Hermes, Prof. Dr. O., Steglitz, Lindenstr. 35.
Hertzer, GRR. Prof. Dr. H., Halensee, Kurfürstendamm 137.
Hessenberg, Prof. Dr. G., Grunewald, Trabenerstr. 21.
Heun, Prof. Dr. K., Karlsruhe (Bd.), Klauprechtstr. 33.
Holtze, Dipl. Jng. H., Berlin SW. 11, Anhaltstr. 10.
Hupe, Prof. A., Charlottenburg, Kantstr. 76.
Jacobsthal, Schulamtskandidat Dr. E., Berlin SW. 13, Alte Jakobstr. 128.
Jahnke, Prof. Dr. E., Berlin W. 15, Ludwigskirchstr. 6.
Jolles, Prof. Dr. St., Halensee, Kurfürstendamm 130.
Jonas, Schulamtskandidat H. J., Berlin SW. 48, Wilhelmstr. 129.

Kneser, Prof. Dr. A., Breslau, Tiergartenstr. 106.
Knoblauch, Prof. Dr. J., Berlin W. 35, Karlsbad 12.
Koebe, Dr. P., Luckenwalde.
Koebke, Dr. E., Friedenau, Cranachstr. 5.
Koppe, Prof. M., Berlin SO. 33, Schlesischestr. 18.
Kötter, Prof. Dr. F., Berlin S. 14, Annenstr. 1.
Kreuter, G., Wissensch. Hilfsarbeiter bei der Südpolarexpedition, Berlin NW. 6, Luisenstr. 33/34.
Krüger, Prof. Dr. L., Potsdam, Geodät. Institut.
Kühnen, Prof. Dr. Fr., Potsdam, Wilhelmsplatz 2.
Kullrich, Realgymnasialdirektor Dr. E., Gera (Reuß), Blücherstr. 14.
Lampe, GRR. Prof. Dr. E., Berlin W. 15, Fasanenstr. 64.
Landau, Prof. Dr. E., Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 13.
Lemke, Oberlehrer Dr. H., Wilmersdorf, Preußischestr. 8.
Lewent, Oberlehrer L., Berlin W. 30, Motzstr. 87.
Linsenbarth, Prof. Dr. H., Berlin N. 54, Lothringerstr. 76.
Linsenmann, Dipl. Ing. H., München, Fasaneriestr. 4.
Löwenheim, Oberlehrer L., Berlin NW. 23, Schleswiger Ufer 19.
Lorenz, Ingenieur M., Kiel, Preußenstr. 1.
Mann, Ingenieur L., Charlottenburg, Galvanistr. 2.
Marggraff, Prof. Dr. B., Pankow, Amalienpark 2.
Meder, Dozent A., Riga, Dorpaterstr. 23.
Meißner, O., Hilfsrechner am Geodätischen Institut, Potsdam, Victoriastr. 70b.
Meyer, Oberlehrer Dr. E., Charlottenburg 2, Goethestr. 6.
Meyer, Prof. Dr. F., Königsberg (Pr.), Villenkolonie Maraunenhof, Herzog Albrecht-Allee 27.
Michaelis, Prof. Dr. C., Potsdam, Schützenplatz 1a.
Michaelis, Stadt-Schulrat Dr. K., Berlin W. 35, Kurfürstenstr. 149.
Müller, Prof. Dr. F., Friedenau, Rönnebergstr. 16.
Müller, Prof. H., Charlottenburg, Grolmanstr. 15.
Müller, Oberrealschuldirektor Prof. Dr. R., Schöneberg, Grunewaldstr. 27.
Nahrwold, Oberrealschuldirektor Dr. R., Berlin C. 19, Niederwallstr. 12.
Opitz, Oberlehrer Dr. H., Johannisthal, Parkstr. 6.
Pahl, Oberlehrer F., Charlottenburg, Kantstr. 118/119.
Peters, Oberlehrer J., Nienburg a. d. Weser.
Pund, Oberlehrer Dr. O., Charlottenburg, Schloßstr. 61.
Quelle, R., Verlagsbuchhändler, Leipzig, Liebigstr. 6.
Reissner, Prof. Dr. Ing. H., Aachen, Lütticherstr. 166.
Richert, Prof. Dr. P., Berlin W. 30, Gleditschstr. 24.
Rothe, Privatdozent Dr. R., Charlottenburg 2, Schlüterstr. 78.
Rotth, Oberingenieur A., Berlin W. 35, Magdeburgerstr. 22.
Salkowski, Oberlehrer Dr. E., Berlin SW. 29, Zossenerstr. 17.
Samter, Prof. Dr. H., Charlottenburg, Herderstr. 14.
Sándor, Dr. Ing. E., Charlottenburg, Knesebeckstr. 94.
Sarli, Dr. Ing. Cr., Berlin N. 54, Brunnenstr. 25.
Schafheitlin, Prof. Dr. P., Berlin W. 15, Schaperstr. 17.
Schlesinger, Prof. Dr. O., Charlottenburg 1, Galvanistr. 17.
Schmidt, Prof. Dr. A., Friedenau, Niedstr. 36.
Schneider, GBR. Prof. A., Berlin W. 57, Großgörschenstr. 31.

Schur, Privatdozent Dr. J., Berlin NW. 52, Thomasiusstr. 2.
Seiffert, Oberlehrer A., Charlottenburg, Spreestr. 9.
Seliwanow, Prof. Dr. D., St. Petersburg, Fontanka, 116, log. 16.
Singer, Dr. O., Berlin NW. 52, Helgoländer Ufer 5.
Skutsch, Prof. R., Dortmund, Münsterstr. 38.
Steinitz, Prof. Dr. E., Berlin W. 50, Nachodstr. 38.
Thiel, Oberlehrer G., Berlin S. 59, Urbanstr. 25.
Tropfke, Oberlehrer Dr. J., Berlin NW. 6, Marienstr. 14.
Valentin, Oberbibliothekar Dr. G., Berlin W. 62, Burggrafenstr. 6.
Vogler, GRR. Prof. Dr. Ch. A., Berlin W. 10, Kaiserin Augustastr. 80.
Wallenberg, Prof. Dr. G., Charlottenburg, Grolmanstr. 21.
Weingarten, GRR. Prof. Dr. J., Freiburg i. Breisgau, Schillerstr. 22.
Weiß, Oberlehrer Dr. F., Gr.-Lichterfelde Ost, Parallelstr. 10.
Weltzien, Prof. Dr. C., Zehlendorf, Prinz Handjerystr. 3.
Zacharias, Oberlehrer Dr. M., Berlin NW. 52, Melanchthonstr. 5.
Zühlke, Oberlehrer Dr. P., Westend, Spandauerberg 4.

SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN VOM VORSTANDE DER GESELLSCHAFT.

SECHSTER JAHRGANG.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Inhaltsverzeichnis.

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

46. Sitzung am 31. Oktober 1906.

Vorsitzender: Herr Knoblauch.

Herr Färber erstattet den Kassenbericht. Bei der Neuwahl des Vorstandes wird, nachdem Herr Knoblauch von vornherein die Erklärung abgibt, daß er eine Wiederwahl nicht annehmen würde, Herr Schafheitlin zum Vorsitzenden gewählt. Zum stellvertretenden Vorsitzenden und Schriftführer wird Herr Jahnke und zum Kassenwart Herr Färber wiedergewählt.

Anwesend: 35 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilung:

Herr Meißner: Einige Bemerkungen zu Herrn M. Simons Bericht über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert.

47. Sitzung am 28. November 1906.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Die Schaffung einer Redaktionskommission wird beschlossen, und zu ihren Mitgliedern werden außer dem Schriftführer die Herren Knoblauch und Hessenberg gewählt.

Auf Antrag von Herrn F. Müller wird über eine Feier von Leonhard Eulers zweihundertstem Geburtstag (15. April 1907) beraten. Es wird eine Festsitzung geplant, wo voraussichtlich drei Mitglieder der Gesellschaft Vorträge halten werden, und zwar über Eulers Aufenthalt in Berlin, seine bahnbrechenden Arbeiten und eines seiner speziellen Forschungsgebiete.

Anwesend: 33 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Fleck: Drei zahlentheoretische Sätze.

Herr Güntsche: Rationale Tetraeder (s. S. 2).

48. Sitzung am 12. Dezember 1906.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Fortsetzung der Beratung über die Eulerfeier, insbesondere über die Festschrift, wo die in Aussicht genommenen Vorträge zum Abdruck kommen sollen.

Anwesend: 28 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Koppe: Zwei einfache Aufgaben über scheinbare Schwere und relative Bewegung.

Herr Hessenberg: Beitrag zur zeichnerischen Behandlung der Kegelschnitte (s. S. 17).

Rationale Tetraeder.

Von R. Güntsche.

1. Unter einem *rationalen Tetraeder* soll ein Tetraeder verstanden werden, bei welchem *die Kanten*, *die Seiteninhalte und der Rauminhalt rationale Maßzahlen* besitzen. Das Aufsuchen solcher Tetraeder erscheint von nicht geringem Interesse, denn bei ihnen sind außer den vorgeschriebenen elf noch viele andere Größen rational, vor allem die Höhen, die Radien sämtlicher Berührungskugeln, das Quadrat des Radius der Umkugel, ferner an jeder der vier Ecken der von Staudtsche Eckensinus und der polare Eckensinus, nebst dem Quotient beider, dem „Modul" der Ecke, sodann die beiden Junghannschen Tetraedermoduli, nämlich 1) der für alle vier Ecken gleiche Quotient aus dem doppelten Inhalt eines Begrenzungsdreiecks und dem polaren Eckensinus der gegenüberliegenden Ecke, 2) der für alle vier Ecken gleiche Quotient aus dem Umkreisdurchmesser eines Begrenzungsdreiecks und dem Modul der gegenüberliegenden Ecke; diese Tetraeder stellen also in bemerkenswerter Weise das räumliche Analogon zu den heronischen Dreiecken dar.

2. Ein rationelles Verfahren zur Auffindung rationaler Tetraeder war meines Wissens noch nicht bekannt.[1]) In Angriff genommen hat die Aufgabe, Tetraeder dieser Art aufzustellen, R. Hoppe[2]) in einer Abhandlung vom Jahre 1877; er geht dabei, wie es auch im folgenden geschehen wird, von Dreikanten aus, bei denen die goniometrischen Funktionen der Kanten- und Flächenwinkel rational sind. Numerische Beispiele solcher Dreikante ermittelt er durch ein Tastverfahren; die Untersuchung führt er aber, von einigen Zahlenbeispielen abgesehen, die einem ganz speziellen Falle (vgl. unten Art. 19) angehören, nicht bis zur Aufstellung rationaler Tetraeder durch. — Später hat Herr F. Bessell[3]) Hoppes Verfahren insofern vervollkommnet, als er auf rationellem Wege für Dreikante, deren Kanten- und Flächenwinkel rationale goniometrische Funktionen haben, partikuläre allgemeine Lösungen aufgestellt hat, Lösungen nämlich, welche zwar partikulär, d. h. nicht umfassend sind, aber wegen der willkürlichen Wahl der darin vorkommenden Parameter einen gewissen Grad von Allgemeinheit besitzen. Bessells Abhandlung enthält also Vorarbeiten zur Auffindung rationaler Tetraeder; auf diese selbst geht sie nicht ein. — Allgemeine partikuläre Lösungen für Tetraeder mit rationalen Kanten und rationalem Inhalt hat Herr K. Schwering[4]) 1895 auf rationellem Wege finden gelehrt. Diese Aufgabe ist von der vorliegenden verschieden; bei den rationalen Tetraedern in unserem

---

1) Ein numerisches Beispiel veröffentlichte ich Arch. (3) 7, 178—179, 1904, Anfrage 10; die daran geknüpfte Anfrage, ob Beispiele von Tetraedern dieser Art bekannt wären, hatte ebensowenig wie andere Nachforschungen Erfolg.

2) R. Hoppe: Über rationale Dreikante und Tetraeder. Arch. (1) **61**, 86—98, 1877.

3) F. Bessell: Rationale sphärische Dreiecke. Arch. (1) **65**, 363—372, 1880.

4) K. Schwering: Rationale Tetraeder. Journ. f. Math. **115**, 301—307, 1895. K. Schwering: Geometrische Aufgaben mit rationalen Lösungen. Programmbeilage Düren 1898.

Sinne wird außerdem noch gefordert, daß die Inhalte der vier Seiten rational sind. Daß diese vier Bedingungen voneinander und von den übrigen sieben unabhängig sind, erhellt aus dem bekannten Eulerschen Beispiel eines Tetraeders, in dem drei aneinanderstoßende Kanten $a = 117$, $b = 240$, $c = 44$, die gegenüberliegenden $a' = 244$, $b' = 125$, $c' = 267$ und der Rauminhalt rational sind, während von den vier Seiten zwar drei, welche pythagoreische Dreiecke sind, rationalen Inhalt haben, die vierte dagegen nicht. — Schließlich sei erwähnt, daß Herr H. A. Schwarz über Tetraeder mit rationalen Kanten und rationalem Inhalt nach verschiedener Richtung Untersuchungen angestellt hat.

3. Eine vollständige Erledigung des Problems, rationale Tetraeder in unserem Sinne zu finden, wäre erreicht, wenn es gelänge, Ausdrücke für die Kanten, die Seiteninhalte und das Volumen aufzustellen, welche *sechs* willkürliche Parameter enthalten, und außerdem nachzuweisen, daß damit alle möglichen Lösungen erschöpft sind. Im folgenden soll ein rationelles Verfahren elementarer Natur beschrieben werden, das zur Aufstellung von partikulären allgemeinen Lösungen rationaler Tetraeder führt; diese enthalten statt der erforderlichen sechs nur *zwei* willkürliche Parameter, von denen der eine, der Proportionalitätsfaktor, in den Formeln weggelassen werden wird, und unterliegen zudem der Einschränkung, daß zwei der Dreikante, aus denen die Tetraeder gebildet sind, den Modul *Eins* besitzen. Die Anregung zu diesen Untersuchungen verdanke ich einer Notiz von Herrn K. Schwering in seinen „Hundert Aufgaben"; erst als sie im wesentlichen abgeschlossen waren, wurde ich auf die erwähnten Arbeiten von Hoppe und Bessell aufmerksam, die auf ähnlichem Wege vorzugehen versucht hatten.

4. Bei den Untersuchungen über heronische Dreiecke, überhaupt bei vielen Aufgaben, in welchen an geometrischen Figuren rationale Zahlen auftreten, sind die Winkel, deren goniometrische Funktionen rational sind, von grundlegender Bedeutung. Wie schon früher angedeutet[1]), gilt dies auch von den Untersuchungen über rationale Tetraeder. Bekanntlich sind die goniometrischen Funktionen eines Winkels rational, wenn es die Tangente (oder Kotangente) seiner Hälfte ist, und umgekehrt. Im Folgenden soll ein Winkel mit der Kotangente seiner Hälfte durch denselben Buchstaben bezeichnet, der Winkel jedoch durch das darübergesetzte Zeichen ^ charakterisiert werden:

$$\varphi \text{ bedeutet } \cot \tfrac{1}{2} \hat{\varphi}, \tag{1}$$

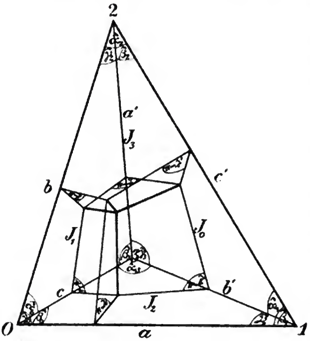
wo unter φ irgend eine rationale Zahl zu verstehen ist. Es ist also

$$\sin \hat{\varphi} = \frac{2\varphi}{\varphi^2 + 1}, \quad \cos \hat{\varphi} = \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2 + 1}, \quad \frac{1 + \cos \hat{\varphi}}{\sin \hat{\varphi}} = \frac{\sin \hat{\varphi}}{1 - \cos \hat{\varphi}} = \varphi. \tag{2}$$

Für das Tetraeder möge folgende Bezeichnung gelten (s. Figur): Die vier Ecken seien 0, 1, 2, 3; die Kanten 01, 02, 03 seien mit a, b, c, die gegenüberliegenden 23, 31, 12 mit a', b', c' bezeichnet, die Supple-

1) Vgl. die erwähnten Abhandlungen von Hoppe und Bessell, ferner Güntsche: Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie, diese Berichte 5, 28 und 29, 1906.

mente der an diesen Kanten liegenden Flächenwinkel mit $\hat{\mathfrak{a}}$, $\hat{\mathfrak{b}}$, $\hat{\mathfrak{c}}$, $\hat{\mathfrak{a}}'$, $\hat{\mathfrak{b}}'$, $\hat{\mathfrak{c}}'$, die in jedem Begrenzungsdreieck den Kanten a und a', b und b', c und c' gegenüberliegenden Kantenwinkel mit $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, unter Hinzufügung des Index 0, 1, 2, 3 zur Bezeichnung der Ecke, der sie angehören, die Inhalte der Begrenzungsdreiecke, die den Ecken 0, 1, 2, 3 gegenüberliegen, seien J_0, J_1, J_2, J_3 und der Rauminhalt des Tetraeders T.



5. Da in einem rationalen Tetraeder die Seiten heronische Dreiecke sind, so sind die Sinus und Kosinus sämtlicher zwölf Kantenwinkel der vier Ecken rational; nach dem ersten sphärischen Kosinussatz, z. B. für die Ecke 0:

(3) $\cos\hat{\alpha}_0 = \cos\hat{\beta}_0\cos\hat{\gamma}_0 - \sin\hat{\beta}_0\sin\hat{\gamma}_0\cos\hat{\mathfrak{a}}$,

gilt mithin dasselbe von den Kosinus der sechs Flächenwinkel, und aus der Formel

$$T = \tfrac{1}{6}abc\Delta_0, \tag{4}$$

wo der v. Staudtsche Eckensinus der Ecke 0

$$\Delta_0 = \sin\hat{\beta}_0\sin\hat{\gamma}_0\sin\hat{\mathfrak{a}} = \sin\hat{\gamma}_0\sin\hat{\alpha}_0\sin\hat{\mathfrak{b}} = \sin\hat{\alpha}_0\sin\hat{\beta}_0\sin\hat{\mathfrak{c}} \tag{5}$$

ist, und den entsprechenden Formeln der übrigen Ecken ergibt sich schließlich, daß auch die Sinus der sechs Flächenwinkel rational sind — kurz: *in einem rationalen Tetraeder haben sämtliche Kanten- und Flächenwinkel der vier Ecken rationale goniometrische Funktionen.*

6. Man hat also, um rationale Tetraeder herstellen zu können, zunächst Dreikante aufzusuchen, bei welchen die goniometrischen Funktionen der Kanten- und Flächenwinkel rational sind. Dies gelingt, wenn man die Formeln der sphärischen Trigonometrie durch Einführung der Kotangente des halben Winkels umformt.[1]) Es soll dies hier für einige Formeln geschehen; es mögen dabei $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ die Kantenwinkel, $\hat{\mathfrak{a}}$, $\hat{\mathfrak{b}}$, $\hat{\mathfrak{c}}$ die Supplemente[2]) der gegenüberliegenden Flächenwinkel eines Dreikantes bedeuten, und mit α, β, γ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Kotangenten der Hälften der Kantenwinkel und der

1) Die hierher gehörigen Formeln finden sich zum Teil bei Hoppe und Bessell a. a. O., ferner in E. Study: Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen, Leipzig 1893, § 4—6; sie bieten, wie die letztere Arbeit zeigt, ein über den vorliegenden Zweck hinausgehendes Interesse. Vgl. hierzu auch eine demnächst im Archiv erscheinende Notiz des Verf.

2) Durch Einführung der Supplemente der Flächenwinkel anstelle dieser selbst erhalten die Formeln erst die wünschenswerte Symmetrie und Übersichtlichkeit, vgl. hierzu Study a. a. O. § 1, insbesondere S. 92, Fußnote.

Flächenwinkelsupplemente bezeichnet werden. Aus den Neperschen Analogien entstehen folgende Formeln

$$(6^a)\qquad \alpha(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\beta-\gamma)+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})(\beta\gamma+1)=0,$$

$$(6^b)\qquad \alpha(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-1)(\beta+\gamma)+(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+1)(\beta\gamma-1)=0,$$

$$(6^c)\qquad \mathfrak{a}(\beta+\gamma)(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})+(\beta-\gamma)(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+1)=0,$$

$$(6^d)\qquad \mathfrak{a}(\beta\gamma-1)(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})+(\beta\gamma+1)(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-1)=0.$$

Aus den analogen Formeln, welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, α, β enthalten, folgt

$$(7)\qquad \alpha=\beta\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}-\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1}{-\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1},$$

$$(8)\qquad \alpha=\frac{1}{\beta}\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}-\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1}{\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}-1},$$

oder, wenn man

$$(9)\qquad 2\mathfrak{t}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1$$

einführt,

$$(10)\qquad \alpha=\beta\frac{\mathfrak{t}-\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\mathfrak{t}-\mathfrak{b}\mathfrak{c}},$$

$$(11)\qquad \alpha=\frac{1}{\beta}\frac{\mathfrak{t}-\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{t}-1}.$$

Hiernach ist

$$(12)\qquad \alpha^2=\frac{(\mathfrak{t}-\mathfrak{c}\mathfrak{a})(\mathfrak{t}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})}{(\mathfrak{t}-\mathfrak{b}\mathfrak{c})(\mathfrak{t}-1)},$$

also

$$(13)\qquad \alpha^2=\frac{(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}-\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1)}{(-\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}+1)(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}-1)};$$

hieraus folgt

$$(14)\qquad \mathfrak{a}^2=\frac{\alpha^2(\mathfrak{b}\mathfrak{c}-1)^2+(\mathfrak{b}\mathfrak{c}+1)^2}{\alpha^2(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})^2+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c})^2}.$$

Aus (6^a) und (6^b) ergibt sich ferner durch Elimination von α nach einer einfachen Umrechnung

$$(15)\qquad \frac{\dfrac{\mathfrak{a}^2+1}{\mathfrak{a}}}{\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}}=\frac{\dfrac{\mathfrak{b}^2+1}{\mathfrak{b}}}{\dfrac{\beta^2+1}{\beta}}=\frac{\dfrac{\mathfrak{c}^2+1}{\mathfrak{c}}}{\dfrac{\gamma^2+1}{\gamma}}=\mu;$$

μ bedeutet hierbei den „Modul" des Dreikants. Die Formeln (12)—(14) hätte man auch aus dem sphärischen Kosinussatz, (15) aus dem Sinussatz erhalten können. Buchstäblich analoge Formeln erhält man durch polare Transformation. Auf die Wiedergabe dieser, sowie der durch zyklische Transformation und Transformation auf die Nachbardreiecke zu erhaltenden Formeln möge hier verzichtet werden.

7. Unser Hilfsproblem, Dreikante zu finden, für welche die goniometrischen Funktionen der Kanten- und Flächenwinkel rational sind, kommt, wie man aus den angeführten Gleichungen erkennt, darauf hinaus, eine diophantische Gleichung, in welcher die vier Unbekannten bis zum zweiten Grade aufsteigen, rational zu lösen. Es liegt also eine Aufgabe vor, die

bei verwandten Problemen häufig auftritt, und auf welche das Eulersche Verfahren angewandt werden kann, auf das wir weiter unten (Art. **11**) zurückkommen. Diese Aufgabe ist noch nicht umfassend gelöst. Wohl aber hat, wie erwähnt, F. Bessell in der genannten Abhandlung partikuläre Lösungen der Aufgabe gegeben, welche willkürliche Parameter enthalten. Der einfachste von ihm angegebene Typus ist (nach einer kleinen Umgestaltung) der folgende, der den Modul *Eins* besitzt und ohne weiteres aus den Neperschen Analogien entnommen werden kann:

$$(16)\qquad \left.\begin{matrix}\mathfrak{a}\\ \alpha\end{matrix}\right\}=m,\quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{b}\\ \beta\end{matrix}\right\}=n,\quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{c}\\ \gamma\end{matrix}\right\}=-\frac{mn+1}{m+n}.$$

Hierin bedeuten m und n beliebige rationale Zahlen. Von diesem Typus werden wir im folgenden Gebrauch machen.

8. Vorerst ist auf die Umkehrung des oben im Art. **5** angegebenen Satzes einzugehen. Ein Tetraeder ist rational, wenn die Kanten- und Flächenwinkel rationale Sinus und Kosinus haben[1]), und zwar genügt hierzu noch nicht die Rationalität dieser Funktionen an zwei Ecken (und damit für je einen Kanten- und zwei Flächenwinkel der beiden anderen Ecken), sondern dazu ist notwendig und hinreichend, daß noch ein Kanten- oder Flächenwinkel einer der beiden anderen Ecken, etwa der diesen gemeinsame Flächenwinkel, rationale goniometrische Funktionen besitzt, wie aus den unter (6^a)—(6^d) angegebenen umgeformten Neperschen Analogien folgt.

9. Um nun rationale Tetraeder zu bilden, legen wir den oben unter (16) angeführten Typus eines Dreikantes, dessen Kanten- und Flächenwinkel rationale goniometrische Funktionen haben, für die Ecken 0 und 1 zugrunde. Für die Ecke 0 soll sein:

$$(17)\qquad \begin{cases}\mathfrak{a}=p, & \mathfrak{b}=-\dfrac{pq+1}{p+q}, & \mathfrak{c}=q,\\[2mm] \alpha_0=p, & \beta_0=-\dfrac{pq+1}{p+q}, & \gamma_0=q;\end{cases}$$

für die Ecke 1 soll sein:

$$(18)\qquad \begin{cases}\mathfrak{a}\ =p, & \mathfrak{b}'=r, & \mathfrak{c}'=-\dfrac{pr+1}{p+r},\\[2mm] \alpha_1=p, & \beta_1=r, & \gamma_1=-\dfrac{pr+1}{p+r}.\end{cases}$$

Hierbei sollen p, q und r rationale Zahlen bedeuten, die vorläufig noch wahlfrei bleiben mögen.

Nunmehr sind die Ecken 2 und 3 auch bestimmt. An der Ecke 2 ist

$$(19)\qquad \alpha_2=\frac{\beta_1+\gamma_0}{\beta_1\gamma_0-1}=\frac{q+r}{qr-1},$$

ferner nach der Formel (14)

$$(20)\qquad \mathfrak{a}'^2=\frac{[\alpha_2(\mathfrak{b}\mathfrak{c}'-1)]^2+(\mathfrak{b}\mathfrak{c}'+1)^2}{[\alpha_2(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}')]^2+(\mathfrak{b}-\mathfrak{c}')^2}.$$

Führt man die obigen Ausdrücke für $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}'$ und α_2 ein, so wird (20) zu:

$$(21)\qquad \mathfrak{a}'^2=\frac{\dfrac{1}{[(p+q)(p+r)]^2}\cdot A}{\dfrac{1}{[(qr-1)(p+q)(p+r)]^2}\cdot B};$$

1) Hoppe a. a. O. S. 86.

hierin ist

$$(22)\quad A=\{r(p^2-1)+q(p^2-1)\}^2+\{r[q(p^2+1)+2p]+[q\cdot 2p+(p^2+1)]\}^2,$$

$$(23)\quad \begin{aligned}B=\{&r^2(q\cdot 2p+p^2+1)+r[q^2\cdot 2p+q\cdot 2(p^2+1)+2p]+[q^2(p^2+1)\\&+q\cdot 2p]\}^2+\{(p^2-1)[r^2q-r(q^2+1)+q]\}^2,\end{aligned}$$

folglich

$$(24)\quad \begin{aligned}A=(p^2+1)\{&r^2[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)]+2r[q^2\cdot 2p+q\cdot 2(p^2+1)\\&+2p]+[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)]\}\end{aligned}$$

$$(25)\quad B=\begin{cases} r^4(p^2+1)[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)]\\ +r^3\cdot 2\cdot[-q^3(p^4-6p^2+1)+q^2\cdot 6p(p^2+1)+q(p^4+10p^2+1)+2p(p^2+1)]\\ +r^2\cdot(p^2+1)[q^4(p^2+1)+q^3\cdot 12p+q^2\cdot 10(p^2+1)+q\cdot 12p+(p^2+1)]\\ +r\cdot 2\cdot[q^4\cdot 2p(p^2+1)+q^3(p^4+10p^2+1)+q^2\cdot 6p(p^2+1)-q(p^4-6p^2+1)]\\ +(p^2+1)[q^4(p^2+1)+q^3\cdot 4p+q^2(p^2+1)].\end{cases}$$

Eine Lösung der Aufgabe ist gefunden, wenn es gelingt, durch passende Wahl von rationalen Werten für p, q, r und α' die Gleichungen (21), (22) und (23), oder (21), (24) und (25) zu erfüllen. — Statt dessen soll, was auf dasselbe hinauskommt, der Ausdruck $C^2 = A\cdot B$ zu dem Quadrat einer rationalen Zahl gemacht werden.

10. Es sei

$$(26)\quad C^2=A\cdot B=r^6\cdot c_6+r^5c_5+r^4c_4+r^3c_3+r^2c_2+rc_1+c_0,\quad \text{wo}$$

$$(27)\quad \begin{cases} c_6=\{(p^2+1)[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)]\}^2,\\ c_5=2(p^2+1)[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)][q^3(-p^4+6p^2-1)\\ \qquad +q^2(8p^3+8p)+q(3p^4+14p^2+3)+(4p^3+4p)],\\ c_4=(p^2+1)[q^6(p^6+3p^4+3p^2+1)+q^5(8p^5+80p^3+8p)\\ \qquad +q^4(4p^6+172p^4+172p^2+4)+q^3(120p^5+368p^3+120p)\\ \qquad +q^2(21p^6+255p^4+255p^2+21)+q(48p^5+160p^3+48p)\\ \qquad +(2p^6+22p^4+22p^2+2)],\\ c_3=(p^2+1)[q^6(8p^5+16p^3+8p)+q^5(4p^6+108p^4+108p^2+4)\\ \qquad +q^4(120p^5+368p^3+120p)+q^3(40p^6+376p^4+376p^2+40)\\ \qquad +q^2(120p^5+368p^3+120p)+q(4p^6+108p^4+108p^2+4)\\ \qquad +(8p^5+16p^3+8p)],\\ c_2=(p^2+1)[q^6(2p^6+22p^4+22p^2+2)+q^5(48p^5+160p^3+48p)\\ \qquad +q^4(21p^6+255p^4+255p^2+21)+q^3(120p^5+368p^3+120p)\\ \qquad +q^2(4p^6+172p^4+172p^2+4)+q(8p^5+80p^3+8p)\\ \qquad +(p^6+3p^4+3p^2+1)],\\ c_1=2(p^2+1)q[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)][q^3(4p^3+4p)\\ \qquad +q^2(3p^4+14p^2+3)+q(8p^3+8p)+(-p^4+6p^2-1)],\\ c_0=\{(p^2+1)q[q^2(p^2+1)+q\cdot 4p+(p^2+1)]\}^2.\end{cases}$$

Es ist also ein Ausdruck, der in q und r vom sechsten, in p vom achten Grade ist, zu einem Quadrat zu machen, daher ist die Aussicht, auf diesem Wege zum Ziel zu gelangen, anscheinend gering. Bei der besonderen Natur unseres Ausdrucks gelingt es jedoch, die Aufgabe unter bestimmten Annahmen auf die einfachere zurückzuführen, eine ganze rationale Funktion vierten Grades zu einem Quadrat zu machen. Wir setzen:

$$C^2 = D^2 + r^2 \cdot F, \tag{28}$$ wobei

$$D = r^3 d_3' + r^2 d_2' + r d_1' + d_0', \tag{29}$$

$$F = r^2 f_2 + r f_1 + f_0, \tag{30}$$ und

$$(31)\begin{cases} d_3' = (p^2+1)[q^2(p^2+1) + q\cdot 4p + (p^2+1)], \\ d_2' = q^3(-p^4+6p^2-1) + q^2(8p^3+8p) + q(3p^4+14p^2+3) + (4p^3+4p), \\ d_1' = q^3(-4p^3-4p) + q^2(-3p^4-14p^2-3) + q(-8p^3-8p) \\ \qquad + (p^4-6p^2+1), \\ d_0' = -(p^2+1)q[q^2(p^2+1) + q\cdot 4p + (p^2+1)] \end{cases}$$

sein möge. Es ergibt sich

$$D^2 = r^6 d_6 + r^5 d_5 + r^4 d_4 + r^3 d_3 + r^2 d_2 + r d_1 + d_0, \tag{32}$$

$$(33)\begin{cases} d_6 = d_3'^2 = c_6, \\ d_5 = 2 d_3' d_2' = c_5, \\ d_4 = d_2'^2 + 2 d_3' d_1' \\ \quad = q^6(p^8-12p^6+38p^4-12p^2+1) + q^5(-24p^7+56p^5+56p^3-24p) \\ \qquad + q^4(-12p^8+152p^4-12) + q^3(-8p^7+104p^5+104p^3-8p) \\ \qquad + q^2(5p^8+36p^6+126p^4+36p^2+5) + q(16p^7+48p^5+48p^3+16p) \\ \qquad + (2p^8+8p^6+12p^4+8p^2+2), \\ d_3 = 2(d_3' d_0' + d_2' d_1') \\ \quad = 2\cdot[q^6(4p^7-20p^5-20p^3+4p) + q^5(2p^8-40p^6-148p^4-40p^2+2) \\ \qquad + q^4(-36p^7-268p^5-268p^3-36p) \\ \qquad + q^3(-12p^8-176p^6-456p^4-176p^2-12) \\ \qquad + q^2(-36p^7-268p^5-268p^3-36p) \\ \qquad + q(2p^8-40p^6-148p^4-40p^2+2) + (4p^7-20p^5-20p^3+4p)], \\ d_2 = d_1'^2 + 2 d_2' d_0' \\ \quad = q^6(2p^8+8p^6+12p^4+8p^2+2) + q^5(16p^7+48p^5+48p^3+16p) \\ \qquad + q^4(5p^8+36p^6+126p^4+36p^2+5) + q^3(-8p^7+104p^5+104p^3-8p) \\ \qquad + q^2(-12p^8+152p^4-12) + q(-24p^7+56p^5+56p^3-24p) \\ \qquad + (p^8-12p^6+38p^4-12p^2+1), \\ d_1 = 2 d_1' d_0' = c_1, \\ d_0 = d_0'^2 = c_0. \end{cases}$$

Die Ausdrücke für f_2, f_1, f_0 in (30) erhalten wir aus (28), (26), (27), (32), (33); es ist

$$(34)\begin{cases} f_2 = 16[q^6(p^6-2p^4+p^2)+q^5(2p^7+2p^5+2p^3+2p) \\ \quad +q^4(p^8+11p^6+12p^4+11p^2+1)+q^3(8p^7+24p^5+24p^3+8p) \\ \quad +q^2(p^8+15p^6+24p^4+15p^2+1)+q(2p^7+10p^5+10p^3+2p) \\ \quad +(p^6+2p^4+p^2)], \\ f_1 = 16[q^6(4p^5+4p^3)+q^5(12p^6+32p^4+12p^2) \\ \quad +q^4(12p^7+64p^5+64p^3+12p)+q^3(4p^8+48p^6+104p^4+48p^2+4) \\ \quad +q^2(12p^7+64p^5+64p^3+12p)+q(12p^6+32p^4+12p^2) \\ \quad +(4p^5+4p^3)], \\ f_0 = 16[q^6(p^6+2p^4+p^2)+q^5(2p^7+10p^5+10p^3+2p) \\ \quad +q^4(p^8+15p^6+24p^4+15p^2+16)+q^3(8p^7+24p^5+24p^3+8p) \\ \quad +q^2(p^8+11p^6+12p^4+11p^2+1)+q(2p^7+2p^5+2p^3+2p) \\ \quad +(p^6-2p^4+p^2)]. \end{cases}$$

Durch geeignete Absonderung gewinnen sie eine einfachere Gestalt; wir können setzen:

$$(35)\qquad F = 16(q+p)^2(qp+1)^2\cdot G,$$

wo

$$(36)\qquad G = r^2 g_2 + r g_1 + g_0,$$

$$(37)\qquad \begin{cases} g_2 = q^2(p^4-2p^2+1)+q(4p^3+4p)+(p^4+2p^2+1), \\ g_1 = q^2(4p^3+4p)+q(4p^4+16p^2+4)+(4p^3+4p), \\ g_0 = q^2(p^4+2p^2+1)+q(4p^3+4p)+(p^4-2p^2+1). \end{cases}$$

Man kann G auch nach fallenden Potenzen von q statt von r ordnen und schreiben:

$$(38)\qquad H = q^2 h_2 + q h_1 + h_0,$$

$$(39)\qquad \begin{cases} h_2 = r^2(p^4-2p^2+1)+r(4p^3+4p)+(p^4+2p^2+1), \\ h_1 = r^2(4p^3+4p)+r(4p^4+16p^2+4)+(4p^3+4p), \\ h_0 = r^2(p^4+2p^2+1)+r(4p^3+4p)+(p^4-2p^2+1), \end{cases}$$

wobei man erkennt, daß $G = H$ inbezug auf q und r symmetrisch ist.

Um C aus (28) rational zu erhalten, reicht es hin, die Gleichung $F = 0$ zu erfüllen; unsere Aufgabe ist also jetzt, die Gleichung

$$(40)\qquad G = H = 0$$

durch geeignete Wahl rationaler Werte für p, q, r zu lösen.

11. Hierzu dient uns ein Verfahren, ähnlich dem, das von Euler[1]), Kummer[2]), Schwering[3]) u. a. oft bei verwandten Aufgaben angewandt

1) s. z. B. Comm. Arithm. coll. **2**, p. 474.
2) J. f. Math. **37**, S. 1 ff. 1848.
3) vgl. insbesondere die angeführte Programmabhandlung.

worden ist.[1]) Die Gleichung (40) ist in q quadratisch; falls also bei einem bestimmten, in p rational ausgedrückten Werte r, $r = r^{(0)}$, eine rationale Wurzel für q, $q = q^{(0)}$, bekannt ist, ist die andere, $q = q'$, linear, also rational bestimmt. Aber die Gleichung (40) ist, wie erwähnt, auch in r quadratisch; falls wir nun bei einem bestimmten, in p rational ausgedrückten q, $q = q'$, eine Wurzel für r, $r = r^{(0)}$ kennen, ist die andere, $r = r'$, rational zu erhalten. Mit dieser kann man nun in der vorhin beschriebenen Weise einen neuen Wert für q, $q = q''$, auffinden, der $r = r'$ zugehört, mit diesem wieder einen neuen für r, $r = r''$, der $q = q''$ entspricht. In dieser Weise kann man beliebig weit fortschreiten. *Durch dies Verfahren, das wir kurz als Eulersches Verfahren bezeichnen wollen, gelingt es, unsere Aufgabe dadurch zu lösen, daß wir Wertegruppen für p, q, r in beliebiger Zahl aufstellen, bei denen ein Parameter, nämlich p, wahlfrei bleibt, von denen also jede immer noch einen gewissen Grad von Allgemeinheit besitzt.* Hierzu ist nur erforderlich, daß wir wenigstens *ein* rationales Wertepaar für q und r kennen, das die Gleichung (40) erfüllt. Hier kommen uns die ausgearteten Tetraeder zustatten. Es möge im folgenden ein Fall durchgeführt werden.

12. Eine Lösung kann erhalten werden, wenn wir in (40) für r

$$r^{(0)} = -q \tag{41}$$

einführen; die Ecke 2 rückt dann ins Unendliche. An die Stelle von (40) tritt dann die Gleichung

$$q^4(p^4 - 2p^2 + 1) + q^2(-2p^4 - 12p^2 - 2) + (p^4 - 2p^2 + 1) = 0, \tag{42}$$

die folgende vier rationalen Lösungen besitzt[2]):

$$q = \begin{cases} \pm\dfrac{p+1}{p-1}, \\ \pm\dfrac{p-1}{p+1}. \end{cases} \tag{43}$$

Diese vier Lösungen gehen aber ineinander über, wenn man p durch $-p$, $\frac{1}{p}$ oder $-\frac{1}{p}$ ersetzt; es genügt also, eine von ihnen zu behandeln. Wir wählen:

$$q' = +\frac{p+1}{p-1}; \tag{44}$$

dann wird, da die eine Wurzel von $G = 0$

$$r^{(0)} = -q' = -\frac{p+1}{p-1} \tag{45}$$

ist, die andere Wurzel $r = r'$ aus

$$r^{(0)} + r' = -\frac{g_1'}{g_2'} \text{ oder aus } r^{(0)}r' = \frac{g_0'}{g_2'} \tag{46}$$

erhalten, wo g_2', g_1', g_0' aus g_2, g_1, g_0 durch Einführung von q' für q entstehen; das ergibt:

$$r' = -\frac{p^5 + p^4 + \cdot + 4p^2 - 3p + 1}{p^5 + 3p^4 + 4p^3 + \cdot + p - 1}. \tag{47}$$

---

1) vgl. auch Güntsche: Heronische Dreiecke mit einer rationalen Mittellinie, diese Berichte 5, 27—38, 1906.

2) Der Fall $p = \pm 1$ bedarf einer besonderen Behandlung.

Führt man in (38) (39) und (40) r' für r ein, so wird h_2, h_1, h_0 zu h'_2, h'_1, h'_0, und eine neue Wurzel q'' für q ergibt sich aus

$$(48) \qquad q' + q'' = -\frac{h'_1}{h'_2}, \text{ oder aus } q'q'' = \frac{h'_0}{h'_2}.$$

Man findet:

$$(49)\ q'' = \frac{p^{13}+p^{12}+\ast-4p^{10}-25p^9-21p^8-8p^7+\ast+3p^5+11p^4-8p^3+4p^2-3p+1}{p^{13}+3p^{12}+4p^{11}+8p^{10}+11p^9-3p^8+\ast+8p^6-21p^5+25p^4-4p^3+\ast+p-1}.$$

Die Gleichungen $q = q'$ (44) und $r = r'$ (47) stellen eine partikuläre allgemeine Lösung unserer Aufgabe dar, eine zweite die Gleichungen $q = q''$ (49) und $r = r'$ (47); beliebig viele neue lassen sich in der soeben dargelegten Weise ermitteln.

13. In diesen Gleichungen werden q und r durch den Parameter p rational ausgedrückt; die Kotangenten der halben Kanten- und Flächenwinkel der Ecken 0 und 1 finden sich aus (17) und (18); aus (19) und (20) folgt dann, daß auch an der Ecke 2 vier Kanten- oder Flächenwinkel rationale goniometrische Funktionen haben; die übrigen beiden ergeben sich aus den oben in Art. **6** angeführten Formeln, etwa aus den folgenden, die man aus den Gleichungen (9)—(11) erhält:

$$(50) \qquad 2\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}' + \mathfrak{c}'\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}'\mathfrak{b} + 1,$$

$$(51) \qquad \beta_2 = \alpha_2 \frac{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{b}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}}{\mathfrak{t}_2 - 1},$$

$$(52) \qquad \gamma_2 = \alpha_2 \frac{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{b}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}} = \frac{1}{\alpha_2}\frac{\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{c}'\mathfrak{a}'}{\mathfrak{t}_2 - 1}.$$

Wie die Ecke 2 könnte man — etwa zur Kontrolle — die Ecke 3 behandeln. Aus den Funktionen der einem Begrenzungsdreieck angehörigen Kantenwinkel $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ ergeben sich die Seiten a, b, c des Dreiecks nach bekannten Formeln: ist der Inkreisradius des Dreiecks ϱ, der halbe Umfang s, der Inhalt J, so ist

$$(53)\ \alpha = \frac{s-a}{\varrho}, \quad \beta = \frac{s-b}{\varrho}, \quad \gamma = \frac{s-c}{\varrho}, \quad \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

mithin

$$(54)\ a = \varrho(\beta+\gamma),\ b = \varrho(\gamma+\alpha),\ c = \varrho(\alpha+\beta),\ J = \varrho^2\alpha\beta\gamma = \varrho^2(\alpha+\beta+\gamma),$$

woraus man a, b, c und J, vorläufig noch mit einem Proportionalitätsfaktor, erhält; durch geeignete Wahl dieser Faktoren kann man die gemeinsamen Seiten dieser Dreiecke in Übereinstimmung bringen. Nachdem man so die Kanten des Tetraeders berechnet hat, erhält man den Rauminhalt T etwa aus den Gleichungen (4) und (5).

14. Auf diese Weise ergibt sich aus

$$(44) \qquad q = q' = \frac{p+1}{p-1}$$

$$(47) \qquad r = r' = -\frac{p^5+p^4+4p^2-3p+1}{p^5+3p^4+4p^3+p-1}$$

nach Beseitigung von Nennern und negativen Vorzeichen der folgende

Typus I eines rationalen Tetraeders:

$$a = 4p(p+1)(p-1)(p^2+1)(p^2+2p-1)(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1) \times$$
$$\times (p^4+2p^3-2p+1),$$
$$b=(p+1)(p-1)(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^5+p^4+4p^2-3p+1) \times$$
$$\times (p^5+3p^4+4p^3+p-1),$$
$$c= (p^2+1)(p^2+2p-1)(p^4-4p^2+1)(p^4+2p^3+2p^2-2p+1) \times$$
$$\times (p^6+2p^5+3p^4-3p^2+2p-1),$$
$$a'=2p(p^4+2p^3-2p+1)(p^{12}+4p^{11}+6p^{10}+4p^9+3p^8+16p^7+12p^6-16p^5+3p^4-4p^3+6p^2-4p+1),$$
$$b'=(p^2+1)(p^2+2p-1)^2(p^4+1)(p^8+2p^7+2p^6+6p^5+2p^4-6p^3+2p^2-2p+1),$$
$$c'=(p+1)^2(p-1)^2(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^4+4p^2-4p+1)(p^4+4p^3+4p^2+1),$$
$$J_0=p(p+1)^2(p-1)^2(p^2+2p-1)^2(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^4+1)(p^4+4p^2-4p+1) \times$$
$$\times (p^4+4p^3+4p^2+1)(p^8+2p^7+2p^6+6p^5+2p^4-6p^3+2p^2-2p+1),$$
$$J_1=p(p+1)(p-1)(p^2+2p-1)(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^4-4p^2+1)(p^4+2p^3+2p^2-2p+1) \times$$
$$\times (p^5+p^4+4p^2-3p+1)(p^5+3p^4+4p^3+p-1)(p^6+2p^5+3p^4-3p^2+2p-1),$$
$$J_2=2p(p+1)(p-1)(p^2+1)^3(p^2+2p-1)^3(p^3+p^2+p-1)(p^3+p^2-p+1)(p^4-4p^2+1) \times$$
$$\times (p^4+2p^3-2p+1)(p^6+2p^5+3p^4-3p^2+2p-1),$$
$$J_3=2p(p+1)^3(p-1)^3(p^2+2p-1)(p^3+p^2+p-1)^2(p^3+p^2-p+1)^2(p^4+2p^3-2p+1) \times$$
$$\times (p^5+p^4+4p^2-3p+1)(p^5+3p^4+4p^3+p-1),$$
$$T=\tfrac{4}{3}p^3(p+1)^3(p-1)^3(p^2+1)(p^2+2p-1)^3(p^3+p^2+p-1)^2(p^3+p^2-p+1)^2(p^4+2p^3-2p+1) \times$$
$$\times (p^4-4p^2+1)(p^5+p^4+4p^2-3p+1)(p^5+3p^4+4p^3+p-1)(p^6+2p^5+3p^4-3p^2+2p-1).$$

Hierbei bedeutet p eine beliebige rationale Zahl.

Es mögen einige Beispiele folgen, die man für besondere Zahlenwerte von p erhält.

Beispiele zum Typus I eines rationalen Tetraeders.

1) $p = \frac{1}{2}$

$a = 4200$ $\quad b = 2793$ $\quad c = 2015$

$a' = 2260$ $\quad b' = 2465$ $\quad c' = 2583$

$J_0 = 2\,546\,838$ $\quad J_1 = 2\,251\,158$

$J_2 = 1\,627\,500$ $\quad J_3 = 3\,519\,180$

$T = 727\,297\,200;$

2) $p = 2$

$a = 3\,483\,480$ $\quad b = 2\,860\,143$ $\quad c = 216\,265$

$a' = 2\,735\,860$ $\quad b' = 3\,419\,465$ $\quad c' = 2\,091\,375$

$J_0 = 2\,860\,553\,445\,750$ $\quad J_1 = 247\,419\,530\,358$

$J_2 = 356\,316\,460\,500$ $\quad J_3 = 2\,988\,975\,281\,292$

$T = 163\,058\,564\,845\,416\,240;$

3)[1] $p = \frac{1}{3}$ $a = 157\,080$ $b = 250\,096$ $c = 168\,935$
$a' = 153\,255$ $b' = 64\,985$ $c' = 200\,200$

$J_0 = 3\,902\,999\,100$ $J_1 = 12\,674\,990\,328$
$J_2 = 5\,103\,136\,500$ $J_3 = 15\,714\,031\,872$

$T = 204\,203\,844\,176\,640;$

4) $p = 3$ $a = 17\,635\,800$ $b = 16\,940\,704$ $c = 10\,692\,815$
$a' = 10\,559\,055$ $b' = 17\,407\,985$ $c' = 15\,475\,576$

$J_0 = 80\,819\,578\,462\,308$ $J_1 = 54\,343\,144\,152\,528$
$J_2 = 89\,191\,515\,367\,500$ $J_3 = 119\,505\,147\,041\,280$

$T = 241\,754\,729\,784\,362\,995\,200;$

5) $p = \frac{2}{3}$ $a = 128\,888\,760$ $b = 164\,328\,065$ $c = 19\,113\,913$
$a' = 157\,964\,988$ $b' = 119\,438\,137$ $c' = 67\,189\,375$

$J_0 = 3\,703\,834\,050\,551\,250$ $J_1 = 1\,449\,670\,309\,785\,390$
$J_2 = 1\,028\,370\,356\,073\,060$ $J_3 = 4\,073\,084\,717\,509\,500$

$T = 19\,998\,829\,670\,632\,774\,962\,000.$

15. Ein zweiter Typus eines rationalen Tetraeders ergibt sich, wenn man $q = q''$ aus (49) und $r = r'$ aus (47) entnimmt; die allgemeinen, wie die numerischen Ausdrücke werden in diesem Falle so umfangreich (für $p = \frac{1}{2}$ erhält man $q = \frac{691}{423}$ und $r = -\frac{19}{7}$, also $\mathfrak{a}' = \frac{51\,777\,620}{32\,367\,449}$), daß auf eine Durchrechnung verzichtet werden mag. Weitere Typen könnte man durch Fortsetzung des oben in Art. **11** und **12** auseinandergesetzten Eulerschen Verfahrens in unbegrenzter Zahl aufstellen.

16. Erheblich einfacher gestaltet sich die Parameterdarstellung rationaler Tetraeder, wenn dieselben eine Symmetrieebene besitzen sollen. Statt dessen suchen wir, was auf dieselbe Bedingungsgleichung führt, eines der beiden Tetraeder auf, in welche ein solches durch die Symmetrieebene zerfällt. Wir legen wieder den unter (16) angeführten Typus für die Ecken 0 und 1 zugrunde.

Für die Ecke 0 soll sein:

$$\mathfrak{a} = \alpha_0 = p, \quad \mathfrak{b} = \beta_0 = -\frac{pq+1}{p+q}, \quad \mathfrak{c} = \gamma_0 = q, \tag{55}$$

für die Ecke 1 soll sein:

$$\mathfrak{a} = \alpha_1 = p, \quad \mathfrak{b}' = \beta_1 = \mathfrak{c}' = \gamma_1 = 1. \tag{56}$$

Es wird dann ganz ähnlich wie oben (Glchgn. (19)—(21))

$$\alpha_2 = \frac{q+1}{q-1}, \tag{57}$$

$$\mathfrak{a}'^2 = \frac{(p+1)^2(q+1)^4+(p-1)^2(q-1)^4}{2(p^2+1)(q+1)^2(q-1)^2}. \tag{58}$$

---

[1] Dies ist das eingangs erwähnte Beispiel, das auf die hier dargelegte Weise gefunden und Archiv a. a. O. 1904 mitgeteilt worden ist.

Hier ist also

(59) $$C^2 = 2(p^2+1)[(p+1)^2(q+1)^4+(p-1)^2(q-1)^4]$$

zu einem vollständigen Quadrat zu machen. Man findet

(60) $$C^2 = 4D^2,$$

wo

(61) $$D^2=q^4(p^2+1)^2+q^3(8p^3+8p)+q^2(6p^4+12p^2+6)+q(8p^3+8p)+(p^2+1)^2.$$

Hierauf läßt sich, da die Koeffizienten der höchsten und niedrigsten Potenzen von q quadratisch sind, das Eulersche Verfahren (oder das ursprüngliche Fermatsche) unmittelbar anwenden. Unter Benutzung des in einem früheren Vortrage[1]) angeführten Lösungsweges setzen wir:

$$P = q\cdot 4p + (p^2+1),$$
$$QR = D^2 - P^2 = q^2[q^2(p^2+1)^2 + q\cdot 8p(p^2+1) + (6p^4-4p^2+6)]$$

und erhalten so die kanonische Gleichung:

(62) $$y^2q^2+y\cdot 2[q\cdot 4p+(p^2+1)]-[q^2(p^2+1)^2+q\cdot 8p(p^2+1)$$
$$+(6p^4-4p^2+6)]=0,$$

(62ª) $$q^2[y^2-(p^2+1)^2]+q[y\cdot 8p-8p(p^2+1)]+[y\cdot 2(p^2+1)$$
$$-(6p^4-4p^2+6)]=0.$$

Diese ist rational zu erfüllen. Geht man von $y = y^{(0)} = -(p^2+1)$ aus, so bekommt man für q

(63) $$q' = -\frac{p^4+1}{2p(p^2+1)}$$

als erste nicht triviale Lösung. Damit kann in der wiederholt auseinandergesetzten Weise ein zweiter Wert für y, y', erhalten werden, der wiederum einen neuen Wert q'' für q liefert. Dies Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden.

17. Unter Benutzung des in Gleichung (63) aufgestellten Wertes $q = q'$ gewinnen wir den folgenden Typus I der verlangten Art.

Typus I eines rationalen Tetraeders, das von zwei pythagoreischen Dreiecken, welche eine Kathete gemeinsam haben, und zwei heronischen Dreiecken begrenzt ist:

$$a = (p+1)(p-1)(p^4+2p^3+2p+1)(p^4-2p^3-2p+1),$$
$$b = (p+1)(p-1)(p^4+2p^3+4p^2+2p+1)(p^4-2p^3+4p^2-2p+1),$$
$$c = (p^2+1)(p^4+2p^3-2p+1)(p^4-2p^3+2p+1),$$
$$a' = 2p(p^8+4p^6-6p^4+4p^2+1),$$
$$b' = 2p(p^4+2p^2-1)(p^4-2p^2-1),$$
$$c' = 4p(p+1)(p-1)(p^2+1)(p^4+1),$$
$$J_0 = 8p^3(p+1)(p-1)(p^4+1)(p^4+2p^2-1)(p^4-2p^2-1),$$
$$J_1 = p(p+1)(p-1)(p^4+2p^3-2p+1)(p^4-2p^3+2p+1)\times$$
$$\times(p^4+2p^3+4p^2+2p+1)(p^4-2p^3+4p^2-2p+1),$$
$$J_2 = \tfrac{1}{2}ab', \quad J_3 = \tfrac{1}{2}ac', \quad T = \tfrac{1}{3}J_0 a.$$

---

1) Diese Berichte, 5, 36 und 37, Artikel 11, 1906.

p ist dabei eine beliebige rationale Zahl. Die letzten drei Formeln ergeben sich daraus, daß die Kante a auf den Kanten b' und c' senkrecht steht.

Beispiele zum vorstehenden Typus:

1) $p = 2$

$$a = 333 \quad b = 2067 \quad c = 725$$
$$a' = 1732 \quad b' = 644 \quad c' = 2040$$
$$J_0 = 525\,504 \quad J_1 = 599\,430$$
$$J_2 = 107\,226 \quad J_3 = 339\,660$$
$$T = 58\,330\,944;$$

2) $p = 3$

$$a = 3124 \quad b = 10\,324 \quad c = 5525$$
$$a' = 6771 \quad b' = 4557 \quad c' = 9840$$
$$J_0 = 13\,452\,264 \quad J_1 = 17\,112\,030$$
$$J_2 = 7\,118\,034 \quad J_3 = 15\,370\,080$$
$$T = 14\,008\,290\,912;$$

3) $p = 3:2$

$$a = 74\,635 \quad b = 168\,725 \quad c = 75\,517$$
$$a' = 156\,108 \quad b' = 11\,508 \quad c' = 151\,320$$
$$J_0 = 803\,718\,720 \quad J_1 = 5\,880\,741\,150$$
$$J_2 = 429\,449\,790 \quad J_3 = 5\,646\,884\,100$$
$$T = 19\,995\,182\,222\,400.$$

18. Weitere Typen könnte man durch Fortsetzung des Eulerschen Verfahrens in unbegrenzter Zahl erhalten, doch werden auch hier die Ausdrücke bald recht umfangreich.

19. Ein besonderer Fall, der ebenfalls eine Parameterdarstellung zuläßt, möge noch erwähnt werden. Wenn man für ein rationales Tetraeder

$$(64) \qquad \alpha_0 = \alpha_1, \quad \beta_0 = \beta_2, \quad \gamma_0 = \gamma_3$$

annimmt, so hat man, wie Hoppe a. a. O. Seite 97 gezeigt hat, die Bedingungsgleichung

$$(65) \qquad k^2 = (\beta^2 - 1)(\gamma^2 - 1)(\beta\gamma + \beta + \gamma - 1)(-\beta\gamma + \beta + \gamma + 1)$$

rational zu lösen. Hoppe tut dies durch Probieren und findet auf diesem Wege acht Zahlenbeispiele. Man kann aber mit Hülfe des Eulerschen Verfahrens rationell vorgehen. Setzt man zunächst etwa

$$(66) \qquad \beta\gamma = \gamma + 1,$$

eliminiert β und wendet auf die neue Form der Bedingungsgleichung das Eulersche Verfahren, von dem Anfangswert $\gamma = -1$ ausgehend, an, so gewinnt man eine unendliche Serie von Werten für γ, zu deren jedem wieder, unter Ausübung desselben Verfahrens an der Gleichung (65), unzählige zugehörige Werte für β gefunden werden können. Statt der Gleichung (66) könnte man u. a. auch

$$(67) \qquad \beta\gamma = -\gamma + 1$$

zugrunde legen. Jedes geeignete Wertepaar für β und γ liefert ein rationales Tetraeder, wenn man

(68) $$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3, \quad \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3, \quad \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3,$$

also die Seiten kongruent annimmt. So erhält man aus (66), von $\gamma = -1$ ausgehend, das zu dem Wertepaare $\beta = \frac{7}{5}$, $\gamma = \frac{5}{2}$ gehörige Hoppesche Beispiel

(69) $$a = a' = 195, \quad b = b' = 203, \quad c = c' = 148.$$

Im Anschluß an (66) gewinnt man hiernach folgende Darstellung eines rationalen Tetraeders, in der J den Inhalt der kongruenten Seiten bedeutet:

Falls

(70) $$q = \sqrt{(2p^2 + p + 1)(2p^2 - p - 1)}$$

rational ist, wird ein rationales Tetraeder erhalten aus

(71) $$\begin{cases} a = a' = p(p^2 + p + 1), \quad b = b' = (p+1)(p^2+1), \quad c = c' = 2p^2 + 2p + 1, \\ J = p^2(p+1)(p^2 + p + 1), \quad T = \frac{1}{3}p(p+1)^2(p^2 + p + 1)q. \end{cases}$$

Zahlenbeispiele hierzu ergeben sich u. a. für $p = \frac{5}{2}$ (Beispiel (69)), ferner für $p = \frac{17}{15}$, nämlich

$$a = a' = 13\,073, \quad b = b' = 16\,448, \quad c = c' = 19\,695,$$
$$J = 106\,675\,680, \quad T = 323\,290\,060\,800,$$

sowie für $p = \frac{6833}{5152}$.

Wie der vorliegende Sonderfall, der eines rationalen Tetraeders mit kongruenten Seiten, auch zu einer Darstellung durch einen willkürlichen Parameter führt, möge bei einer späteren Gelegenheit dargelegt werden.

20. Denkt man sich die Scheitel der den vier Ecken 0, 1, 2, 3 des Tetraeders zugehörigen Polardreikante in den Mittelpunkt einer Berührungskugel, etwa der einbeschriebenen Kugel, verlegt, so erkennt man, daß jede Lösung der vorliegenden Aufgabe zugleich eine Lösung der folgenden darstellt: ein sphärisches vollständiges Viereck zu finden, in welchem die goniometrischen Funktionen aller sechs Seiten und zwölf Winkel rational sind.

Beitrag zur zeichnerischen Behandlung der Kegelschnitte.

Von Gerhard Hessenberg.

1. So durchsichtig und einfach die Theorie der Kegelschnitte an der Hand projektivischer Methoden sich gestaltet, so darf doch die Bedeutung solcher Methoden für die zeichnerisch-praktische Behandlung dieser wichtigen Kurven nur cum grano salis behauptet werden. Dies wird jeder an sich erfahren haben, der beispielsweise eine übersichtliche Figur des Pascalschen Sechsecks zu zeichnen versucht hat: Will man verhindern, daß Schnittpunkte zur Zeichenebene hinausfallen, so muß man auf Kosten der Übersichtlichkeit eine möglichst überschlagene Anordnung des Sechsecks wählen. Läßt man aber unter Beibehaltung einer einmal gewählten Anordnung einen Punkt des Sechsecks den Kegelschnitt der fünf übrigen durchlaufen, so fallen sofort wieder Schnittpunkte aus der Zeichenebene hinaus, und man ist daher, will man eine wirklich geschlossene Figur erhalten, gezwungen, die Anordnung wiederholt zu wechseln.

Die Möglichkeit, durch Wechsel der Anordnung geschlossene Figuren zu erhalten, bietet zwar die von Hauck mit Recht betonte *Modulationsfähigkeit,* aber sie tut des Guten zu viel; denn unter den 60 möglichen Anordnungen des Pascalschen Sechsecks schnell die jeweils günstigste herauszufinden, erfordert eine große Routine und einen geübten geometrischen Blick, namentlich darum, weil die günstigen Anordnungen gerade die überschlagenen sind. (Übrigens zeichnet sich das Brianchonsche Sechseck dadurch vorteilhaft vor dem Pascalschen aus, daß es in der nichtüberschlagenen Form die geschlossenste Figur liefert).

Hierzu kommt, daß theoretisch einfache Konstruktionen in technischer Hinsicht nicht immer einfach sind; unzugängliche oder flache Schnittpunkte sind für die Theorie eine quantité négligeable, für den Zeichner ein lästiger, störender Aufenthalt. Und umgekehrt sind für den Zeichner manche Konstruktionen völlig elementar, die in der Theorie durch Verknüpfung mit Existenzbeweisen zu Prinzipienfragen werden. Hierhin zählt das Lotefällen, Parallelenziehen und vor allem das Ziehen der Tangente an einen Kreis; den klassischen Halbkreis, der den Berührungspunkt ausschneidet, muß der Lehrer in darstellender Geometrie dem frisch von der Schule ankommenden Hörer meist mühsam wieder abgewöhnen. Auch die Sucht, durch möglichstes Zusammenziehen aller einzelnen Schritte an Konstruktionslinien zu sparen, ist ein der Theorie entsprungenes Übel, mit dem besonders in der Graphostatik gründlich aufgeräumt wird.

2. Hierdurch mag es begreiflich erscheinen, daß man in Lehrbüchern der darstellenden Geometrie sehr lange, wenn nicht überhaupt vergeblich nach einer brauchbaren *Konstruktion der Hauptachsen eines durch 5 Punkte gegebenen Kegelschnittes* suchen kann. Im Prinzip ist ja die Aufgabe einfach: durch einen der *fünf* Punkte zieht man zu einer der *sechs* nicht durch ihn laufenden gegebenen Sehnen die Parallele und bestimmt aus einem der *zwölf* möglichen Pascalschen Sechsecke ihren zweiten Schnittpunkt mit dem

Kegelschnitt. Zwei parallele Sehnen ergeben durch Verbindung ihrer Mittelpunkte einen Ort für das Kegelschnittszentrum und ein Paar konjugierter Richtungen d_1, d_1'. Die Wiederholung des Verfahrens gibt daher das Zentrum selbst und ein zweites Paar konjugierter Richtungen, d_2, d_2'.

An einem Hilfskreis findet man nun das zu $d_1\,d_1'$, $d_2\,d_2'$ involutorische Rechtwinkelpaar $a\,a'$, und die Bestimmung der Hauptachsenlängen erfordert danach die Anwendung bekannter Konstruktionen zur Ermittlung der Doppelelemente konjektiver Punktreihen. Die praktische Durchführung des Verfahrens krankt an dem Übelstand zu großer Modulationsfähigkeit. Ferner wird die Figur des Kegelschnitts selbst von Linien bis zur Unübersichtlichkeit überladen, und dabei ist die Bestimmung der Hauptachsen vielfach nur Mittel zum Zweck, d. h. Anfang einer weiteren Reihe von Konstruktionen. Der brauchbarste Gedanke des Verfahrens liegt in der Einführung der Hilfskreise.[1]) Ihn praktisch auszugestalten, ist der Zweck dieser Ausführungen.

3. Zieht man durch einen Punkt S eines Kreises Parallele zu den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks mit den Ecken 1, 2, 3, 4, so schneiden diese den Kreis in sechs Punkten 12, 13, 14, 23, 24, 34. Diese liegen

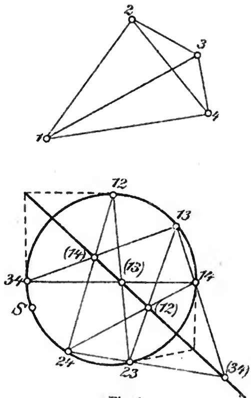


Fig. 1.

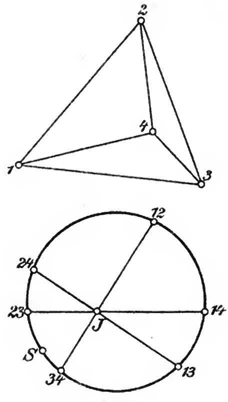


Fig. 2.

involutorisch, es gehen daher die Geraden (12, 34), (13, 24), (14, 23) durch einen Punkt J. (Fig. 2.) Fällt dieser aus der Zeichenebene, so ist sicher seine Polare erreichbar. Auf ihr schneiden sich dann die Geraden (12, 13), (42, 43) usf., ferner die Tangenten in 12 und 34, in 13 und 24, in 14 und 23. (Fig. 1.) Von diesen 9 Punkten der Polare können niemals alle

1) Diese Hilfskreise sind von den graphischen Methoden der Technik in einem Umfang adoptiert worden, der ihre Zweckmäßigkeit außer Zweifel setzt.

unzugänglich sein, und welche zugänglich sind, kann auch der Ungeübteste leicht überschauen.

Fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 bestimmen fünf Vierecke: (I) = (2, 3, 4, 5), (II) = (3, 4, 5, 1) usw., deren Seitenrichtungen, von S aus auf den Hilfskreis übertragen, zehn Punkte und fünf Involutionszentra I bis V nebst den zugehörigen, ebenfalls mit I bis V zu benennenden Polaren ergeben. Diese Zentra liegen auf einer Geraden i, daher schneiden sich ihre Polaren in dem Pol J dieser Geraden. In dem Pascalschen Sechseck 13, 24, 15, 23, 14, 25 sind nämlich III, IV und V die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare. Die Gerade i kann, sofern sie überhaupt zugänglich ist (andernfalls ist ihr Pol J im Innern des Kreises gelegen, also zugänglich), mit großer Genauigkeit gefunden werden, da man günstigenfalls fünf ihrer Punkte und jeden durch drei seiner Geraden bestimmen kann. Trotz der großen Modulationsfähigkeit dieser Konstruktion sind die zugänglichen Elemente leicht zu übersehen. (Siehe Fig. 3, die kleine Hilfsfigur links unten.)

Es ist vielleicht angebracht, bereits an dieser Stelle zu betonen, daß der zweite Schnitt einer Geraden mit einem Kreise aus dem ersten, S, stets scharf zu bestimmen ist. Man hat nur von dem S diametral gegenüberliegenden Punkt S^* das Lot auf die Gerade zu fällen, was durch Verschieben des beim Parallelenziehen ohnehin benutzten Rechtwinkeldreiecks mit einem einzigen Griff erfolgt. Ebenso ist die Verbindungslinie zweier Punkte SQ des Kreises auch dann scharf zu bekommen, wenn SQ dicht beieinander liegen, da sie zu S^*Q senkrecht steht. Das Parallelenziehen selbst ist eine dem geübten Zeichner aus der Graphostatik geläufige Konstruktion.

Die Wahl des *„Übertragungspunktes“* S ist für die Zugänglichkeit von i oder J belanglos, da die Bogenabstände der Punkte 12, 13 usf. von der Wahl von S unabhängig sind.

4. Es sei jetzt 6 ein Punkt des Kegelschnitts (1 2 3 4 5). Dann sind die Büschel 1 (3 4 5 6) und 2 (3 4 5 6) projektiv, am Hilfskreis schneiden sich daher (13, 24), (23, 14); (13, 25), (12, 35); (13, 26), (12, 36) auf einer Geraden. Die Schnittpunkte der erstgenannten Paare sind aber V und IV, diese Gerade ist also i. Daraus folgt:

Sind p, q, r, s vier Punkte eines Kegelschnitts C, und zieht man zu den sechs Seiten des Vierecks $pqrs$ die Parallelen durch einen Punkt S des Hilfskreises K bis zum zweiten Schnitt pq, rs, etc. mit dem Hilfskreis, so schneiden sich die Geraden (pq, rs), (pr, sq), (ps, qr) auf einer, durch den Kegelschnitt, den Hilfskreis und den Übertragungspunkt S eindeutig festgelegten Geraden i.

Wir bezeichnen von nun an mit p' den zweiten Endpunkt des durch den Punkt p auf C gehenden Durchmessers und beschränken uns auf Zentralkegelschnitte. In dem Viereck $pp'qq'$ sind die Seiten pq, $p'q'$ parallel, ebenso $p'q$ und pq'. Ihnen entspricht daher auf K je ein Punkt $pq = p'q'$, $p'q = pq'$. Aus den Geraden (pq, $p'q'$), ($p'q$, pq') werden Tangenten an K, und sie schneiden sich mit (pp', qq') auf i; somit geht ($p'q$, pq) durch J. Nun sind aber die Richtungen $p'q$, pq konjugiert, woraus folgt, daß der Punkt J bereits das Involutionszentrum für die auf K übertragene Durchmesserinvolution von C darstellt. *Verbinden wir daher J mit dem Mittelpunkt O von K* (wenn J unzugänglich, fällen wir von O das Lot

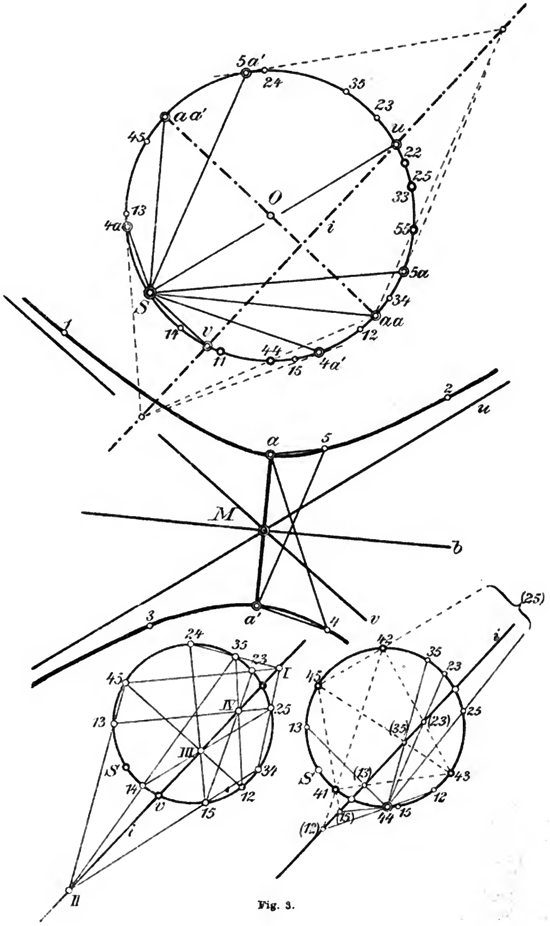

5a'
24
35
23
aa'
u
45
22
25
33
O
13
4a
i
55
5a
S
34
aa
12
14
v
44
4a'
11
15
1
2
u
a
5
M
b
a'
3
4
v
(25)
i
24
35
23
I
45
IV
25
13
III
S
34
14
v
15
12
i
II
42
35
23
45
25
13
(35)
(23)
S
(13)
43
41
12
44
15
(15)
(12)

Fig. 3.

auf i), *so geben die Endpunkte aa', bb' dieses Durchmessers, mit S verbunden, die Hauptachsenrichtungen von C an.* Diese lassen sich also aus fünf gegebenen Punkten von C am Hilfskreis K bestimmen, ohne daß in der Figur der fünf Punkte auch nur eine Linie gezogen wird. Ist C eine Hyperbel, so ergeben, wie man sofort sieht, die Schnitte u, v von i mit K die Asymptotenrichtungen von C. Demnach ist der Kegelschnitt C seiner Exzentrizität nach durch K und i völlig bestimmt; es müssen sich alle seine Proportionen am Hilfskreis allein bestimmen lassen.

5a. Sind die Endpunkte pp' eines Durchmessers gegeben, so können wir nach dem letzten Paragraphen die eines beliebigen anderen von bekannter Richtung konstruieren. Wir wählen als solchen aa', eine Hauptachse. Wir ziehen an K (pp', aa') bis zum Schnitt x mit i und von x aus die Tangenten an K. Sie berühren in $ap = a'p'$ und $a'p = ap'$ und geben damit die Richtungen der entsprechenden Sehnen an.

b. Da aa zu aa', pp zu pp' konjugiert ist, läßt sich x auch als Schnitt von (aa, pp) mit i bestimmen. Dies entspricht dem degenerierten Viereck (a, a, p, p) an C, in dem zwei Gegenseiten zu Tangenten aa, pp an C, die vier andern zur Sehne ap geworden sind.

c. Ist i unzugänglich, so bestimmt man die Polare von x, die direkt die gesuchten Berührungspunkte ausschneidet. Sie geht durch J, ferner durch die Schnittpunkte der Tangenten in aa', pp' und in aa, pp; sollten diese Tangentenschnittpunkte unzugänglich sein, so führt das Verfahren für die zweite Achse bb' sicher zum Ziele; die Richtungen ab, ab' werden durch das Lot in J auf (aa', bb') an K ausgeschnitten. Auch ist man niemals auf einen Durchmesser pp' allein angewiesen.

6a. Nun sind uns mit den fünf Punkten 1, 2, 3, 4, 5 zwar noch keine Durchmesser gegeben. Da wir aber zu den Sehnen 12, 13 etc. an K sofort die konjugierten Richtungen entnehmen können, sind wir im Besitz des Mittelpunktes M von C und erhalten daraus $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ und $5'$. Die Richtungen $11'$ etc. lassen sich aber bereits an K allein konstruieren. Zum Beispiel schneiden sich $(13, 1'2)$ und $(12, 1'3)$ auf i in y, und auf $(y, 23)$ liegt $11'$. Da $1'2$ zu 12 konjugiert ist, erhält man $1'2$, $1'3$ aus 12 und 13 über J.

b. Ist J unzugänglich, so betrachten wir das Viereck (1123) an C, in dem eine Seite zur Tangente 11 geworden ist. An K schneiden sich (11, 23) und (12, 13) in z auf i. Aus 11 erhält man nach § 5b die Richtungen $1a$, $1a'$.

c. Ist i unzugänglich, so polarisieren wir die letzte Konstruktion, indem wir die Polare zu z zeichnen. Sie geht durch J und den Schnittpunkt der Tangenten in 12, 13. Auf ihr treffen sich (11, 13), (12, 23) und ebenso (11, 12), (13, 23).

d. Sind zwei der Richtungen 11, $11'$ etc. bekannt, so kann man die Hauptachsen hiernach ohne Kenntnis des Mittelpunktes von C konstruieren, doch wird man zweckmäßigerweise nicht auf die gesonderte Konstruktion von M verzichten.

7. Von den Figuren 3 bis 5 behandelt 3 eine Hyperbel. Hierbei ist J unzugänglich. Die Konstruktion von i (§ 3) ist durch die erste kleine Hilfsfigur am unteren Ende der Tafel, die von 44 (§ 6b) durch die zweite

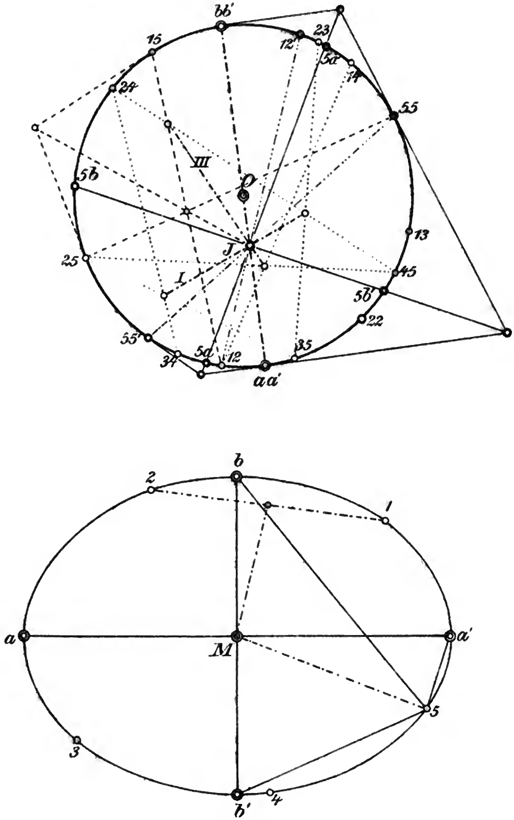


Fig. 4.

gesondert dargestellt, unter Verwendung aller zugänglichen Schnittpunkte. Die Hauptfigur des Hilfskreises *über* der Hyperbel zeigt gestrichelt die Konstruktion von $5a$, $5a'$, $4a$, $4a'$ (§ 5b). Die ausgezogenen Linien geben diejenigen Richtungen an, zu denen in der Figur von C Parallele ausgezogen

sind. Es sind natürlich nicht die einzigen, die bei der Konstruktion wirklich benutzt wurden (§ 5d).

Fig. 4 zeigt eine Ellipse mit unzugänglichem i. Punktiert ist die Konstruktion der strichpunktierten Polaren von I und III (§ 3), gestrichelt die Konstruktion von 55 (§ 6c), durchgezogen die von $5a$, $5a'$, $5b$, $5b'$ (§ 5c). Übertragungspunkt S ist hier 12 auf K. Die Figur ist trotz der unnötig weit ausgezogenen Linien gut zu übersehen.

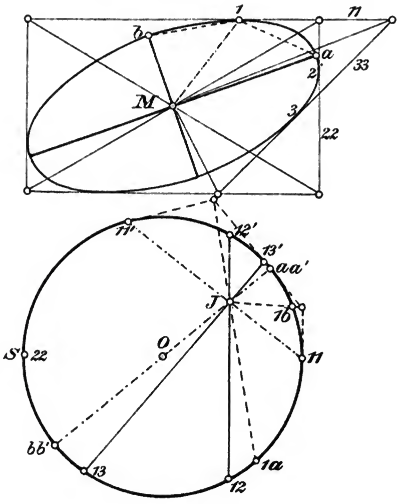


Fig. 5.

Fig. 5 gibt den speziellen, bei der Bestimmung der Trägheitsellipse auftretenden Fall wieder, daß von einer Ellipse der Mittelpunkt und drei Tangenten bekannt sind. Hier hat man sogleich drei Paar konjugierter Richtungen (angegeben sind nur zwei, 12, 12′, 13, 13′) aus den Diagonalen umgeschriebener Parallelogramme und mit ihnen Punkt J der Hilfsfigur. Da 11 bereits bekannt ist, erhält man weiter 11′, daraus in der Figur des Kegelschnitts durch die strichpunktierte Linie $M1 \parallel S11'$ den Punkt 1 (kontrollierbar durch ein Brianchon-Sechseck) und nunmehr a, b wie vorher.

Bemerkung zu meinem Vortrage über Vierecke mit rechtwinkligen Diagonalen (IV. Jahrgang, Seite 39—42).

Von M. Zacharias.

Wie mir mitgeteilt worden ist, sind die Sätze I und II des obigen Vortrags bereits früher in Form von Aufgaben in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht veröffentlicht und zwar I von Emmerich (Jahrg. XXVI, S. 427) und II von Meyer (Jahrg. XXI, S. 110).

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

49. Sitzung am 30. Januar 1907.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Bei der weiteren Beratung über die Eulerfeier wird beschlossen, am 15. April, dem zweihundertsten Geburtstag Leonhard Eulers, um 6 Uhr in dem großen Hörsaal des Physikalischen Instituts eine Festsitzung zu veranstalten, wo Herr Valentin über Eulers Aufenthalt in Berlin, Herr Kneser über Euler und die Variationsrechnung, und Herr Kötter über Euler und das Kreiselproblem sprechen werden. Im Anschluß an die Festsitzung werden sich die Teilnehmer zu einem einfachen Abendessen im Restaurant Heidelberger, Dorotheenstraße 18/21 vereinigen.

Anwesend: 36 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Rothe: Über einen Satz aus der Vektorenrechnung.

Herr Meißner: Über einige arithmetische Funktionen.

50. Sitzung am 27. Februar 1907.

Vorsitzender: Herr Schafheitlin.

Anwesend: 33 Herren.

Wissenschaftliche Mitteilungen:

Herr Wallenberg: Zur Theorie der homogenen linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung (s. S. 25).

Herr Güntsche: Rationale Tetraeder von kongruenten Seiten.

Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung.

Von Georg Wallenberg.

Die Differenzenrechnung, die ältere Schwester der Differentialrechnung, ist von ihrer jüngeren Schwester weit überholt worden. Während die Differentialrechnung sich seit ihrer Erfindung kontinuierlich weiter entwickelt hat und insbesondere die Theorie der Differentialgleichungen schon heute einen imposanten Bau darstellt, an dem noch immer weiter gearbeitet wird und dessen Fortführung zu ungemessenen Höhen führt, ist die Differenzen-

rechnung bis vor kurzem gewissermaßen ein „enfant arriéré" geblieben, obwohl gerade sie berufen erscheint, wegen ihrer vielfachen Anwendungen in der mit endlichen Differenzen operierenden Praxis eine große Bedeutung zu gewinnen. Der Torso der bisher gewonnenen Resultate, an denen Jakob Bernoulli, Lagrange und besonders Euler hervorragenden Anteil besitzen, ist in wenigen Lehrbüchern niedergelegt, von denen aber eigentlich nur das neuere Werk von Markoff (deutsch von Friesendorf und Prym) Anspruch auf die heutzutage unerläßliche Strenge der Beweisführung erheben darf; (zur Einführung in dieses Gebiet kann das vortreffliche Büchlein von Seliwanoff, der diese Disziplin auch für die Enzyklopädie bearbeitet hat, empfohlen werden). — Erst in neuester Zeit hat man angefangen, sich mit den Differenzengleichungen systematisch zu beschäftigen: einerseits hat man begonnen, die linearen Differenzengleichungen erster Ordnung funktionentheoretisch zu behandeln (Boole, Pincherle, Guichard; für komplexe Variable Appell, Mellin, Prym, Hurwitz und Barnes), anderseits hat ein Landsmann Abels und Lies, Alf Guldberg aus Christiania, in einer Reihe von Arbeiten gezeigt, daß die Analogie zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen viel weiter reicht als man bisher ahnte, derart daß die meisten über die linearen Differentialgleichungen gewonnenen Resultate sich direkt auf Differenzengleichungen, natürlich cum grano salis, übertragen lassen, so der Begriff der Reduktibilität, die ganze Picard-Vessiotsche Gruppentheorie, welche bekanntlich der Galoisschen Gruppentheorie der algebraischen Gleichungen entspricht, die Theorie der adjungierten und assoziierten Differentialgleichungen usw. Insbesondere sind es „homogene" Probleme, die sich ohne erhebliche Schwierigkeiten auf Differenzengleichungen übertragen lassen, und ich selber bin dabei, meine Untersuchungen über die Vertauschbarkeit der homogenen linearen Differentialausdrücke (C. R. **134** (1902); Arch. d. Math. u. Phys. (3) **4** (1903), 252—268) sowie die daran anknüpfende Arbeit von Schur aus den Ber. der Berliner Math. Ges. **4** (1905), 2—8 auf Differenzengleichungen zu übertragen.

In meinem heutigen Vortrage habe ich mir nun das Ziel gesteckt, gerade ein *nicht* homogenes Problem zu behandeln, bei dem die Schwierigkeiten der Übertragung viel beträchtlicher sind und neben den Analogien zwischen Differential- und Differenzengleichungen markante Unterschiede in der Untersuchungsmethode auftreten. Zur besseren Vergleichung will ich das entsprechende Problem zuerst für lineare *Differentialgleichungen* zweiter Ordnung erledigen im Anschluß an eine Arbeit im Journ. für die reine u. angew. Math. (Bd. 111 (1893), 89—97), wo ich dieses Problem allgemein für Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung erledigt habe.

I.

Zwischen den Fundamentalintegralen y_1 und y_2 der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{d z^2} + p_1(z)\frac{dy}{dz} + p_2(z) y = 0 \tag{1}$$

möge eine algebraische Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen:

(2) $F(y_1, y_2) = 0$ oder (2′) $y_2 = f(y_1)$,

wo f eine algebraische Funktion von y_1 bedeutet. *Welche Schlüsse kann man daraus auf den Funktionscharakter von y_1 und y_2 selber ziehen?* Dies ist das in Frage stehende Problem. — Durch Differentiation von (2'):

$$\frac{dy_2}{dz} = f'(y_1)\frac{dy_1}{dz}, \quad \frac{d^2y_2}{dz^2} = f''(y_1)\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + f'(y_1)\frac{d^2y_1}{dz^2}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (1):

$$(3) \qquad \left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 = p_2\,\frac{y_1 f'(y_1) - f(y_1)}{f''(y_1)}.$$

Ferner ist bekanntlich:

$$(4) \qquad y_1\frac{dy_2}{dz} - y_2\frac{dy_1}{dz} = C_1 e^{-\int p_1 dz} = (y_1 f'(y_1) - f(y_1))\frac{dy_1}{dz}.$$

Durch Elimination von $\frac{dy_1}{dz}$ aus (3) und (4) erhält man:

$$(5) \qquad C\frac{e^{-2\int p_1 dz}}{p_2} = \frac{(y_1 f'(y_1) - f(y_1))^3}{f''(y_1)} \qquad (C = C_1^2)$$

Dies ist eine algebraische Beziehung zwischen y_1, p_2 und $e^{\int p_1 dz}$; ist also p_2 eine algebraische Funktion und p_1 die logarithmische Ableitung einer algebraischen Funktion von z, so ist y_1 und daher wegen (2) auch y_2 selber eine algebraische Funktion von z.

Diese Beziehung kann illusorisch werden:

I. Wenn $f''(y_1) = 0$, also $y_2 = f(y_1) = c_1 y_1 + c_2$ und $p_2 = 0$ ist; die Differentialgleichung (1) lautet in diesem Falle $\frac{d^2y}{dz^2} + p_1\frac{dy}{dz} = 0$ und ist nun keiner weiteren Bedingung unterworfen, da die Relation $y_2 = c_1 y_1 + c_2$ hier von selbst erfüllt ist. Ihr allgemeines Integral $y = c_1\int e^{-\int p_1 dz} dz + c_2$ braucht *nicht* algebraisch zu sein.

II. Wenn $y_1 f'(y_1) - f(y_1) = 0$, also $C = 0$ ist; in diesem Falle lautet die Relation (2) $y_2 = c y_1$, d. h. y_1 und y_2 würden kein Fundamentalsystem bilden. Dieser Fall ist also auszuschließen.

III. Wenn der Quotient $\frac{(y_1 f'(y_1) - f(y_1))^3}{f''(y_1)}$ eine von Null verschiedene Konstante wird; dann wird auch die linke Seite von (5) eine Konstante, also

$$p_2 = c e^{-2\int p_1 dz} \quad \text{oder} \quad p_1 = -\frac{1}{2}\frac{p_2'}{p_2}.$$

Die Differentialgleichung (1) lautet dann, wenn noch $-p_2$ an Stelle von p_2 geschrieben wird:

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{2}\frac{p_2'}{p_2}\frac{dy}{dz} - p_2 y = 0.$$

Ein Fundamentalsystem von Integralen dieser Differentialgleichung ist bekanntlich

$$\eta_1 = e^{+\int\sqrt{p_2}\,dz}, \quad \eta_2 = e^{-\int\sqrt{p_2}\,dz};$$

dieselben genügen der Relation $\eta_1 \cdot \eta_2 = 1$. Die Integrale brauchen in diesem Falle *nicht* algebraisch zu sein.

Dies findet man auch durch Betrachtung der rechten Seite von (5); es sei der dort stehende Quotient gleich der Konstanten $-a$, also:

$$(y_1 f'(y_1) - f(y_1))^3 + a f''(y_1) = 0. \tag{6}$$

Dies ist eine Differentialgleichung für $f(y_1)$; um $f(y_1)$ daraus zu bestimmen, setze man

$$y_1 f'(y_1) - f(y_1) = u; \tag{7}$$

dann wird $y_1 f''(y_1) = \frac{du}{dy_1}$; also ergibt sich aus (6):

$$u^3 + a\frac{1}{y_1}\frac{du}{dy_1} = 0 \quad \text{oder} \quad -a\frac{du}{u^3} = y_1 dy_1.$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{a}{2}\frac{1}{u^2} = \frac{y_1^2}{2} + \frac{C_2}{2}, \quad \text{d. h.} \quad u = \sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}},$$

also wegen (7):

$$y_1 f'(y_1) - f(y_1) = \sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}}$$

oder

$$f'(y_1) - \frac{1}{y_1} f(y_1) - \frac{1}{y_1}\sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}} = 0.$$

Die nochmalige Integration ergibt

$$f(y_1) = C_1 y_1 + y_1 \int \frac{1}{y_1^2}\sqrt{\frac{a}{y_1^2 + C_2}}\, dy_1$$

oder

$$y_2 = f(y_1) = C_1 y_1 - \frac{\sqrt{a}}{C_2}\sqrt{C_2 + y_1^2},$$

d. h.

$$(y_2 - C_1 y_1)^2 = \frac{a}{C_2^2}(C_2 + y_1^2)$$

oder

$$y_2^2 + 2a_1 y_1 y_2 + a_2 y_1^2 = a_3, \tag{8}$$

worin $a_1 = -C_1$, $a_2 = C_1^2 - \frac{a}{C_2^2}$, $a_3 = \frac{a}{C_2}$ ist; da C_1, C_2 und a willkürlich, so sind auch a_1, a_2 und a_3 willkürliche Konstanten. — Hier ist also eine binäre Form zweiten Grades der Fundamentalintegrale gleich einer Konstanten. Schreibt man die Relation (8): $(y_2 + \alpha y_1)(y_2 + \beta y_1) = a_3$ und setzt $\frac{1}{a_3} y_2 + \frac{\alpha}{a_3} y_1 = \eta_1$, $y_2 + \beta y_1 = \eta_2$, so erhält man sie in der bereits oben gefundenen Form $\eta_1 \cdot \eta_2 = 1$.

II.

Dasselbe Problem soll nunmehr für lineare *Differenzen*gleichungen zweiter Ordnung behandelt werden: Zwischen zwei Fundamentalintegralen η_x und ζ_x der homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$y_{x+2} = p_x y_{x+1} + q_x y_x \tag{A}$$

bestehe eine irreduktible algebraische Beziehung mit konstanten Koeffizienten:

$$F(\eta_x, \zeta_x) = 0$$

oder

(B) $$\zeta_x = f(\eta_x);$$

dann ist

$$\zeta_{x+1} = f(\eta_{x+1}), \quad \zeta_{x+2} = f(\eta_{x+2});$$

also mit Rücksicht auf (A):

(1) $$f(p_x\eta_{x+1} + q_x\eta_x) - p_x f(\eta_{x+1}) - q_x f(\eta_x) = 0.$$

Die Differenzengleichung (A) ist also jedenfalls i. a. reduktibel in dem weiteren Sinne, daß die Partikularlösung η_x einer *nicht* linearen Differenzengleichung erster Ordnung genügt, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche von (A) angehören. Wir können aber mehr erschließen: es besteht nämlich die leicht ersichtliche Relation

$$\begin{vmatrix} \eta_{x+1} & \zeta_{x+1} \\ \eta_{x+2} & \zeta_{x+2} \end{vmatrix} = - q_x \begin{vmatrix} \eta_x & \zeta_x \\ \eta_{x+1} & \zeta_{x+1} \end{vmatrix}.$$ [1]

Setzt man $\begin{vmatrix} \eta_x & \zeta_x \\ \eta_{x+1} & \zeta_{x+1} \end{vmatrix} = d_x$, so lautet diese Gleichung: $d_{x+1} = - q_x d_x$; daraus ergibt sich $d_x = C\prod_0^{x-1}(- q_i) = C(-1)^x q_0 \cdot q_1 \ldots q_{x-1}$.[2]

Wir haben also außer (1) noch die Gleichung:

(2) $$\eta_x f(\eta_{x+1}) - \eta_{x+1} f(\eta_x) = d_x.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich durch Elimination von η_{x+1} im allgemeinen η_x, also nach (B) auch ζ_x als algebraische Funktion von p_x, q_x und d_x; sind diese Größen selber algebraische Funktionen von x, so ist demnach *die allgemeine Lösung der Gleichung* (A) *eine algebraische Funktion von x.*

Es kommt nun der interessantere, aber auch bei weitem schwierigere Teil der Untersuchung, die Erledigung des Ausnahmefalles, d. h. die Beantwortung der Frage: Wann ist die Elimination von η_{x+1} aus den beiden Gleichungen

(1) $$f(p_x\eta_{x+1} + q_x\eta_x) - p_x f(\eta_{x+1}) - q_x f(\eta_x) = 0$$

(2) $$\eta_{x+1} f(\eta_x) - \eta_x f(\eta_{x+1}) + d_x = 0$$

unmöglich? — Zunächst könnte Gleichung (1) eine Identität sein; das ist aber nur dann der Fall, wenn f eine lineare Funktion ihres Argumentes und $p_x + q_x = 1$ ist. Die Differenzengleichung (A) besitzt in diesem Falle ein *konstantes* Partikularintegral (an Stelle dieser Konstanten kann auch all-

1) Eine analoge Beziehung gilt für Differenzengleichungen n^{ter} Ordnung; sie rührt von W. Heymann her (J. für Math. **109**, 114) und entspricht der bekannten, für Differentialgleichungen geltenden Abelschen Relation $\Delta = Ce^{-\int p_1 dx}$, worin Δ die Wronskische Determinante eines Fundamentalsystems von Integralen bedeutet.

2) Siehe z. B. Seliwanoff, Differenzengleichungen, S. 70; dort ist auch die Modifikation angegeben für den Fall, daß eine der Größen q_i verschwindet oder unendlich wird.

gemeiner eine periodische Funktion von der Periode 1, etwa $e^{2\pi i x}$, treten); es besteht daher zwischen zwei beliebigen Fundamentallösungen η_x, ζ_x von (A) ohne weiteres die Beziehung

$$\zeta_x = C_1 \eta_x + C_2;$$

das allgemeine Integral braucht in diesem Falle *nicht* algebraisch zu sein. Dieser Fall $p_x + q_x = 1$ kann nunmehr für das Folgende ausgeschlossen werden. — Im übrigen ist die Elimination von η_{x+1} aus (1) und (2) dann und nur dann unmöglich, wenn diese beiden Gleichungen nicht unabhängig von einander sind, d. h. wenn die Funktionaldeterminante ihrer linken Seiten verschwindet. Setzt man zur Abkürzung $p_x = p$, $q_x = q$, $\eta_{x+1} = u$, $\eta_x = v$, $pu + qv = w$, so erhält man als gesuchte Bedingung:

$$\begin{vmatrix} pf'(w) - pf'(u), & qf'(w) - qf'(v) \\ f(v) - vf'(u), & uf'(v) - f(u) \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Dies ist eine „Differential-Funktionalgleichung" für f, und es ist zu untersuchen, ob dieser durch eine *algebraische* Funktion genügt werden kann. Um dieses Problem der Behandlung zugänglicher zu machen, müssen wir es zu einem rationalen zu gestalten suchen; dies gelingt durch folgende Bemerkung: setzt man $\zeta_{x+1} = r$, $\zeta_x = s$, $pr + qs = t$, so ist nach (B): $r = f(u)$, $s = f(v)$ und infolge von (1) $t = f(w)$ oder in rationaler Form: $F(u, r) = 0$, $F(v, s) = 0$, $F(w, t) = 0$.

Durch Differentiation ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{du} = 0, \quad \frac{dr}{du} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial r}};$$

d. h. $\frac{dr}{du} = f'(u)$ ist eine rationale Funktion von u und r:

$$f'(u) = R(u, r); \quad \text{ebenso} \quad f'(v) = R(v, s), \quad f'(w) = R(w, t).$$

Die Bedingungsgleichung (3) nimmt dann die rationale Form an:

$$\begin{aligned} & prR(u, r) + qsR(v, s) - wR(u, r)R(v, s) \\ & + R(w, t)(puR(v, s) + qvR(u, r) - t) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

und zwar muß diese Gleichung eine *Identität* werden, wenn man darin $r = f(u)$, $s = f(v)$, $w = pu + qv$, $t = pf(u) + qf(v)$ einsetzt. Setzt man daher $v = u$, also $s = r$, und $p + q = \alpha$ in (4), so erhält man:

$$\alpha r R(u, r) - \alpha u R^2(u, r) + R(\alpha u, \alpha r)(\alpha u R(u, r) - \alpha r) = 0$$

oder

$$(R(\alpha u, \alpha r) - R(u, r))(uR(u, r) - r) = 0$$

für ein willkürliches α. Wäre $R(u, r) = \frac{r}{u}$ (unter der Bedingung $r = f(u)$ oder $F(u, r) = 0$), d. h. $\frac{dr}{du} = \frac{r}{u}$, so würde sich ergeben $r = Cu$ und ebenso $s = Cv$; dieser Fall ist auszuschließen, da $s = \zeta_x$ und $v = \eta_x$ als Fundamentallösungen vorausgesetzt waren. Es bleibt also

$$R(\alpha u, \alpha r) = R(u, r)$$

unter der Bedingung $r = f(u)$, wobei zu bemerken ist, daß $f(u)$ von α unabhängig ist. Ist

$$R(u, r) = \frac{P(u, r)}{Q(u, r)},$$

worin P und Q Polynome bedeuten, so muß daher

$$Z \equiv P(\alpha u, \alpha r) Q(u, r) - Q(\alpha u, \alpha r) P(u, r)$$

durch $F(u, r)$ teilbar sein. Es sei nach Dimensionen geordnet

$$P(u, r) = P_m + P_{m-1} + \cdots + P_1 + P_0 \quad (P_m \neq 0),$$
$$Q(u, r) = Q_n + Q_{n-1} + \cdots + Q_1 + Q_0,$$

worin einige der P_i oder Q_i, aber nicht alle, gleich 0 sein können, also:

$$P(\alpha u, \alpha r) = \alpha^m P_m + \alpha^{m-1} P_{m-1} + \cdots + \alpha P_1 + P_0,$$
$$Q(\alpha u, \alpha r) = \alpha^n Q_n + \alpha^{n-1} Q_{n-1} + \cdots + \alpha P_1 + Q_0.$$

Zunächst sei $m > n$, dann wird $Z \equiv \alpha^m P_m Q + \cdots$; es muß also $P_m Q$ durch $F(u, r)$ teilbar sein und, da $F(u, r)$ irreduktibel, entweder P_m oder Q, was unmöglich ist, da beide von kleinerer Dimension als F sind; dieselbe Überlegung gilt auch für $m < n$ $(Q_n \neq 0)$; es muß also zunächst $m = n$ sein. Dann wird:

$$Z \equiv \alpha^m (P_m Q - Q_m P) + \alpha^{m-1} (P_{m-1} Q - Q_{m-1} P) + \cdots + \alpha^k (P_k Q - Q_k P),$$

wenn P_k, Q_k die Glieder niedrigster Dimension bezeichnen; und zwar sind P_i, Q_i stets gleichzeitig von Null verschieden oder gleich Null, da sonst die obige Schlußweise eintritt. Es muß nun $P_i Q - Q_i P$ $(i = k, \ldots m)$ durch $F(u, r)$ teilbar sein; insbesondere muß also unter der Bedingung $F(u, r) = 0$

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_k}{Q_k}$$

werden. Wir können daher setzen

$$R(u, r) \equiv \frac{P_k(u, r)}{Q_k(u, r)},$$

worin P_k und Q_k homogene Polynome k^{ter} Dimension in u und r bezeichnen; alsdann ist übrigens *identisch*, d. h. auch ohne die Bedingung $F(u, r) = 0$:

$$R(\alpha u, \alpha r) = R(u, r).$$

Wir werden nunmehr nachweisen, daß $k = 1$ sein muß. Es sei zunächst $k = 2$, also:

$$P(u, r) = \alpha_1 u^2 + 2\beta_1 ur + \gamma_1 r^2, \quad Q(u, r) = \alpha_2 u^2 + 2\beta_2 ur + \gamma_2 r^2;$$
$$P(v, s) = \alpha_1 v^2 + 2\beta_1 vs + \gamma_1 s^2, \quad Q(v, s) = \alpha_2 v^2 + 2\beta_2 vs + \gamma_2 s^2.$$

Dann ist:

$$P(pu + qv, pr + qs) = p^2 P(u, r) + 2pq P_1 + q^2 P(v, s),$$
$$Q(pu + qv, pr + qs) = p^2 Q(u, r) + 2pq Q_1 + q^2 Q(v, s),$$

worin

$$P_1 = \alpha_1 uv + \beta_1 (us + vr) + \gamma_1 rs, \quad Q_1 = \alpha_2 uv + \beta_2 (us + vr) + \gamma_2 rs$$

gesetzt ist. — Wenn man $R = \frac{P}{Q}$ in (4) einsetzt, so erhält man:

$$(5)\quad \begin{cases} p(rQ(v,s) - uP(v,s))(P(u,r)\,Q(pu+qv,\,pr+qs) \\ \qquad\qquad - Q(u,r)\,P(pu+qv,\,pr+qs)) \\ + q(sQ(u,r) - vP(u,r))(P(v,s)\,Q(pu+qv,\,pr+qs) \\ \qquad\qquad - Q(v,s)\,P(pu+qv,\,pr+qs)) = 0. \end{cases}$$

Da die Gleichung (5) eine Identität wird, wenn man darin $r = f(u)$ und $s = f(v)$ einsetzt, und da $f(u)$ von p und q unabhängig ist, so müssen, wenn man in (5) für P und Q ihre obigen Werte einträgt und nach Potenzen von p und q ordnet, die Koeffizienten der einzelnen Potenzen verschwinden. Der Koeffizient von p^3 wird:

$$(rQ(v,s) - uP(v,s))(P(u,r)\,Q(u,r) - Q(u,r)\,P(u,r)),$$

der Koeffizient von q^3:

$$(sQ(u,r) - vP(u,r))(P(v,s)\,Q(v,s) - Q(v,s)\,P(v,s));$$

dieselben sind ohne weiteres identisch gleich Null. Ferner werden die Koeffizienten von p^2q bez. pq^2:

$$(6)\quad \begin{cases} (P(v,s)\,Q(u,r) - Q(v,s)\,P(u,r))(sQ(u,r) - vP(u,r)) \\ \qquad + 2\,(P(u,r)\,Q_1 - Q(u,r)\,P_1)(rQ(v,s) - uP(v,s)) = 0, \\ 2\,(P(v,s)\,Q_1 - Q(v,s)\,P_1)(sQ(u,r) - vP(u,r)) \\ \qquad + (P(u,r)\,Q(v,s) - Q(u,r)\,P(v,s))(rQ(v,s) - uP(v,s)) = 0. \end{cases}$$

Es kann nicht gleichzeitig

$$sQ(u,r) - vP(u,r) = 0,$$
$$rQ(v,s) - uP(v,s) = 0$$

sein; denn wenn diese beiden Gleichungen, die auch in der Form

$$(7)\quad \begin{cases} f(v) - vf'(u) = 0, \\ f(u) - uf'(v) = 0 \end{cases}$$

geschrieben werden können, von einander unabhängig sind, so ergeben sich aus ihnen u und v als Konstanten, und zwar ist, da $v = \eta_x$, $u = \eta_{x+1}$, die einzig brauchbare Lösung $u = v$, wo v eine Wurzel der Gleichung $f(v) - vf'(v) = 0$ ist; dieser Fall eines konstanten Integrals ist aber bereits oben (S. 29, 30) erledigt worden. Sind dagegen die Gleichungen (7) nicht unabhängig von einander, so muß, wie man sich durch Betrachtung ihrer Funktionaldeterminante leicht überzeugt, $f(u) = cu$, $f(v) = cv$, d. h. $\zeta_x = c\eta_x$ sein, und dieser Fall ist auszuschließen, da η_x und ζ_x Fundamentalintegrale von (A) sind. Es folgt daher aus den Gleichungen (6), daß die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} P(v,s)\,Q(u,r) - Q(v,s)P(u,r), & 2(P(u,r)Q_1 - Q(u,r)P_1 \\ 2\,(P(v,s)\,Q_1 - Q(v,s)P_1, & P(u,r)Q(v,s) - Q(u,r)P(v,s) \end{vmatrix} = 0$$

sein muß. Es ist aber:

$$\triangle = -(us - vr)^4\,[(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - 4\,(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)].$$

Aus $us - vr = 0$ würde folgen $\frac{u}{r} - \frac{v}{s} = 0$, d. h. $\frac{\eta_{x+1}}{\zeta_{x+1}} - \frac{\eta_x}{\zeta_x} = 0$, also $\frac{\eta_x}{\zeta_x} = \text{const.}$; dieser Fall ist wieder auszuschließen; es bleibt daher:

$$(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - 4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber die Bedingung dafür dar, daß $P(u, r)$ und $Q(u, r)$ einen gemeinsamen linearen Faktor besitzen. Ganz in derselben Weise zeigt man, daß, wenn $P(u, r)$ und $Q(u, r)$ von der k^{ten} Dimension in u und r angenommen werden, sie $k - 1$ gemeinsame lineare Faktoren besitzen. Denkt man sich in $R(u, r) = \frac{P(u, r)}{Q(u, r)}$ diese gemeinsamen Faktoren fortgehoben, so kann man demnach $P(u, r)$ und $Q(u, r)$ von der ersten Dimension voraussetzen:

$$P(u, r) = \alpha u + \beta r, \quad Q(u, r) = \gamma u + \delta r,$$

und analog:

$$P(v, s) = \alpha v + \beta s, \quad Q(v, s) = \gamma v + \delta s;$$

darin muß $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ sein, da sonst $\frac{ds}{dv} = \frac{P(v, s)}{Q(v, s)} = c$, also $s = cv + c_1$, d. h. $\zeta_x = c\eta_x + c_1$ wäre, ein Fall, der oben (S. 30) erledigt worden ist. Setzt man diese Werte von P und Q in die Gleichung (5) ein und ordnet wieder nach Potenzen von p und q, so verschwinden die Koeffizienten von p^2 und q^2 identisch, und der Koeffizient von pq wird:

$$-(\alpha\delta - \beta\gamma)(\beta + \gamma)(us - vr)^2;$$

es muß daher $\beta + \gamma = 0$ sein, d. h.

$$\frac{ds}{dv} = \frac{\alpha v + \beta s}{-\beta v + \delta s}$$

oder:

$$(\alpha v + \beta s)\,dv + (\beta v - \delta s)\,ds = 0.$$

Daraus folgt durch Integration die Beziehung:

$$\alpha v^2 + 2\beta vs - \delta s^2 = c, \text{ d. h. } \alpha\eta_x^2 + 2\beta\eta_x\zeta_x - \delta\zeta_x^2 = c.$$

Dies ist die gesuchte algebraische Relation zwischen η_x und ζ_x im Ausnahmefalle; sie ist der für die entsprechende Differentialgleichung gefundenen ganz analog. Dividiert man durch c und zerlegt die linke Seite in Faktoren, so ergibt sich:

$$(a_1\eta_x + a_2\zeta_x)(b_1\eta_x + b_2\zeta_x) = 1,$$

worin die Konstanten a_i, b_i der Bedingung $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ genügen, da man sonst wieder auf den Fall $\zeta_x = c\eta_x + c_1$ zurückkommt. Setzt man die neuen Fundamentalintegrale $a_1\eta_x + a_2\zeta_x = u_x$, $b_1\eta_x + b_2\zeta_x = v_x$, so wird $u_x v_x = 1$, d. h. die Differenzengleichung (A) ist *reziprok.*

Es erübrigt noch, die Bedingungsgleichung dafür aufzustellen: Besitzt die Differenzengleichung (A) zwei Fundamentalintegrale u_x und v_x derart, daß $v_x = \frac{1}{u_x}$, so ist (vergl. S. 29):

$$\frac{1}{p_x u_{x+1} + q_x u_x} - \frac{p_x}{u_{x+1}} - \frac{q_x}{u_x} = 0,$$

oder:

$$\frac{u_x}{u_{x+1}} + \frac{u_{x+1}}{u_x} = \frac{1 - p_x^2 - q_x^2}{p_x q_x} = h_x, \tag{1}$$

ferner:

$$\frac{u_x}{u_{x+1}} - \frac{u_{x+1}}{u_x} = d_x. \tag{2}$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Bedingungsgleichung:

$$h_x^2 - d_x^2 = 4;$$

und es wird:

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} = \tfrac{1}{2}(h_x - d_x), \quad \frac{v_{x+1}}{v_x} = \frac{u_x}{u_{x+1}} = \tfrac{1}{2}(h_x + d_x),$$

also:

$$u_x = \prod_0^{x-1} \tfrac{1}{2}(h_x - d_x), \quad v_x = \prod_0^{x-1} \tfrac{1}{2}(h_x + d_x).$$

Die Integrale u_x und v_x brauchen in der Tat keine algebraischen Funktionen von p_x und q_x zu sein, obwohl hier d_x eine algebraische Funktion von p_x und q_x ist $\left(d_x = \sqrt{h_x^2 - 4}\right)$.

Die Spezialfälle $q_x = 0$, $p_x = 0$.

I. $q_x = 0$.

Die Differenzengleichung $y_{x+2} = p_x y_{x+1}$ wird durch die Substitution $y_{x+1} = z_x$ auf die lineare Differenzengleichung erster Ordnung $z_{x+1} = p_x z_x$ zurückgeführt, deren *sämtliche* Integrale sich nur durch eine Konstante unterscheiden.

II. $p_x = 0$.

Besteht zwischen den Fundamentalintegralen u_x und v_x der Differenzengleichung

$$y_{x+2} = q_x y_x$$

die algebraische Beziehung mit konstanten Koeffizienten $v_x = f(u_x)$, so ist

$$f(q_x u_x) - q_x f(u_x) = 0;$$

diese Gleichung wird nur dann *identisch* erfüllt, wenn $f(u_x) = c u_x$, was unzulässig, oder wenn $q_x = 1$ ist. Ist das nicht der Fall, so bilde man mit den konjugierten Werten der algebraischen Funktion f das Produkt:

$$F(q_x, u_x) = \prod (f_i(q_x u_x) - q_x f_i(u_x)) = 0.$$

F ist eine rationale Funktion von q_x und u_x; es ergibt sich also im allgemeinen eine algebraische Beziehung zwischen u_x und q_x und daher auch zwischen $v_x = f(u_x)$ und q_x. Dieselbe wird illusorisch, wenn

$$F(q_x, u_x) = \varphi(q_x) \cdot \psi(u_x)$$

ist. Dann ergibt sich entweder $\psi(u_x) = 0$, d. h. $u_x = \text{const.}$ und daher auch $v_x = f(u_x) = \text{const.}$, was unzulässig ist, oder aber $\varphi(q_x) = 0$, d. h. $q_x = c$ (const.). Die Differenzengleichung

$$y_{x+2} = c y_x$$

besitzt die Fundamentalintegrale ϱ^x und $(-\varrho)^x$, wenn $\varrho = |\sqrt{c}|$ ist, und es fragt sich, wann zwischen ϱ^x und $(-\varrho)^x$, also auch zwischen ϱ^x und $(-1)^x$, d. h. zwischen $e^{x \ln \varrho}$ und $e^{\pi i x}$ eine algebraische Beziehung besteht. Das ist aber nur dann der Fall, wenn $\ln \varrho = \frac{p}{q} \pi i$ (p und q ganze Zahlen), also $\varrho = e^{\frac{p}{q}\pi i}$, d. h. wenn ϱ und daher auch c eine *Einheitswurzel* ist (auch der Fall $q_x = 1$ gehört noch hierher). Es läßt sich nun leicht zeigen, daß diese algebraische Beziehung stets von der des Ausnahmefalles verschieden ist, und daß in der Tat die beiden Fundamentallösungen der Differenzengleichung $y_{x+2} = c y_x$ algebraische Funktionen von c und $\prod_0^{x-1}(-c) = (-c)^x$ (vgl. S. 29) sind: Die Differenzengleichung $y_{x+2} = \varrho^2 y_x$, worin $\varrho = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ ($k \neq 0$ und relativ prim zu n), besitzt die Fundamentalintegrale $u_x = \varrho^x = e^{\frac{2k\pi i x}{n}}$ und $v_x = (-\varrho)^x = e^{\frac{(2k+n)\pi i x}{n}}$; zwischen denselben besteht die algebraische Beziehung $v_x = u_x^{\frac{2k+n}{2k}}$ $\left(\text{für ein gerades } n = 2m \text{ lautet sie } v_x = u_x^{\frac{k+m}{k}}\right)$. Nun ist:

$$d_x = v_x u_{x+1} - u_x v_{x+1} = 2\varrho(-\varrho^2)^x$$

und

$$u_x v_x = u_x^{\frac{4k+n}{2k}} = (-\varrho^2)^x = \frac{d_x}{2\varrho}$$

$\left(\text{für gerade } n = 2m \text{ wieder } u_x^{\frac{2k+m}{k}} = \frac{d_x}{2\varrho}\right)$; hieraus ergibt sich aber u_x und daher auch v_x als algebraische Funktion von ϱ und d_x.

Beispiele:

1. d_x *algebraisch.*

$$y_{x+2} - 2\frac{x+2}{x+1} y_{x+1} + \frac{x+2}{x} y_x = 0;$$

$d_x = x(x+1)$; $u_x = x$, $v_x = x^2$; $v_x = u_x^2$. Die Integrale sind algebraisch.

2. d_x *transzendent.*

$$y_{x+2} - 6y_{x+1} + 8y_x = 0;$$

$$d_x = 2 \cdot 8^x = 2 \cdot 2^{3x}; \quad u_x = 2^x, \quad v_x = 4^x; \quad v_x = u_x^2.$$

Die Integrale sind transzendent, aber algebraisch in d_x:

$$u_x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} d_x^{\frac{1}{3}}, \quad v_x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} d_x^{\frac{2}{3}}.$$

Ausnahmefall:

3. $$y_{x+2} - \frac{(x^2+x+1)(x^2+x-1)}{(x+1)^2(x-1)} y_{x+1} + \frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2(x-1)} y_x = 0;$$

$$d_x = \frac{x^2-1}{x}; \; h_x = \frac{1-p_x^2-q_x^2}{p_x q_x} = \frac{x^2+1}{x}; \; h_x^2 - d_x^2 = 4; \; \frac{h_x+d_x}{2} = x, \; \frac{h_x-d_x}{2} = \frac{1}{x};$$

$$u_x = \prod_1^{x-1} \frac{h_x+d_x}{2} = \Gamma(x), \quad v_x = \prod_1^{x-1} \frac{h_x-d_x}{2} = \frac{1}{\Gamma(x)}; \quad v_x = \frac{1}{u_x}.$$

4. $y_{x+2} - \frac{5}{2} y_{x+1} + y_x = 0; \quad (z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = 0 : z_1 = 2, \; z_2 = \frac{1}{2});$

$u_x = 2^x - \frac{1}{2^x}, \; v_x = 2^x + \frac{1}{2^x}; \; v_x^2 - u_x^2 = 4$ oder $v_x = \sqrt{4+u_x^2}; \; d_x = -3;$

(I) $$\sqrt{4 + (\tfrac{5}{2} u_{x+1} - u_x)^2} = \tfrac{5}{2}\sqrt{4+u_{x+1}^2} - \sqrt{4+u_x^2};$$

in rationaler Form:

$$4u_{x+1}^2 - 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9 = 0.$$

(II) $$u_{x+1}\sqrt{4+u_x^2} - u_x\sqrt{4+u_{x+1}^2} = 3;$$

in rationaler Form:

$$(4u_{x+1}^2 + 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9)(4u_{x+1}^2 - 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9) = 0.$$

Da nicht gleichzeitig

$4u_{x+1}^2 + 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9 = 0$ und $4u_{x+1}^2 - 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9 = 0$

sein kann (daraus würde folgen $u_{x+1} = 0, \; u_x = \pm\frac{3}{2}$ oder $u_x = 0, \; u_{x+1} = \pm\frac{3}{2}$, was unmöglich ist), so bleibt als *einzige* Gleichung:

$$4u_{x+1}^2 - 10u_{x+1}u_x + 4u_x^2 - 9 = 0,$$

aus der sich in der Tat u_x *nicht* als algebraische Funktion von x ergibt.

5. Algebraische Integrale im Ausnahmefalle:

$$y_{x+2} - \frac{4(x+1)^2}{(x+2)(2x+1)} y_{x+1} + \frac{x(2x+3)}{(x+2)(2x+1)} y_x = 0;$$

$$h_x = \frac{2x^2+2x+1}{x(x+1)}; \; d_x = \frac{2x+1}{x(x+1)}; \; h_x^2 - d_x^2 = 4;$$

$$\tfrac{1}{2}(h_x + d_x) = \frac{x+1}{x}, \quad \tfrac{1}{2}(h_x - d_x) = \frac{x}{x+1};$$

$$u_x = \prod_1^{x-1} \tfrac{1}{2}(h_x + d_x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{x-1}{x-2}\cdot\frac{x}{x-1} = x;$$

$$v_x = \prod_1^{x-1} \tfrac{1}{2}(h_x - d_x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x} = \frac{1}{x}.$$